TD#1: (Transformées en Z et Z inverse)

Ex #1 :

a) Pour chaque signal analogique x_a(t), calculer sa transformée en Z (T.Z).

- $x_a(t)=u(t)$ *avec* $u(t)=1$ pour $t>0$ et 0 ailleurs

- $x_a(t) = e^{-at}$

- $x_a(t)=tu(t)$

b) Pour chaque signal numérique $x(n)$ calculer sa sa T.Z.

- $x(n)= a^n u(n)$

- $x(n)=n-5$

- $x(n) = n+1$

- $x(n)=-b^n u(-n-1)$

- $x(n) = (n + 2)^2$

- $x(n) = 2^n n^2$

Ex #2 :

(a) Calculer la T.Z inverse de la fonction suivante utilisant

- La méthode des fractions rationnelles (partial-fraction expansion method).
- La méthode de la série en puissnace (power-series method).
- La méthode de l'inversion de la formule (la méthode des résidus : inversion formula method).

$$H(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

(b) Calculer la T.Z inverse de la fonction suivante utilisant la méthode des fractions rationnelles

$$H(z) = \frac{6-9z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$$

(c) Calculer la T.Z inverse de la fonction suivante utilisant la méthode des résidus

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0.356z^{-2}}$$

(d) Calculer la T.Z inverse de la fonction suivante utilisant la méthode en série de puissance

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

TD#2 :(Filtres numériques RII : gabarits de Butterworth et Chebyshev)

Ex#1 :

On veut concevoir un filtre numérique passe-bas à partir d'un filtre analogique de Butterworth en utilisant la méthode de transformation bilinéaire. Les spécifications du filtre analogique sont les suivantes :

- Une atténuation de 3dB à $\Omega=0.25\pi$
- Une atténuation de 10dB à $\Omega=0.45\pi$

Ex#2 :

On veut concevoir un filtre numérique passe-bas à partir d'un filtre analogique de Butterworth en utilisant la méthode basée sur la méthode de l'invariance impulsionnelle. Les spécifications du filtre analogique sont les suivantes :

- Une atténuation de 1dB à $\Omega=0.25\pi$
- Une atténuation de 10dB à $\Omega=0.45\pi$

Ex#3 :

On veut concevoir un filtre numérique passe-bas à partir d'un filtre analogique de Chebyshev en utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle. Les spécifications du filtre analogique sont les suivantes :

- Une atténuation de 3dB à $\Omega=0.2\pi$
- Une atténuation de 10dB à $\Omega=0.4\pi$

Calculer N, Ω_c et les pôles dont la partie réelle est négative ainsi que la fonction de transfert du filtre analogique et numérique en supposant que les spécifications de la bande passante sont satisfaites.

Ex#4 :

On veut concevoir un filtre numérique passe-bas à partir d'un filtre analogique de Chebyshev en utilisant la méthode basée sur la transformation bilinéaire. Les spécifications du filtre analogique sont les suivantes :

- Une atténuation de 1dB à $\Omega=0.25\pi$
- Une atténuation de 10dB à $\Omega=0.45\pi$

Solutions de la série de TD #2

Ex #1 :

La conception du filtre numérique à partir du gabarit de Butterworth par la méthode de la transformation bilinéaire repose sur les cinq étapes suivantes :

Les spécifications sont : $\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| \geq -3dB, & avec\,\Omega_p = 0.25\pi \\ |H_a(j\Omega_s)| \leq -10dB, & avec\,\Omega_s = 0.45\pi \end{cases}$

(1) Calcul de Ω_c et N :

La méthode de la transformation bilinéaire est basée sur

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega/2}e^{-j\omega/2} - e^{-j\omega/2}e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}e^{-j\omega/2} + e^{-j\omega/2}e^{-j\omega/2}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}$$

Utilisant $\begin{cases} \sin(x) = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ \cos(x) = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \end{cases}$ et avec T=1, on obtient $s = \dfrac{\sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} = 2j\tan(\omega/2)$

Le module du filtre analogique de Butterworth est donné par

$$|H_a(j\Omega)| = \left(1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}\right)^{-1/2}$$

$$20\log_{10}\left(|H_a(j\Omega)|\right) = -10\left(1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}\right)$$

D'après les spécifications désirées du filtre, nous avons

$$\begin{cases} -10\log_{10}\left(1 + (2\tan(\Omega_p/2)/\Omega_c)^{2N}\right) \geq -3 \\ -10\log_{10}\left(1 + (2\tan(\Omega_s/2)/\Omega_c)^{2N}\right) \leq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\tan(\Omega_p/2)/\Omega_c)^{2N} \leq 10^{3/10} - 1 \\ (2\tan(\Omega_s/2)/\Omega_c)^{2N} \geq 10^{10/10} - 1 \end{cases}$$

La solution de ces deux équations donne

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log\left[(10-1)/(10^{0.3}-1)\right]}{\log\left[\tan(0.45\pi/2)/\tan(0.25\pi/2)\right]} = 1.5215$$

