Cours de Traitement Du Signal - Transformées discrètes

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

17 octobre 2007

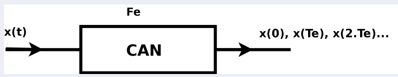
Plan du cours

Introduction

Problématique

- Mesurer le spectre d'un signal continu $x(t)$ à partir de la suite d'échantillons du signal échantillonné $x[n]$
- Observation finie $\Rightarrow$ approximation de $TF(x(t))$

Hypothèses



- Choix de la fréquence d'échantillonage respecte Shannon : $f_e > 2.B$
- Effet du bloqueur négligé (échantillonage parfait).
- Erreur liée à la quantification négligée.

Transformée de Fourier d'un signal numérique

Définition

$TF(x[n])$:

$$X_{num}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\, e^{-j.2\pi.\nu.n}$$

Remarques

- Conditions d'existence liées à la convergence de la série
- Fonction complexe périodique de période unité
- Lien avec le signal analogique échantillonné : changement variable $\nu = \frac{f}{f_e}$
- Inadapté aux calculs numériques $\Rightarrow$ intérêt théorique

Définition

Transformée de Fourier Discrète

- *TFD* d'ordre N : $\forall k \in [0, N-1]$

$$X_N\left[k\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j.2\pi.k.n}{N}}$$

- N = nombre d'échantillons utilisés dans le calcul.
- Si $N = 2^q \Rightarrow$ algorithme rapide (Fast Fourier Transform)

Transformée de Fourier Discrète Inverse

$$x\left[n\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{\frac{j.2.\pi.k.n}{N}}$$

Relation entre TFD et spectre de $x\left(t\right)$

Discrétisation de la Transformée de Fourier

- La TFD peut être vue comme une discrétisation (échantillonnage) sur une période $[0, f_e]$ de la transformée de Fourier du signal numérique observé sur une durée $\tau = N.T_e$:

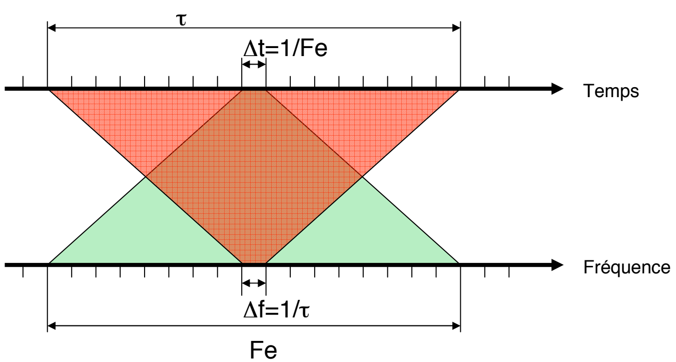
$$X_N\left[k\right] = X_{num/f}\left(\frac{k}{N}\right), \forall k \in [0, N-1]$$

- Spectre discret adapté aux traitements numériques

Caractérisation spectrale

- Spectre discret $\Rightarrow$ caractérisation d'un signal périodique

Dualité Temps/Fréquence



Δt=1/Fe=τ/N

Δf=1/τ=Fe/N

Relation entre TFD et spectre de $x\left(t\right)$

Périodisation du signal numérique

- On peut définir : $\tilde{x}\left[n\right] = \sum_{p\in Z} x\left[n - p.N\right], n \in Z$
- $\tilde{x}$ est la séquence obtenue par périodisation de $x\left[n\right]$

Application de la TFD

- Périodisation de X_N :

$$\tilde{X}_N = \sum_{p\in Z} X_N\left[k - p.N\right], k \in Z$$

- Discrétisation de $X_{num/f}\left(f\right)$:

$$\tilde{X}_N = X_{num/f}\left(\frac{k}{N}\right), k \in Z$$

Relation entre TFD et spectre de $x(t)$

Autre définition de la TFD

Lien entre $\tilde{x}[n]$ et $\tilde{X}_N[k]$:

$$\tilde{X}_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] . e^{\frac{-j.2.\pi.k.n}{N}}, k \in Z$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N[k] . e^{\frac{j.2.\pi.k.n}{N}}, n \in Z$$

