Théorie des Jeux

Bruno Ziliotto [1]

Polycopié de cours

1. Email : `ziliotto@math.cnrs.fr`

Ces notes sont largement inspirées des notes de cours respectives de Marie Laclau, Olivier Gossner, Frédéric Koessler et Rida Laraki.

Quelques références pour compléter ce cours :

- Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton : Princeton University Press, 1992.
- Fudenberg et Tirole : *Game Theory*, MIT Press, 1991.
- Laraki, Renault, Sorin : *Bases mathématiques de la Théorie des Jeux*, Editions de l'E. Polytechnique, 2013.
- Myerson, R. B. *Game Theory, Analysis of Conflict.* Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 1991.
- Osborne, M.J. *An Introduction to Game Theory.* Oxford : Oxford University Press, 1994.
- Osborne, M.J. & Rubinstein, A. *A Course in Game Theory.* Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 1994.

Table des matières

Chapitre 1. Jeux sous forme normale I : stratégies pures 5

1. Description d'un jeu sous forme normale 5
2. Stratégies dominantes et dominées 9
3. Équilibre de Nash 13
4. Application : Enchères de Vickrey 17

Chapitre 2. Jeux sous forme normale II : stratégies mixtes et jeux à somme nulle 21

1. Définitions 21
2. Propriétés de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes 24
3. Jeux à deux joueurs 32

Chapitre 3. Jeux sous forme extensive 35

1. Exemples préliminaires 35
2. Définitions 37
3. Induction en amont et équilibre sous-jeu parfait 44

Chapitre 4. Équilibres corrélés 47

1. Deux exemples 47
2. Formalisme 49

Chapitre 5. Jeux répétés 55

1. Le modèle 56
2. Jeux répétés un grand nombre de fois 61

Chapitre 1

Jeux sous forme normale I : stratégies pures

La forme normale est une manière standard de décrire formellement un jeu, en spécifiant pour chaque joueur son ensemble de stratégies et sa fonction de paiement. Dans ce chapitre et le suivant, on supposera que les joueurs connaissent la description exacte du jeu.
On distinguera deux types de stratégies : les stratégies *pures*, et les stratégies *mixtes*. Les stratégies pures spécifient pour chaque situation donnée une décision bien déterminée, alors que les stratégies mixtes peuvent intégrer des choix aléatoires. Dans ce chapitre, on se restreindra aux stratégies pures ; aussi, pour éviter une certaine lourdeur d'écriture, nous parlerons simplement de "stratégies" plutôt que de "stratégies pures". Dans le deuxième chapitre, nous étendrons les concepts abordés aux stratégies mixtes, et nous ferons alors la distinction entre stratégies pures et stratégies mixtes.

1. Description d'un jeu sous forme normale

Définition 1. *Un jeu sous forme normale est donné par :*
- *Un nombre fini de joueurs N ;*
- *Un ensemble de stratégies (dites pures, ou actions) S_i pour chaque joueur $i \in [|1, N|]$;*
- *Une fonction de paiement g_i: $\prod_{j=1}^{N} S_j \to \mathbb{R}$ pour chaque joueur $i \in [|1, N|]$.*

Interprétation : chaque joueur i joue une fois, et indépendamment des autres, en choisissant une stratégie $s_i \in S_i$ dans son ensemble de stratégies. Il reçoit ensuite le paiement $g_i(s_1, s_2, ..., s_N)$.

Chaque joueur cherche à maximiser son paiement. La question principale que l'on étudiera et la suivante : si les joueurs sont rationnels, quelles stratégies vont-ils le plus probablement choisir ? C'est une question difficile, car il ne s'agit pas d'un problème standard d'optimisation : le paiement d'un joueur ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui des autres. Aussi, il n'est pas évident de déterminer le choix le plus rationnel.
Notons que le paiement ne représente pas forcément une somme d'argent, comme nous le verrons dans les exemples à suivre. Le paiement représente simplement les préférences des joueurs sur les issues possibles du jeu.
Dans ce chapitre, nous ne considérons que des jeux statiques (joués une seule fois)

et à information complète (les joueurs connaissent les paiements et stratégies disponibles des autres joueurs).