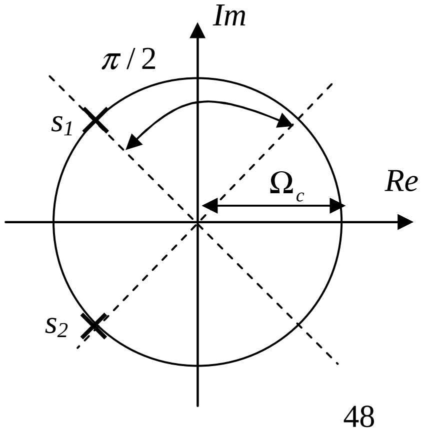
On prend N=2. On considère l'équation qui désigne la 2ème spécification, on trouve

$$\Omega_c = 2\tan(0.45\pi/2)9^{-1/2N} = 0.9862 = 0.3139\,\pi$$

Alors, les spécifications de la bande passante sont dépassées et les spécifications de la bande d'arrêt sont maintenues ou satisfaites.

(2) Calcul des pôles de $H_a(s)$:

On a deux pôles (N=2) à parties réelles négatives dans le cercle ci-contre de rayon $\Omega_c = 0.9862$. On fait des projections sur les deux axes, on obtient



$$\begin{cases} s_1 = \Omega_c(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) \\ s_2 = \Omega_c(\cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \dfrac{\Omega_c}{2}(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) \\ s_2 = \dfrac{\Omega_c}{2}(\sqrt{2} - j\sqrt{2}) \end{cases}$$

(3) Calcul de la F.T analogique $H_a(s)$:

La F.T générale en S est obtenue par

$$H_a(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{-s_k}{(s - s_k)} = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_N)}$$

On a N=2, la F.T devient

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{0.9726}{s^2 + 1.3947s + 0.9726}$$

(4) Calcul de la F.T numérique $H(z)$:

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\Omega_c^2(1+z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})^2 + 2\sqrt{2}\Omega_c(1-z^{-2}) + \Omega_c^2(1+z^{-1})^2} \\ &= \frac{\Omega_c^2 + 2\Omega_c^2 z^{-1} + \Omega_c^2 z^{-2}}{(4 + 2\sqrt{2}\Omega_c + \Omega_c^2) + (2\Omega_c^2 - 8)z^{-1} + (4 - 2\sqrt{2}\Omega_c + \Omega_c^2)z^{-2}} \\ &= \frac{0.9726 + 1.9452z^{-1} + 0.9726z^{-2}}{7.7620 - 6.0548z^{-1} + 2.1832z^{-2}} \\ &= \frac{0.1253 + 0.2506z^{-1} + 0.1253z^{-2}}{1 - 0.7801z^{-1} + 0.2813z^{-2}} \end{aligned}$$

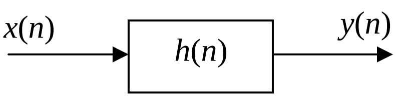
(5) Calcul de la sortie du filtre numérique $y(n)$:

Nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \text{ où } \begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -0.7801 \; et \; a_2 = 0.2813 \\ et \\ b_0 = 0.1253, b_1 = 0.2506 \; et \; b_2 = 0.1253 \end{cases}$$

Utilisant un calculateur, l'algorithme du filtre numérique résultant est finalement donné par

$$y(n) = 0.1253x(n) + 0.2506x(n-1) + 0.1253x(n-2) + 0.7801y(n-1) - 0.2813y(n-2)$$



<u>Ex #2 :</u>

La conception du filtre numérique à partir du gabarit de Butterworth par la méthode de l'invariance impulsionnelle repose sur les 5 étapes suivantes :

Les spécifications sont : $\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| \geq -1dB, & avec\,\Omega_p = 0.25\pi \\ |H_a(j\Omega_s)| \leq -10dB, & avec\,\Omega_s = 0.45\pi \end{cases}$

(1) Calcul de Ω_c et *N* :

D'après les spécifications désirées du filtre, nous avons

$$\begin{cases} -10\log_{10}\left(1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}\right) \geq -1 \\ -10\log_{10}\left(1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}\right) \leq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\left(\dfrac{0.25\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1/10} \\ 1+\left(\dfrac{0.45\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{10/10} \end{cases}$$

La solution de ces équations mène à

$$\begin{cases} N = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log\left[(10-1)/(10^{1/10}-1)\right]}{\log((0.45\pi)/(0.25\pi))} \geq 3.0185 \\ \Omega_c = 0.45\pi 9^{-1/2N} = 0.9824 = 0.3127\pi \end{cases}$$

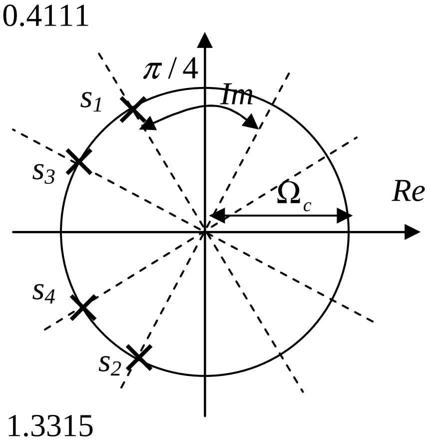
Cependant, on doit prendre une valeur entière de *N*. D'où

$\begin{cases} N = 4 \\ \Omega_c = 0.45\pi 9^{-1/2N} = 1.0742 = 0.3419\pi \end{cases}$ $\Rightarrow$ Les spécifications de la bande passante sont dépassées et la spécifications de la bande d'arrêt sont satisfaites.