Bilan

Liens entre $\tilde{x}$, x, TF et TDF... (cf poly p. 59)

Propriétés

- Linéarité :

$$TFD(\alpha.x[n] + \beta.y[n] = \alpha.TFD(x[n]) + \beta.TFD(y[n])$$

- Conjugaison : $TFD(\overline{x[n]}) = \overline{X_N[N-k]}$
- Décalage temporel : $TFD(x[n+n_0]) = X_N[k].e^{\frac{j.2.\pi.n_0}{N}}$
- Décalage fréquentiel : $TFD^{-1}(X_N(k-k_0)) = x[n].e^{\frac{j.2.\pi.k_0}{N}}$
- Symétries : si $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $Re(X_N[k]) = Re(X_N[N-k])$
  - $Im(X_N[k]) = -Im(X_N[N-k])$
  - $|X_N[k]| = |X_N[N-k]|$

  $\longrightarrow$ lecture spectre sur zone utile $[0, \frac{f_e}{2}] \leftrightarrow [0, \frac{N}{2}]$

Décalage circulaire

Décalage circulaire d'une séquence (modulo N) :

$$x[\langle n-p \rangle_N] = \tilde{x}[n-p]$$

Convolution circulaire

- $(u \odot v)[1] = \sum_{p=0}^{N-1} u[p] v[\langle 1-p \rangle_N] = (\tilde{u} * \tilde{v})[1]$

$$(u \odot v)[n] \underset{\longleftrightarrow}{TFD} X_N[k] . Y_N[k]$$

$$x[n] . y[n] \underset{\longleftrightarrow}{TFD} (X_N \odot Y_N)[k]$$

Définition

- FFT = algorithme de calcul des TFD de rang $N = 2^q$.
- Utilisation du principe *diviser pour mieux régner* : limiter le nombre d'opérations (additions, multiplications).
- Algorithme de *COOLEY-TUKEY* strictement équivalent à la définition de la TFD.

Description de la méthode

On pose :

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] . W_N^{k.n}, 0 \leq k \leq N-1$$

avec

$$W_N = e^{-j.\frac{2.\pi}{N}}$$

Relation de récurrence

- Partitionnement de $x[k]$ en $a[p] = x[2.p]$ et $b[p] = x[2.p+1], 0 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2} - 1$
- Calcul de X_N en fonction de $A_{N/2}$ et $B_{N/2}$:

$$X_N[k] = A_{N/2}[k] + W_N^k.B_{N/2}[k], 0 \leq k \leq N-1$$

Utilisation de la périodicité

- $A_{N/2}$ et $B_{N/2}$ sont périodiques de période $\frac{N}{2}$
- $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$
  - $X_N[k] = A_{N/2}[k] + W_N^k.B_{N/2}[k], 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$
  - $X_N\left[\frac{N}{2} + k\right] = A_{N/2}[k] - W_N^k.B_{N/2}[k], 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$

Papillon FFT d'ordre 2

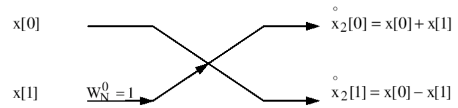
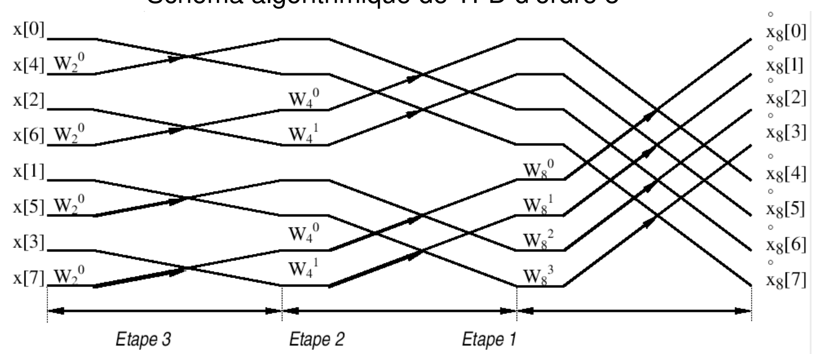