EXEMPLE 1. *Amanda et Bertrand veulent se rencontrer à Champs-sur-Marne, mais n'ont pas décidé d'un lieu de rendez-vous. Ils peuvent chacun se rendre soit à l'ENPC, soit au Château.*

Le but de chacun est de rencontrer l'autre, peu importe où. Les préférences de chacun sur le lieu où aller dépendent donc de ce que fait l'autre, et sont représentées par la fonction de paiement, que chacun cherche à maximiser.

On peut donc décrire la situation par les éléments suivants :

— *2 joueurs, Amanda et Bertrand ;*
— *2 décisions possibles pour chacun d'entre eux, ENPC ou Château,* (E, C) *;*
— *le paiement de chaque joueur est une fonction de son propre choix ainsi que de celui de l'autre joueur.*

Formellement :

— *N=2,*
— *Joueur 1=Amanda, Joueur 2=Bertrand*
— $S_1 = S_2 = \{E, C\}$ *;*
— $S_1 \times S_2 = \{(E,C), (E,E), (C,C), (C,E)\}$ *;*
— $g_i(s_1, s_2) = 1$ *si* $s_1 = s_2$, 0 *sinon.*

On représente le jeu par la matrice ci-dessous : Amanda choisit la ligne, et Bertrand choisit la colonne. Chaque case représente le paiement d'Amanda, suivi de celui de Bertrand. Par exemple, si Amanda choisit la première ligne E, et Bertrand la première colonne E, alors Amanda obtient 1, et Bertrand obtient 1.

	E	C
E	$1,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,1$

Ainsi, on peut distinguer deux types de situations : Amanda et Bertand se rencontrent, auquel cas ils sont tous les deux satisfaits, ce qui correspond aux profils de stratégies (E, E) *et* (C, C) *; dans le cas contraire, ils ne sont pas satisfaits, ce qui correspond aux profils de stratégies* (E, C) *et* (C, E)*. On a choisi d'attribuer un paiement 1 dans le premier type de situation, et 0 dans le deuxième type. On aurait tout aussi bien pu mettre 2 et 1, ou 10 et 0 ! Ce qui est important, c'est que la fonction de paiement respecte la hiérarchie des préférences des joueurs.*

Nous passons maintenant en revue quelques jeux ou classes de jeux particulièrement importantes.

1.1. Jeux à intérêts communs. Ce sont des jeux dans lesquels tous les joueurs ont les mêmes intérêts, ou préférences. On a donc $g_i = g_j$ pour tous joueurs i, j.

Par exemple, le jeu de rendez-vous à Champs-sur-Marne fait partie de cette catégorie.

1.2. Jeux à somme nulle. Ce sont des jeux à deux joueurs dans lesquels les intérêts sont parfaitement antagonistes. Ces jeux sont à l'opposé des jeux à intérêts communs. Ce qui est gagné par un joueur est perdu par l'autre. La somme des fonctions d'utilité est donc 0, autrement dit $g_2 = -g_1$.

EXEMPLE 2. *Jeu du Penalty. Le gardien (=Joueur 1) choisit un côté où plonger, Gauche (G) ou Droite (D), et le tireur (=Joueur 2) choisit un côté où tirer, Gauche (G) ou Droite (D). Le but du gardien est d'arrêter le penalty, le but du joueur est de le marquer.*

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

1.3. La bataille des sexes. Certains jeux font intervenir une part de coordination et une part de conflit entre les agents. C'est le cas du jeu de la bataille des sexes suivant.

EXEMPLE 3. *Un couple veut décider d'une sortie. L'homme (=Joueur 2) préfère aller à l'opéra (O), et la femme (=Joueur 1) préfère assister à un match de foot (F).*
Pour chacun, être avec l'autre est plus important que le lieu.

	F	O
F	$2, 1$	$0, 0$
O	$0, 0$	$1, 2$

1.4. La fureur de vivre. Deux adolescents en voiture foncent l'un vers l'autre sur une route étroite. Personne ne veut sortir de la route. Si les deux sortent, aucun n'est vraiment satisfait, ni mécontent. Les choix pour chacun sont F (faucon, rester sur la route), ou C (colombe, sortir de la route).