(2) Calcul des pôles de $H_a(s)$:

On a 4 pôles car *N*=4 à parties réelles négatives espacés d'un angle de $\pi/4$ et de rayon $\Omega_c = 1.0742$ comme montré dans le cercle ci-dessous. On fait des projections sur les deux axes, on obtient

$$\begin{cases} s_{1,2} = -\Omega_c(\cos(3\pi/8) \pm j\sin(3\pi/8)) \\ s_{3,4} = -\Omega_c(\cos(\pi/8) \pm j\sin(\pi/8)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -0.4111 \pm j0.9924 \\ s_{3,4} = -0.9924 \pm j0.4111 \end{cases}$$



3) Calcul de la F.T analogique $H_a(s)$:

La F.T générale en S est obtenue par

$$H_a(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{-s_k}{(s-s_k)} = \frac{\Omega_c^N}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_N)}$$

On a *N*=4, la F.T devient

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^4}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)} = \frac{1.3315}{(s^2+0.8222s+1.1539)(s^2+1.9848s+1.1539)}$$

En simplifiant, on trouve

$$H_a(s) = \frac{1.3315}{s^4 + 2.8070s^3 + 3.9397s^2 + 3.2390s + 1.3315}$$

Maintenant, on doit exprimer $H_a(s)$ en une somme de fractions (partial fraction expansion).

$$H_a(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} + k(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} = \left(\frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3} + \frac{A_4}{s - p_4} \right)$$

On utilise la commande Matlab suivante, on obtient

```
>> b = [1.3315];
>>a = [1 -2.8070 3.9397 -3.2390 1.3315];
>> [r,p,k] = residue(b,a),
```

$$\begin{cases} A_1 = \left.\dfrac{1.3315}{(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}\right|_{s=s_1} = 0.4963 - j1.1978 \\ A_2 = \left.\dfrac{1.3315}{(s-s_1)(s-s_3)(s-s_4)}\right|_{s=s_2} = 0.4963 + j1.1978 \\ A_3 = \left.\dfrac{1.3315}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_4)}\right|_{s=s_3} = -0.4963 + j0.2056 \\ A_4 = \left.\dfrac{1.3315}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\right|_{s=s_4} = -0.4963 - j0.2056 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_1 = -0.9924 + j0.4111 \\ p_2 = -0.9924 - j0.4111 \\ p_3 = -0.4111 + j0.9924 \\ p_4 = -0.4111 - j0.9924 \end{cases}$$

(4) Calcul de la F.T numérique *H(z)* :

H(z) est obtenue directement par la méthode de l'invariance impulsionnelle comme

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{0.4963 - j1.1978}{1 - e^{-0.9924 + j0.4111} z^{-1}} + \frac{0.4963 + j1.1978}{1 - e^{-0.9924 - j0.4111} z^{-1}} +$$

$$\frac{-0.4963 + j0.2056}{1 - e^{-0.4111 + j0.9924} z^{-1}} + \frac{-0.4963 - j0.2056}{1 - e^{-0.4111 - j0.9924} z^{-1}}$$

$$= \frac{0.6810 - 1.1424z^{-1} + 0.2310z^{-2}}{1 - 0.6796z^{-1} + 0.1374z^{-2}} + \frac{0.2886 - 0.2092z^{-1} + 0.1268z^{-2}}{1 - 0.7248z^{-1} + 0.4395z^{-2}}$$

Après simplification, on obtient (i.e., la commande Matlab u=[], v=[], conv(u,v),)

$$H(z) = \frac{0.9696 - 2.0413z^{-1} + 1.6669z^{-2} - 0.7844z^{-3} + 0.1189z^{-4}}{1 - 1.4044z^{-1} + 1.0695z^{-2} - 0.3983z^{-3} + 0.0604z^{-4}}$$

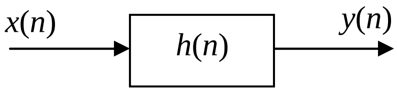
(5) Calcul de la sortie du filtre numérique *y*(*n*) :

A partir de l'équation précédente avec a_0=1, la sortie du filtre est donné par

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3) + b_4 x(n-4)$$
$$- a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + a_3 y(n-3) + a_4 y(n-4)$$

Utilisant un calculateur, l'algorithme du filtre numérique résultant est finalement donné par

$$y(n) = 0.9696\, x(n) + \text{-}2.0413 x(n-1) + 1.6669 x(n-2) + 0.7844 x(n-3) + 0.1189 x(n-4)$$
$$+ 1.4044 y(n-1) - 1.0695 y(n-2) + 0.3983 y(n-3) - 0.0604 y(n-4)$$



Ex #3 :

La conception du filtre numérique à partir du gabarit de Chebyshev par la méthode de la l'invariance impulsionnelle repose sur les cinq étapes suivantes :