Schéma algorithmique de TFD d'ordre 8



Détermination de l'entrelacement

- Décomposition de l'indice de la séquence ordonnée :

$$n = \sum_{j=0}^{q-1} m_j.2^j = 2.\left(m_{q-1}.2^{q-2+\ldots+m_1}\right) + m_0$$

- m_0 détermine la première partition. De même, chaque bit détermine les partitions successives
- Décomposition de l'indice de la séquence entrelacée :

$$i = m_0.2^{q-1} + m_1.2^{q-2} + \ldots + m_{q-1}2^0 = \sum_{j=0}^{q-1} m_{q-1-j}.2^j$$

- Renversement de l'ordre des bits.

Influence sur le temps de calcul

FFT

- 1 multiplication et 2 additions complexes par papillon
- $\frac{N}{2}$ papillons par étape de récurrence
- $q = log_2(N)$ étapes de récurrence
- Bilan : $\frac{N}{2}.log_2(N)$ multiplications et $N.log_2(N)$ additions

TFD directe

- N^2 multiplications complexes
- $N.(N-1)$ additions complexes
- Facteur de réduction du nombre de multiplications :

$$R = \frac{2.N}{Log_2(N)}$$

Fenêtres d'apodisation (de pondération)

Problématique

- Numérisation ⇒ multiplication par une fonction porte (domaine fréquentiel)
- Distorsion spectrale (convolution par un sinus cardinal) :
  - raie ⇒ lobe principal (2/T)
  - lobes secondaires
- Substitution de la fenêtre *porte* par d'autres fenêtres pour améliorer la lisibilité du spectre

Propriétés

- $w[n] = 0, \forall n \notin [0, N-1]$
- $x_w[n] = x[n].w[n]$
- $X_{wN}[k] = X_N[k] \odot W_N[k]$

Performance/critères de choix

- Largeur de la fenêtre ⇒ résolution fréquentielle (pouvoir séparateur)
- Remontée des lobes secondaires ⇒ résolution en amplitude (pouvoir de détection)

Remarques

- Toutes les fenêtres (sauf la fenêtre rectangulaire) modifient l'allure temporelle du signal.
- Fenêtre idéale : largeur de lobe principale nulle et pas de lobe secondaire
- Pas de solution *miracle* ⇒ choix en fonction des caractéristiques du signal

Illustration de la résolution fréquentielle des fenêtres : pouvoir séparateur

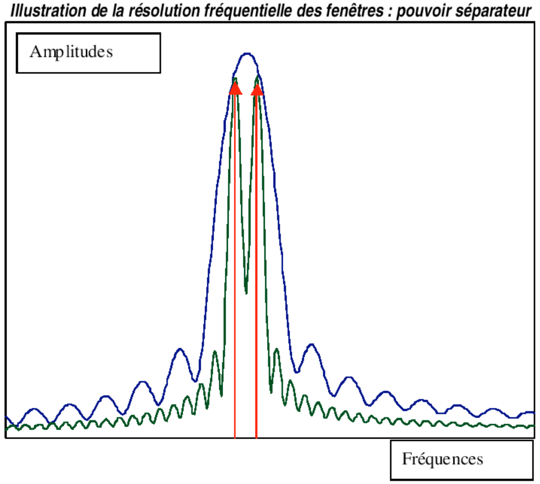
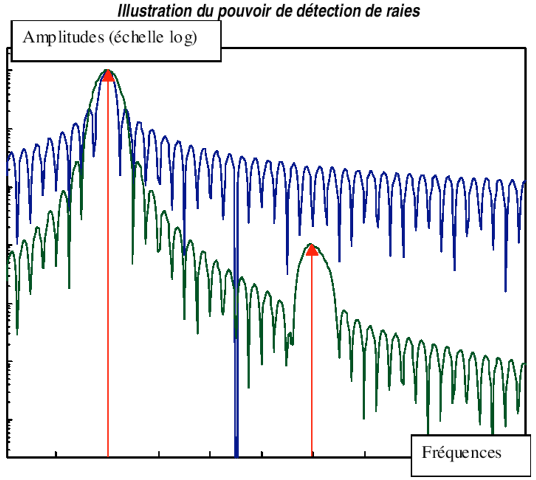
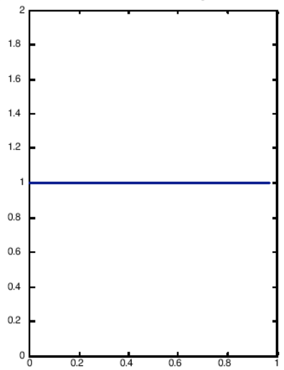