	F	C
F	$-1, -1$	$10, 0$
C	$0, 10$	$5, 5$

1.5. Dilemme du prisonnier. Deux prisonniers complices sont interrogés séparément. Chacun peut trahir son partenaire en le dénonçant (D), ou bien coopérer en restant silencieux (C). Si les deux trahissent, ils vont en prison pour 5 ans chacun. Si l'un trahit et pas l'autre, celui qui trahit sort libre et l'autre va en prison pour 10 ans. Si personne ne trahit, ils vont en prison pour 3 ans tous les deux.

	C	D
C	$-3, -3$	$-10, 0$
D	$0, -10$	$-5, -5$

Le jeu du dilemme du prisonnier est un exemple fondamental en économie. Ce jeu est important car il fait ressortir une tension entre l'intérêt individuel et l'intérêt collectif. De nombreuses situations présentent une structure similaire à celle du dilemme du prisonnier :

— Achat par internet. Un acheteur et un vendeur se sont mis d'accord sur internet. Chacun a le choix entre envoyer le colis (ou bien l'argent), et ne pas l'envoyer. Chacun préfère que l'autre l'envoie et préférerait ne pas envoyer sa part. Cependant, les deux sont plus satisfaits si chacun respecte sa part du contrat plutôt que si aucun ne le fait.

— Course aux armements. Chaque pays peut décider de s'armer, ou non. L'intérêt des deux pays est qu'aucun ne dépense de ressources pour s'armer, mais à stratégie fixée de l'autre, chacun préfère s'armer.

— Achat d'un 4x4. Un 4x4 est avantageux pour celui qui l'a car on peut impressionner les autres voitures, et on se sent plus en sécurité. Mais ceci est au détriment des autres voitures.

— Collusion et la commission européenne. La commission européenne cherche à lutter contre les ententes secrètes des industries. Le problème étant que personne ne veut dénoncer ces ententes. La règle est que celui qui dénonce une entente ne se verra pas poursuivi. Chacun a donc intérêt à dénoncer plutôt qu'à être dénoncé.

— Vote. La probabilité que le vote d'un électeur fasse basculer l'élection présidentielle est presque nulle. Dans ces conditions, un électeur paresseux préfère rester chez lui plutôt que d'aller voter. Mais si tous les électeurs sont paresseux, personne ne va voter et il n'y a pas d'élection. Or, si on avait laissé le choix à l'électeur paresseux entre aller voter ou l'absence totale d'élection, il aurait sans doute choisi la première option !

1.6. Compétition en quantités dite de Cournot. Deux entreprises, 1 et 2, produisent des biens identiques. Chacune décide d'un niveau de production q_i, à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est $p(q_1 + q_2)$.

$$\begin{aligned} N &= 2, \\ S_i &= \mathbb{R}_+, \\ g_1(q_1, q_2) &= q_1 p(q_1 + q_2) - c_1(q_1), \\ g_2(q_1, q_2) &= q_2 p(q_1 + q_2) - c_2(q_2). \end{aligned}$$

1.7. Compétition en prix dite de Bertrand. Il s'agit d'un modèle de compétition par les prix. Chaque entreprise décide d'un prix de vente du bien, et les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas.

$$\begin{aligned} N &= 2, \\ S_i &= \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

$$g_1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1 & \text{si} \quad p_1 < p_2, \\ 0 & \text{si} \quad p_1 > p_2, \\ p_1/2 & \text{si} \quad p_1 = p_2, \end{cases}$$

et $g_2(p_1, p_2) = g_1(p_2, p_1)$.

2. Stratégies dominantes et dominées

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale. Étant donné un jeu, et en supposant les joueurs rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer, ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?
Dans toute la suite, on utilisera les notations suivantes :

$$S = \prod_{j=1}^{N} S_j, \quad S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j, \quad g = (g_j)_{j \in [|1, N|]}.$$

Dans toute cette partie, on considère un jeu sous forme normale $\Gamma = (N, S, g)$.

Une stratégie strictement dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Définition 2. *Une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominée s'il existe $t_i \in S_i$ telle que :*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(t_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i}).$$

On dit alors que s_i est strictement dominée par t_i, ou encore que t_i domine strictement s_i.