Les spécifications sont : $\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| \geq -3dB, & avec\, \Omega_p = 0.2\pi \\ |H_a(j\Omega_s)| \leq -10dB, & avec\, \Omega_s = 0.4\pi \end{cases}$

(1)Calcul de Ω_c, ε et N :

D'après le filtre analogique de Chebyshed, on peut écrire

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$\begin{cases} 20\log_{10}\left(|H_a(j\Omega_p)|\right) \geq = -3 \\ 20\log_{10}\left(|H_a(j\Omega_s)|\right) \leq -10 \end{cases}$$

Pour calculer ε, on considère $\Omega = 0$ ce qui donne

$-20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cosh^2(N.0)}\right) \geq = -3$, on sait que $\cosh^2(N.0) = 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{3/10} - 1$=0.9976

Pour assurer les spécifications de la bande passante, on doit prendre $\Omega_c = \Omega_p$=0.6283.

Maintenant, pour calculer N, on utilise le système d'équations suivant. D'où

$$\begin{cases} \varepsilon^2 = 10^{3/10} - 1 \\ \varepsilon^2 \cosh^2\left(N \cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)\right) \geq 10^{10/10} - 1 \end{cases}$$

On obtient

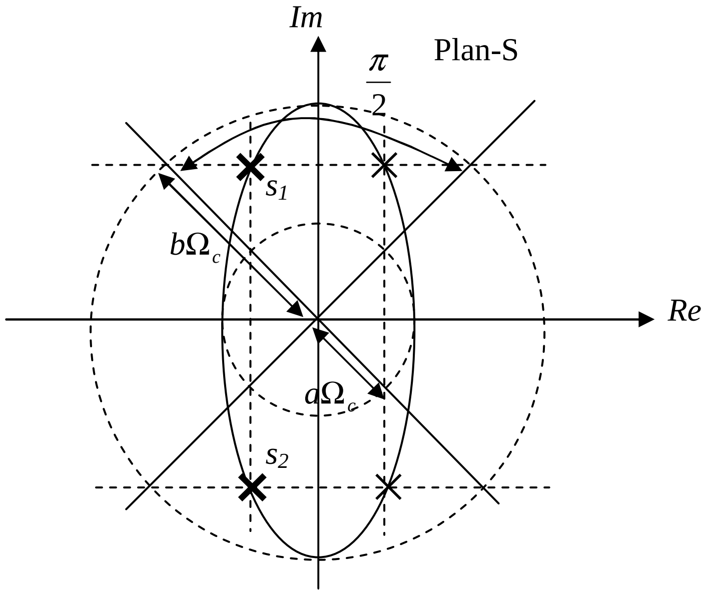
$$\cosh\left(N \cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)\right) \geq \sqrt{\frac{10^{10/10} - 1}{10^{0.3} - 1}} \Rightarrow N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{(10-1)/(10^{0.3}-1)}\right)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} \geq 1.3404$$

On prend N=2. Alors les paramètres du filtre sont

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.9976 \\ \Omega_c = 0.6283 \\ N = 2 \end{cases}$$

(2) Calcul des pôles de $H_a(s)$:

On a 2 pôles car N=2 à parties réelles négatives espacés d'un angle de $\pi/2$ sur une ellipse de rayons mineur et majeur.



$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1+\varepsilon^{-2}} = 2.4183 \\ a = \frac{1}{2}\left(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}\right) = 0.4560 \\ b = \frac{1}{2}\left(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}\right) = 1.0991 \end{cases}$$

Les projections sur les deux axes sont :

$$s_{1,2} = -a\Omega_c \cos(\pi/4) \pm jb\Omega_c \sin(\pi/4)) \\ = -0.2026 \pm j0.4883$$

3) Calcul de la F.T analogique $H_a(s)$:

La F.T générale en S est obtenue par

$$H_a(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \prod_{k=1}^{N} \frac{-s_k}{s-s_k}, & N \ pair \\ \prod_{k=1}^{N} \frac{-s_k}{s-s_k} & N \ impair \end{cases}$$

Dans notre cas, N=2, alors la F.T devient $H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \prod_{k=1}^{2} \frac{-s_k}{s-s_k} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \frac{s_1 s_2}{(s-s_1)(s-s_2)}$

$$H_a(s) = \frac{0.2795}{(s^2 + 0.4052s + 0.2795)}$$?