Illustration du pouvoir de détection de raies

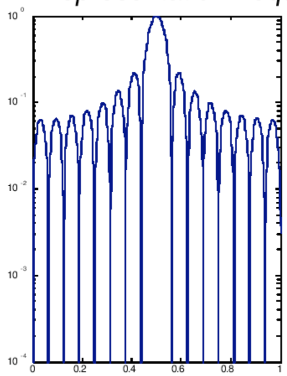


Fenêtre rectangulaire

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Fenêtre rectangulaire

Définition

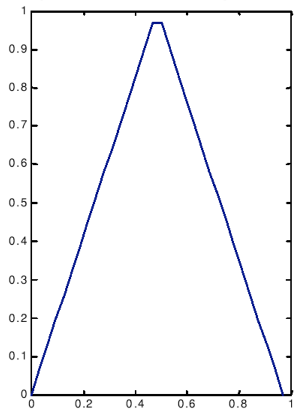
$$w(t) = 1$$

Propriétés

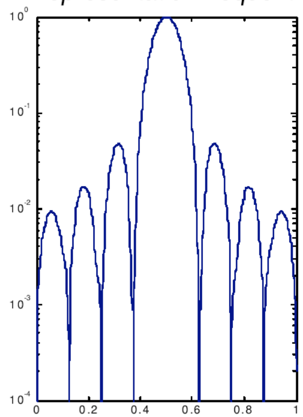
- Largeur de lobe principal : $\frac{2}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-30dB$
- Résolution fréquentielle moyenne
- Mauvaise résolution en amplitude
- 2 cas d'utilisations typiques :
  - Analyse des signaux périodiques de fréquence connue $\Rightarrow$ choix de L
  - Signaux d'excitation (chocs...)

Fenêtre triangulaire

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Fenêtre triangulaire

Définition

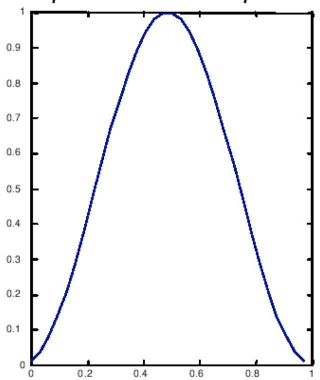
$$w(t) = 1 - \frac{|t - \frac{T}{2}|}{\frac{T}{2}}$$

Propriétés

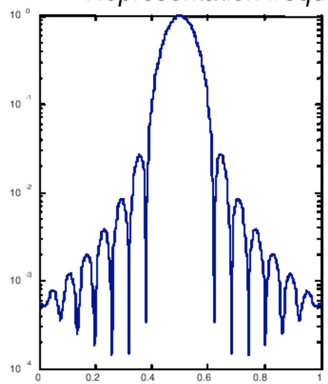
- Largeur de lobe principal : $\frac{4}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-61dB$
- Résolution fréquentielle moyenne
- Résolution en amplitude moyenne
- Peu de cas d'utilisations

Fenêtre hanning

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Fenêtre hanning

Définition

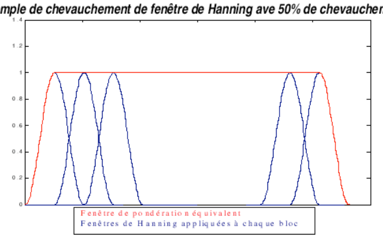
$$w(t) = 1 - cos\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right)$$