Un joueur “rationnel” ne devrait jamais jouer une stratégie strictement dominée. En effet, il a la possibilité de choisir une autre stratégie dont il sait qu’elle peut lui donner un gain meilleur (strictement), indépendamment des choix des autres joueurs.

Une stratégie strictement dominante donne un meilleur paiement (strictement) que toute autre stratégie, pour tous les choix des autres joueurs.

DÉFINITION 3. *Une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies. Formellement, pour tout $t_i \in S_i$ tel que $t_i \neq s_i$, on a :*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(s_i, s_{-i}) > g_i(t_i, s_{-i}).$$

Une conséquence quasi-immédiate de la définition est :

PROPOSITION 4. *Si une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante, alors elle est unique à avoir cette propriété.*

Si un joueur a une stratégie strictement dominante, on peut alors penser que cette stratégie constitue un bon choix. Pour chaque choix des autres, elle donne le meilleur paiement possible.

DÉFINITION 5. *Un profil de stratégies $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in S$ est un équilibre en stratégies strictement dominantes si pour tout $i \in [|1, N|]$, s_i est strictement dominante.*

Si un équilibre en stratégies strictement dominantes existe, on peut alors le considérer comme l’unique issue rationnelle du jeu.

Nous allons maintenant construire un raisonnement en se basant sur le fait que si aucun joueur ne choisit de stratégie strictement dominée, alors les autres joueurs peuvent anticiper ce phénomène.

EXEMPLE 4. *Considérons le jeu suivant :*

	S	T
S	$0, -2$	$-10, -1$
T	$-1, -10$	$-5, -5$

Que devrait jouer le joueur 1 s’il sait que le joueur 2 est rationnel ?

Réponse : le joueur 2 doit jouer T s’il est rationnel ; s’il sait que le joueur 2 est rationnel, le joueur 1 doit alors jouer T.

EXEMPLE 5. *Considérons le jeu suivant :*

	G	M	D
H	$2,2$	$1,1$	$4,0$
B	$1,2$	$4,1$	$3,5$

— *Que devrait jouer le joueur 1 s'il sait que le joueur 2 est rationnel ? Réponse : H.*
— *Que devrait jouer le joueur 2 s'il sait que le joueur 1 sait qu'il est rationnel ? Réponse : G.*

Ceci nous amène à définir le processus d'élimination itérée des stratégies strictement dominées :
— Si un joueur i a une stratégie strictement dominée s_i, il ne devrait pas la jouer.
— Les autres joueurs savent aussi que le joueur i ne devrait pas jouer s_i.
— On peut donc éliminer s_i, c'est-à-dire étudier le jeu où l'ensemble de stratégies du Joueur i est $S_i \setminus \{s_i\}$.
— On peut réappliquer cette méthode sur ce jeu.

Plus formellement : On pose $\Gamma_1 = \Gamma$. A chaque étape $k \geq 1$:
— Si Γ^k n'a pas de stratégies strictement dominées, la procédure s'arrête.
— Sinon, soit $i \in [|1, N|]$ et $s_i \in S_i^k$ une stratégie strictement dominée de Γ^k. On pose $\Gamma^{k+1} := (N, S^{k+1}, g)$ avec $S_{-i}^{k+1} = S_{-i}^k$ et $S_i^{k+1} = S_i^{k+1} \setminus \{s_i\}$.

Notons que cette procédure n'est a priori pas unique : elle dépend de l'ordre dans lequel les stratégies sont éliminées. Nous verrons plus tard qu'en ce qui concerne les concepts de rationalité qui nous intéressent, l'ordre d'élimination n'a pas d'importance.

DÉFINITION 6. *Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que pour tout $i \in [|1, N|]$, S_i^k est un singleton $\left\{s_i^k\right\}$. Alors le profil de stratégies $(s_i^k)_{i\in[|1,N|]}$ ne dépend pas de l'ordre d'élimination des stratégies. On dit que le jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.*

Ainsi, lorsqu'un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, on peut lui associer une prédiction unique des stratégies suivies par les joueurs, à savoir le profil $(s_i^k)_{i\in[|1,N|]}$.