Maintenant, on doit exprimer $H_a(s)$ en une somme de fractions (partial fraction expansion).

$$H_a(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + k(s)$$

On obtient

$$\begin{cases} A_1 = \left.\frac{0.2795}{(s-s_2)}\right|_{s=s_1} = -j0.2862 \\ A_2 = \left.\frac{0.2795}{(s-s_1)}\right|_{s=s_2} = j0.2862 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_1 = -0.2026 + j0.4883 \\ p_2 = -0.2026 - j0.4883 \end{cases}$$

$$H_a(s) = \frac{-j0.2862}{s+0.2026 - j0.4883} + \frac{j0.2862}{s+0.2026 + j0.4883} + k(s)$$

(4) Calcul de la F.T numérique $H(z)$:

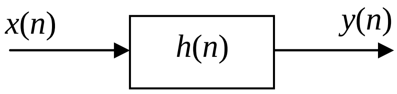
$H(z)$ est obtenue directement par la méthode de l'invariance impulsionnelle comme suit

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}=\frac{-j0.2862}{1-e^{-0.2026+j0.4883}z^{-1}}+\frac{j0.2862}{1-e^{-0.2026-j0.4883}z^{-1}}$$
$$=\frac{-0.2165z^{-1}}{1-1.4423z^{-1}+0.6668z^{-2}}$$

(5) Calcul de la sortie du filtre numérique *y*(*n*) :

A partir de l'équation précédente avec a_0=1, la sortie du filtre est donné par

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n)+b_1x(n-1)-a_1y(n-1)+a_2y(n-2) \\ &= -0.2165x(n-1)+1.4423y(n-1)-0.6668y(n-2) \end{aligned}$$



Ex #4 : (devoir)

TD#3 :(Filtres numériques RIF : méthode de fenêtrage)

Ex #1 :

Calculer la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas RIF (Fig. 1) à phase linéaire avec les hypothèses suivantes :

N=8, ω_c=0.25π et l'utilisation de la fenêtre de Hamming ci-dessous

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \le n < N-1$$

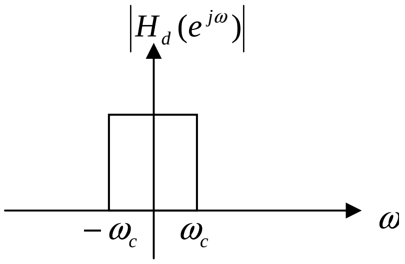


Fig. 1 : *Filtre passe-bas RIF*

Ex #2 :

On veut aussi concevoir un filtre passe bas RIF à phase linéaire (Fig. 1) mais avec l'utilisation de la fenêtre de Hanning avec

N= 7, ω_c=0.2π

1) Calculer les coefficients de la réponse impulsionnelle.

2) Calculer la phase et l'amplitude de la réponse fréquentielle.

Ex #3 :

On veut concevoir un filtre passe-bande RIF (Fig. 2) à phase linéaire en utilisant la fenêtre de Hamming avec

N= 7, ω_c1=0.2π et ω_c2=0.4π

1) Calculer les coefficients de la réponse impulsionnelle.

2) Calculer la phase et l'amplitude de la réponse fréquentielle.

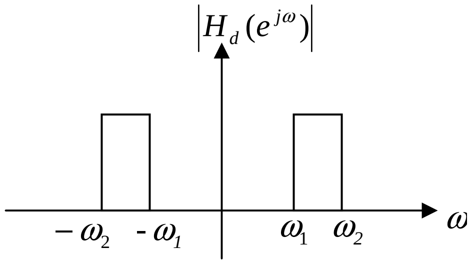


Fig. 2 : *Filtre passe-bande RIF*

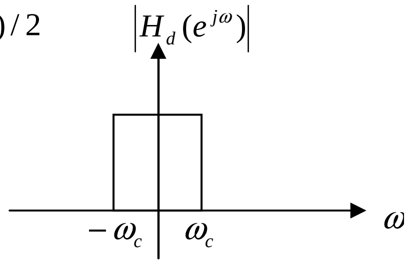
Solutions de la série de _TD #3_

Ex #1 :

La méthode fenêtrage d'un filtre passe-bas RIF est comme suit

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega. = \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \quad \text{avec} \quad \alpha = (N-1)/2$$



La fenêtre de Hamming s'écrit par

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

La réponse impulsionnelle est donnée par

$$h(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\pi(n-(N-1)/2)}\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], \; n=0, \ldots, N\text{-}1$$

A.N

N=8; n=0:7;

h=(0.54-0.46*cos(2*pi*n./(N-1))).*sin(0.25*pi*(n-(N-1)/2))./(pi*(n-(N-1)/2))

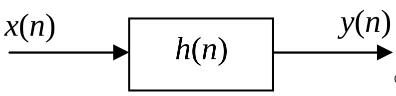
$h(n)$=[0.0028 0.0298 0.1259 0.2325 0.2325 0.1259 0.0298 0.0028] ;

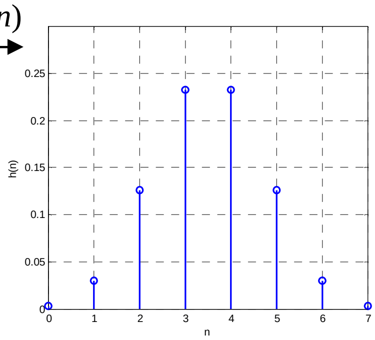
On remarque que $h(n)$ est symétrique par rapport à $(N\text{-}1)/2$. la F.T en Z du filtre RIF est

$$H(z) = 0.0028 + 0.0298z^{-1} + 0.1259z^{-2} + 0.2325z^{-3} + 0.2325z^{-4} + 0.1259z^{-5} + 0.0298z^{-6} + 0.0028z^{-7}$$