Propriétés

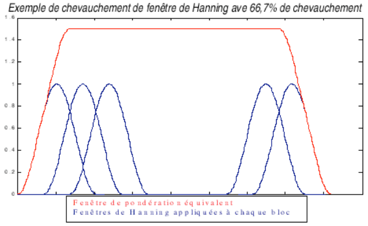
- Largeur de lobe principal : $\frac{4}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-73dB$
- Bonne résolution fréquentielle
- Bonne résolution en amplitude
- Cas d'utilisations typiques :
  - Fenêtre *par défaut* lorsque la fréquence des signaux n'est pas parfaitement connue
  - Analyse spectrale : utilisation du recouvrement

Fenêtre hanning avec recouvrement

Exemple de chevauchement de fenêtre de Hanning ave 50% de chevauchement



Exemple de chevauchement de fenêtre de Hanning ave 66,7% de chevauchement



Fenêtre hanning

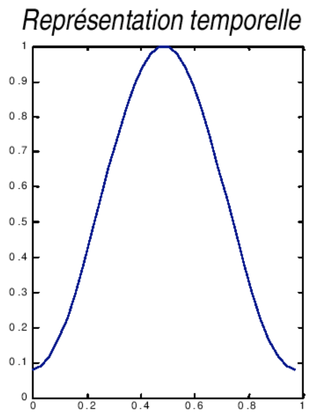
Définition

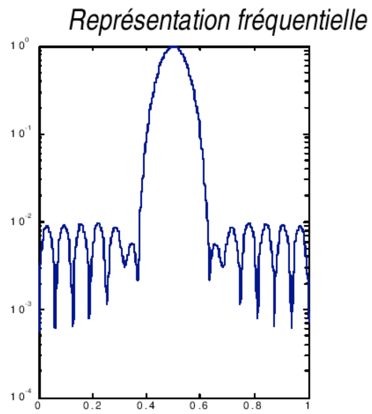
- Aquisition de plusieurs blocs successifs avec recouvrement.
- Traitement de chaque bloc par une fenêtre hanning simple.
- Durée d'acquisition : $T = [(1 - Ch).(K - 1) + 1].N.T_e$

Propriétés

- Faible distorsion
- Faible remontée des lobes secondaires
- Chevauchement judicieux : 50%, 67%...
- Utilisation en analyse spectrale : traitement des signaux aléatoires

Fenêtre hamming





Fenêtre hamming

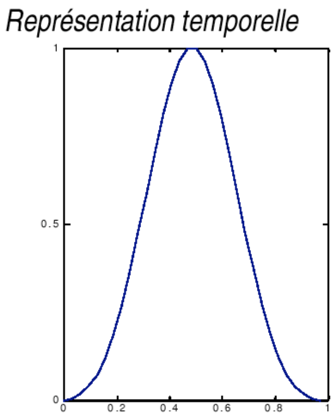
Définition

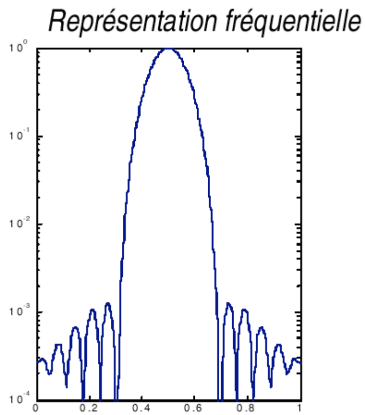
$$w(t) = 0,54 - 0,46cos\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right)$$

Propriétés

- Largeur de lobe principal : $\frac{4}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-93dB$
- Bonne résolution fréquentielle
- Bonne résolution en amplitude (meilleur que hanning pour des fréquences voisines)
- Cas d'utilisations typiques :
  - même utilisation que hanning
  - surtout pour séparer des fréquences proches

Fenêtre de Blackman





Fenêtre Blackman

Définition

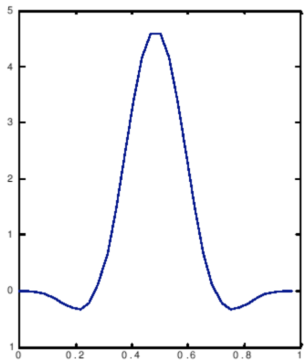
$$w(t) = 0,42 - 0,5cos\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right) + 0,08.cos\left(\frac{4.\pi.t}{T}\right)$$