EXEMPLE 6. *Que dit la procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées dans le jeu suivant ?*

	A	B	C	D
A	$5,2$	$2,6$	$1,4$	$0,4$
B	$0,0$	$3,2$	$2,1$	$1,1$
C	$7,0$	$2,2$	$1,5$	$5,1$
D	$9,5$	$1,3$	$0,2$	$4,8$

Réponse : l'issue du jeu est (B, B).

Exemple 7.

	G	D
H	$2,2$	$4,4$
B	$3,1$	$4,1$

Quelles sont les stratégies dominées, dominantes ? Quelles stratégies paraissent "raisonnables" ?

Réponse : il n'y a pas de stratégie strictement dominante, ni strictement dominée. Cependant, le choix de la stratégie B *pour le joueur 1, et* D *pour le joueur 2, semble un bon choix, car ces stratégies ne peuvent donner qu'un paiement meilleur que l'autre, et jamais un paiement moins bon.*

L'exemple précédent nous conduit à la définition d'une stratégie dominée.

Définition 7. *Une stratégie* $s_i \in S_i$ *est dominée s'il existe* $t_i \in S_i$ *tel que*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(s_i, s_{-i}) \leq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On dit alors que s_i *est dominée par* t_i*, et que* t_i *domine* s_i.

Dans le jeu précédent, H est dominée pour le joueur 1, et G est dominée pour le joueur 2.

Définition 8. *Une stratégie* $s_i \in S_i$ *est dominante si pour tout* $t_i \in S_i$*,* s_i *domine* t_i*. Cela signifie donc :*

$$\forall t_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

Une stratégie dominante représente un choix "raisonnable", car on ne peut jamais le regretter.

Définition 9. *Un profil de stratégies* $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in S$ *est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout* $i \in [|1, N|]$*,* s_i *est dominante.*

Lorsqu'un équilibre en stratégies dominantes existe, il semble raisonnable que les joueurs le jouent.

En revanche, une stratégie dominée ne semble pas constituer un bon choix. Nous sommes tentés de généraliser la procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées aux stratégies dominées. Voyons ce que l'on obtient dans l'exemple suivant :

Exemple 8. *Soit le jeu donné par la matrice de paiements suivante :*

	G	D
H	$1,1$	$0,0$
M	$1,1$	$2,1$
B	$0,0$	$2,1$

La procédure d'élimination itérée des stratégies dominées nous permet d'éliminer H, puis G. Cette procédure pourrait aussi bien nous conduire à éliminer B, puis D. Ces deux ordres de suppression de stratégies dominées nous conduit à des résultats différents. La méthode n'est donc pas concluante.

Rappelons qu'au contraire, l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'a pas d'influence sur le résultat final.

En conclusion : si on supprime de manière itérée les stratégies dominées, le résultat peut dépendre de l'ordre des itérations. Ce n'est donc pas une procédure qui va nous permettre de résoudre le jeu de manière unique ; tout au plus, elle nous permet de proposer des prédictions de profils de stratégies raisonnables. En revanche, nous n'avons pas ces difficultés avec l'élimination itérée des stratégies strictement dominées.

3. Équilibre de Nash

3.1. Définitions. L'élimination itérée de stratégies strictement dominées est attractive car elle repose sur l'idée de rationalité (et sur la connaissance par les joueurs de la rationalité des autres, etc). Cependant, peu de jeux sont résolubles par élimination itérée des stratégies strictement dominées. Nous introduisons un concept qui s'applique à une plus grande gamme de jeux : l'équilibre de Nash.

L'équilibre de Nash (EN en abrégé) peut être compris comme une convention sociale stable. C'est une règle collective de laquelle aucun individu n'a intérêt à s'écarter pourvu que les autres individus respectent eux aussi la règle.
On introduit la notation suivante : si $s \in S$ et $i \in [|1, N|]$, on note s_{-i} le profil de stratégies où on a retiré la stratégie du joueur i : $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, s_{i+2}, ..., s_N)$. C'est donc un élément de S_{-i}.