Alors la sortie du filtre devient

$$y(n) = 0.0028x(n) + 0.0298x(n-1) + 0.1259x(n-2) + 0.2325x(n-3) + 0.2325x(n-4) + 0.1259x(n-5) + 0.0298x(n-6) + 0.0028x(n-7)$$





Ex #2 :

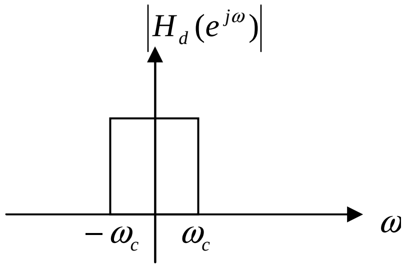
1) Coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre RIF passe-bas :

Utilisant la fenêtre de Hannig, la conception du filtre RIF passe-bas est obtenue par le calcul de

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

où

$$\begin{cases} h_d(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega = \dfrac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \\ w(n) = 0.5\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right] \end{cases}$$ avec $\alpha = (N-1)/2$ et n=0, …, N-1



On sait que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, alors

$$\frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\pi(n-(N-1)/2)} = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\omega_c(n-(N-1)/2)}$$

En posant $x = \omega_c(n-(N-1)/2) \Rightarrow \dfrac{\omega_c}{\pi}\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\omega_c}{\pi}$

D'où

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\pi(n-(N-1)/2)} 0.5\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n \neq \alpha \\ 0.5\dfrac{\omega_c}{\pi}\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n = \alpha \end{cases}$$

<u>A.N</u>

Pour $\omega_c = 0.2\pi$ et N=7, on trouve

$h(n)$=[0 0.0378 0.1403 0.2000 0.1403 0.0378 0]

et

$$H(z) = 0.0378z^{-1} + 0.1403z^{-2} + 0.2z^{-3} + 0.1403z^{-4} + 0.0378z^{-5}$$

```
N=7; n=0:6;
h=0.5*(1-cos(2*pi*n./(N-1))).*sin(0.2*pi*(n-(N-1)/2))./(pi*(n-(N-1)/2))
```

2) L'amplitude et la phase du filtre :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 0.0378e^{-j\omega} + 0.1403e^{-j2\omega} + 0.2e^{-j3\omega} + 0.1403e^{-j4\omega} + 0.0378e^{-j5\omega} \\ &= e^{-j3\omega}\left(0.0378e^{j2\omega} + 0.1403e^{j\omega} + 0.2 + 0.1403e^{-j\omega} + 0.0378e^{-j2\omega}\right) \\ &= e^{-j3\omega}\left(0.2 + 0.0378(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + 0.1403(e^{j\omega} + e^{-j\omega})\right) \end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) = \left(0.2 + 0.0756\cos(2\omega) + 0.2806\cos(\omega)\right)e^{j(-3\omega)}$$

- On remarque que la phase est linéaire par rapport à ω, $\varphi = -3\omega$

- L'amplitude est non-linéaire par rapport à ω,

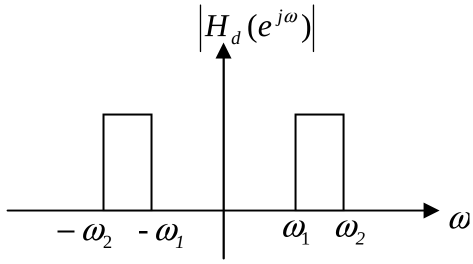
$$|H(e^{j\omega})| = 0.2 + 0.0756\cos(2\omega) + 0.2806\cos(\omega)$$

Ex #3 :

1) Coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bande:

Utilisant la fenêtre de Hammig, la conception du filtre RIF passe-bande est obtenue par le calcul de

$h(n) = h_d(n)w(n)$



où

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right]$$
$$= \frac{\sin(\omega_2(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin(\omega_1(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

Avec $w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$, on obtient

$$h(n) = \begin{cases} \left[\frac{\sin(\omega_2(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin(\omega_1(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}\right]\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n \neq \alpha \\ \left(\frac{\omega_2}{\pi} - \frac{\omega_1}{\pi}\right)\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n = \alpha \end{cases}$$

A.N

Pour N= 7, ω_1=0.2π et ω_2=0.4π, on obtient

$h(n)$=[-0.0131 -0.0179 0.0890 0.2 0.0890 -0.0179 -0.0131]

et

$$H(z) = -0.0131 \quad - 0.0179z^{-1} + 0.0890z^{-2} + 0.2z^{-3} + -0.0179z^{-4} + 0.0890z^{-5} - 0.0131z^{-6}$$

```
N=7; n=0:6;
h=(0.54-0.46*cos(2*pi*n./(N-1))).*(sin(0.4*pi*(n-(N-1)/2))./(pi*(n-(N-1)/2))-sin(0.2*pi*(n-(N-1)/2))./(pi*(n-(N-1)/2)))
```

2) L'amplitude et la phase du filtre:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega} + b_3e^{-j3\omega} + b_4e^{-j4\omega} + b_5e^{-j5\omega} + b_6e^{-j6\omega}$$
$$= e^{-j3\omega}\left(b_0e^{j3\omega} + b_1e^{j2\omega} + b_2e^{j\omega} + b_3 + b_4e^{-j\omega} + b_5e^{-j2\omega} + b_6e^{-j3\omega}\right)$$