Propriétés

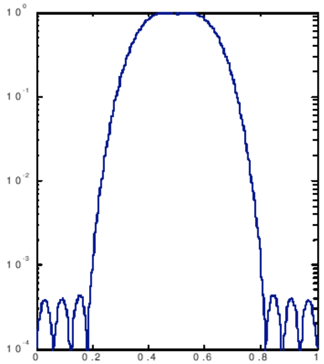
- Largeur de lobe principal : $\frac{6}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-134dB$
- Résolution fréquentielle moyenne
- Très bonne résolution en amplitude
- Cas d'utilisations typiques :
  - Compensation du pouvoir de séparation par la durée d'aquisition
  - Détection d'harmoniques de faible amplitude

Fenêtre Flat-top

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Fenêtre Flat-top

Définition

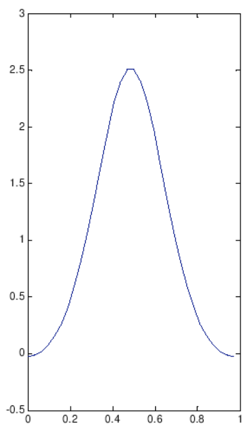
$$w(t) = 1 - 1,93.cos\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right) + 1,29.cos\left(\frac{4.\pi.t}{T}\right) - 0,388.cos\left(\frac{6.\pi.t}{T}\right)$$

Propriétés

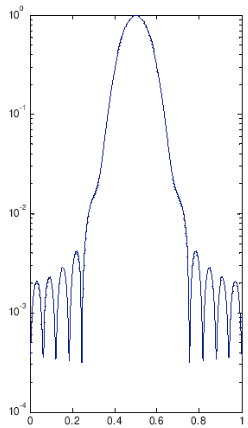
- Largeur de lobe principal : $\frac{10}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-155dB$
- Résolution fréquentielle moyenne (largeur du lobe principal)
- Excellente résolution en amplitude
- Utilisation pour étalonnage de capteur...

Fenêtre de Kaiser-Bessel

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Fenêtre Kaiser-Bessel

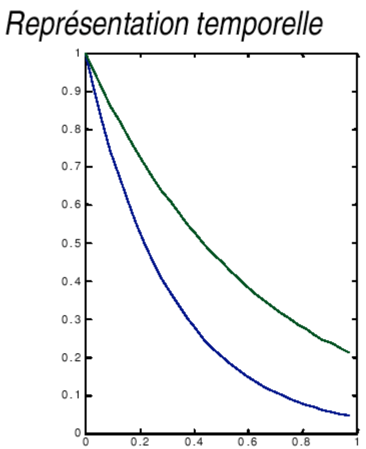
Définition

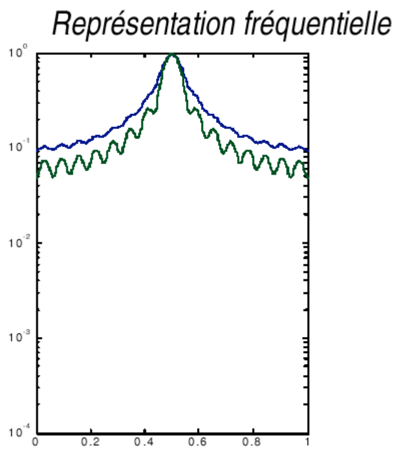
$$w(t) = 1 - 1,24.cos\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right) + 1,244.cos\left(\frac{4.\pi.t}{T}\right) - 0,0305.cos\left(\frac{6.\pi.}{T}\right.$$

Propriétés

- Largeur de lobe principal : $\frac{8}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-110dB$
- Résolution fréquentielle moyenne (largeur du lobe principal)
- Bonne résolution en amplitude (meilleure que hanning..)
- Bon compromis
- Utilisation en analyse de machines tournantes

Fenêtre exponentielle





Fenêtre exponentielle

Définition

$$w(t) = e^{-\delta.(t-t_0)}$$

Propriétés

- Largeur de lobe principal : $\frac{4}{T}$
- Rapport d'atténuation : $-26dB$
- Utilisation pour étude des signaux pseudo-périodiques et à décroissance lente.