On $b_0 = b_6$, $b_1 = b_5$ et $b_2 = b_4$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(0.2 - 0.0262\cos(3\omega) + -0.0358_1\cos(2\omega) + 0.1780\cos(\omega)\right)$$

- Il est bien remarqué que la phase est linéaire ($\varphi = -3\omega$) et l'amplitude est non linéaire

$$|H(e^{j\omega})| = 0.2 - 0.0262\cos(3\omega) + -0.0358\cos(2\omega) + 0.1780\cos(\omega)$$

TD #4 : (Processus stochastique : Espérances et fonctions d'autocorrélations)

Ex #1 :

En considérant la variable aléatoire $X(t)$ définie par $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$

Où A et ω_0 sont des constants et Θ est une variable aléatoire de densité de probabilité

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}, & |\theta| \le \dfrac{\pi}{8} \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

a) Trouver la moyenne, $E[X(t)]$ et la fonction d'autocorrélation, $R_{xx}(t_1,t_2)$

b) Ce processus est-il stationnaire ?

Ex #2 :

Prenant le processus $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$ avec A et ω_0 sont des constants et Θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,2\pi]$. Si le processus aléatoire $Y(t)=X^2(t)$.

a) Trouver la fonction d'autocorrélation, $R_{yy}(t_1,t_2)$

b) Est-il stationnaire ?

Ex #3 :

On considère le processus aléatoire définie par $X(t) = Ae^{j(\omega t+\Theta)}$ où A est une variable aléatoire distribuée par

$$f_A(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & a \ge 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

σ^2 est constant et Θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,2\pi]$. A et Θ sont statistiquement indépendants.

a) Déterminer la fonction moyenne, $E[X(t)]$

b) Déterminer la fonction d'autocorrélation, $R_{xx}(t_1,t_2)$

Ex #4 :

Prenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus stochastiques indépendants avec

$$\begin{cases} R_{xx}(\tau) = 2e^{-2|\tau|}\cos\omega\tau \\ R_{yy}(\tau) = 9 + e^{-3|\tau|} \end{cases}$$

On définie $Z(t)$=A $X(t)Y(t)$ avec A est une v.a de moyenne 2 et de variance 9.

a) Déterminer la fonction d'autocorrélation, $R_{zz}(\tau)$

b) Déterminer la moyenne, $E[Z(t)]$ et la variance, $\sigma_z^2 = E[Z^2(t)] - E[Z(t)]^2$

Solutions de la série de *TD #4*

Ex #1 :

a) *E*[*X*(*t*)] et *R*xx(*t*1,*t*2)= ?

$$E[X(t)] = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} X(t) f_\Theta(\theta) d\theta = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} A\cos(\omega_0 t + \theta)\frac{4}{\pi} d\theta$$
$$= \frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t + \pi/8) - \sin(\omega_0 t - \pi/8)\right]$$

On a : $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

Alors

$$E[X(t)] = \frac{8A}{\pi}\cos(\omega_0 t)\sin(\pi/8)$$

$$R_{xx}(t+\tau,t) = E[X(T+\tau)X(t)]$$
$$= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} A^2\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\cos(\omega_0 t + \theta)\frac{4}{\pi} d\theta$$

On a : $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

alors

$$R_{xx}(t+\tau,t) = \frac{2A^2}{\pi}\int_{-\pi/8}^{\pi/8}\left[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta) + \cos(\omega_0\tau)\right]d\theta$$
$$= \frac{2A^2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)\Big|_{-\pi/8}^{\pi/8} + \frac{\pi}{4}\cos(\omega_0\tau)\right]$$

On applique la transformation ci-dessus, on obtient

$$R_{xx}(t+\tau,t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{2A^2}{\pi}\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\sin(\pi/4)$$

b) Le processus aléatoire *X*(*t*) est non stationnaire car $E[X(t)]$ et $R_{xx}(t+\tau,t)$ sont en fonction du temps *t*.

Ex #2 :

a) *R*yy(*t*1,*t*2)= ?

$$R_{yy}(t+\tau,t) = E\left[Y(t+\tau)Y(t)\right] = E\left[X^2(t+\tau)X^2(t)\right]$$
$$= E\left[A^4\cos^2(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\cos^2(\omega_0 t + \theta)\right]$$

On utilise la transformation trigonométrique

$$R_{yy}(t+\tau,t) = A^4 E\left[\frac{1+\cos(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\theta)}{2}.\frac{1+\cos(2\omega_0 t+2\theta)}{2}\right]$$

$$= \frac{A^4}{4}E[1+\cos(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\theta)+\cos(2\omega_0 t+2\theta)+$$
$$\cos(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\theta)\cos(2\omega_0 t+2\theta)]$$

On utilise $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$$R_{yy}(t+\tau,t) = \frac{A^4}{4}+\frac{A^4}{8}E[\cos(4\omega_0 t+2\omega_0\tau+4\theta)+\cos(2\omega_0\tau)]$$
$$= \frac{A^4}{4}+\frac{A^4}{8}\cos(2\omega_0\tau)$$

b) ***E*[*Y(t)*]= ?**

$$E[Y(t)] = E[X^2(t)] = E[A^2 cos^2(\omega_0 t+\theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}E[\cos(2\omega_0 t+2\theta)] = \frac{A^2}{2}$$

Le processus $Y(t)$ est stationnaire au sens large.

<u>Ex #3:</u>

Nous avons

$$X(t) = Ae^{j(\omega t+\Theta)}, \quad f_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & a \ge 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases} \quad \text{et} \quad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0<\theta<2\pi \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

a) ***E*[*X(t)*]= ?**

$$E[X(t)] = E[Ae^{j(\omega t+\Theta)}] = E[A]E[e^{j(\omega t+\Theta)}]$$

$$E[A] = \int_0^{+\infty}\frac{a^2}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da = \sqrt{2}\sigma\Gamma(3/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E[e^{j(\omega t+\Theta)}] = e^{j\omega t}E[e^{j\Theta}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{j\Theta}d\theta = 0$$

On obtient

$$E[X(t)] = 0$$

b) ***R*** $\boldsymbol{R_{xx}(t_1,t_2)}$ **= ?**

$$R_{xx}(t+\tau,t) = E[X(t+\tau)X^*(t)]$$
$$= E[A^2 e^{j(\omega t+\omega\tau+\Theta)}e^{-j(\omega t+\Theta)}]$$
$$= E[A^2]E[e^{j\omega\tau}]$$

$$E[A^2] = \int_0^{+\infty} \frac{a^3}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} da = 2\sigma^2$$ (On a utilisé l'intégration par partie)

$$R_{xx}(\tau) = 2\sigma^2 e^{j\omega\tau}$$

Alors $X(t)$ est stationnaire au sens large

Ex #4 :

On a $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus aléatoires indépendants

$$R_{xx}(\tau) = 2e^{-2|\tau|} \cos \omega\tau$$

$$R_{yy}(\tau) = 9 + e^{-3|\tau|}$$

On définie le processus $Z(t)$=A$X(t)Y(t)$ avec A est une v.a de moyenne 2 et de variance 9.

a) $R_{zz}(t_1,t_2)$= ?

$$\begin{aligned} R_{zz}(t+\tau, t) &= E[Z(t+\tau)Z(t)] \\ &= E[A^2 X(t+\tau)Y(t+\tau)X(t)Y(t)] \\ &= E[A^2]R_{xx}(\tau)R_{yy}(\tau) \end{aligned}$$

On a

$$\sigma_a^2 = E[(A - E[A])^2] = E[A^2] - E[A]^2$$

$$E[A^2] = \sigma_a^2 + E[A]^2 = 9 + 4 = 13$$

Alors

$$R_{zz}(\tau) = 26e^{-2|\tau|}(9 + e^{-3|\tau|})\cos\omega\tau$$

b) $E[Z(t)]$ et σ_z^2 = ?

D'après la propriété, nous avons

$$\lim_{\tau \to +\infty} R_{zz}(\tau) = |E[Z(t)]|^2$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} R_{zz}(\tau) = \lim_{\tau \to +\infty} 26e^{-2|\tau|}(9 + e^{-3|\tau|})\cos\omega\tau = 0$$?

$$|E[Z(t)]|^2 = 0 \Rightarrow E[Z(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E[Z^2(t)] - E[Z(t)]^2 \\ &= R_{zz}(0) - 0 \\ &= 260 \end{aligned}$$

TD #5 : (Processus stochastique : Ergodicité et densité spectrale de puissance)

Ex #1 :

En considérant le processus aléatoire $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$. A et f_c sont constants et Θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\left[-\dfrac{\pi}{8}\ \dfrac{\pi}{8}\right]$

a) Est-il ergodique dans la moyenne

b) Est-il ergodique dans l'autocorrélation

Ex #2 :

Pour un processus stochastique $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$ avec $f_\Theta(\theta) = 1/2\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$

A et ω_0 sont des constants.

a) Déterminer la densité spectrale de puissance

Ex #3 :

Un processus aléatoire (bruit blanc) avec une fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ est appliqué à un filtre de réponse impulsionnelle

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \text{ et } \alpha > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

a) Déterminer la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$ du processus de sortie utilisant

b) Déterminer ainsi la fonction d'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$.

Ex #4 :

En considérant le processus $Y(t)=X(t-T)$, où $X(t)$ est un processus réel stationnaire au sens large avec la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ et la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$. T est constant.

a) Exprimer $S_{xy}(f)$ du processus $Y(t)$ en fonction de $S_{xx}(f)$.

Ex #5 :

Prenant un processus aléatoire $N(t)$ avec une densité spectrale de puissance $S_{nn}(f) = rect(f)$ est appliqué au système linéaire avec décalage. $y(t) = N(t) + N(t-1)$

a) Déterminer $h(t)$ et $H(f)$ de la réponse impulsionnelle

b) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$

Solutions de la série de *TD #5*

Ex #1 :?