DÉFINITION 10. *Un profil de stratégies* $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in S$ *est un équilibre de Nash si :*

$$\forall i \in [|1, N|], \quad \forall t_i \in S_i, \quad g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On notera $NE(\Gamma)$ (ou simplement NE quand il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des équilibres de Nash de Γ.
On notera $E(\Gamma)$ (ou simplement E quand il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de Γ :

$$E(\Gamma) = \{(g_1(s), g_2(s), ..., g_N(s)),\ s \in NE(\Gamma)\} \subset \mathbb{R}^N$$

.

La notion d'équilibre de Nash est centrale en théorie des jeux et en microéconomie. Elle est aussi appliquée en informatique, biologie, en sociologie, etc. Les interprétations de cette notion sont diverses. On peut citer les justifications suivantes :

— Prescriptions : un individu extérieur propose un profil de stratégies. Si ce profil est un équilibre de Nash, personne n'a intérêt à dévier.
— Communication : les joueurs se mettent d'accord à l'avance sur quel profil jouer. Les EN sont des accords viables.
— Introspection : un joueur analyse le jeu et se convainc que seul l'EN est possible (valable uniquement si unique EN).
— Convention : dans certains pays, nous conduisons à droite de la route, dans d'autres à gauche. C'est la convention qui dicte une règle. L'EN est nécessaire pour que cette règle soit suivie.
— Apprentissage : les joueurs découvrent les stratégies suivies par les autres au cours d'un processus d'apprentissage.
— Evolution : si chaque espèce évolue de façon adaptée aux autres espèces, la résultante est un EN.

On peut reformuler la définition d'équilibre de Nash en introduisant la notion de *meilleure réponse* :

DÉFINITION 11. $s_i \in S_i$ *est meilleure réponse à* $s_{-i} \in S_{-i}$ *si pour tout* $t_i \in S_i$, $g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i})$.

L'ensemble des meilleures réponses à s_{-i} est noté $BR_i(s_{-i})$.
On a alors la reformulation suivante :

PROPOSITION 12. *Un profil de stratégies* $s \in S$ *est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout* i, $s_i \in BR_i(s_{-i})$.

3.2. Exemples.

EXEMPLE 9. *Quels sont les équilibres de Nash du jeu du rendez-vous à Champs-sur-Marne ?*

	E	C
E	$1,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,1$

Réponse : il y a deux équilibres de Nash, (E,E) *et* (C,C).

Le jeu du dilemme du prisonnier est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, et l'équilibre de Nash est compatible avec cette prédiction.

EXEMPLE 10. *Dilemme du prisonnier :*

	C	D
C	$-3,-3$	$-10,-10$
D	$0,-10$	$-5,-5$

Seul équilibre de Nash : (D,D).

EXEMPLE 11. *Soit le jeu :*

	G	D
H	$1,1$	$0,0$
M	$1,1$	$2,1$
B	$0,0$	$2,1$

Quatre équilibres de Nash : (H,G), (M,G), (M,D), (B,D). *Notons que ce jeu admet des équilibres de Nash, alors qu'il n'est pas résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.*

EXEMPLE 12. *Le jeu suivant est-il résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées ? Quels sont ses équilibres de Nash ?*

	G	M	D
h	$5,3$	$0,4$	$3,5$
m	$4,0$	$5,5$	$4,0$
b	$3,5$	$0,4$	$5,3$

Réponse : ce jeu n'est pas résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées. L'unique équilibre de Nash est (m,M).

Exemple 13. *Jeu du Penalty.*

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

Il n'y a pas d'équilibres de Nash. Nous verrons cependant dans le chapitre suivant que si l'on autorise les joueurs à faire des choix aléatoires, alors il y a un équilibre de Nash (en stratégies mixtes).

L'étude de ces exemples nous apprend deux choses particulièrement importantes :
— Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash,
— Un jeu peut ne pas avoir d'équilibres de Nash.

3.3. Equilibres de Nash, stratégies dominantes, stratégies dominées. Quel est le lien entre l'équilibre de Nash et les notions de solutions rationnelles vues précédemment (équilibres en stratégies (strictement) dominantes, élimination itérée des stratégies (strictement) dominées) ? Les deux propositions suivantes permettent de répondre à cette question.

Proposition 13.

(1) Un équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash.

(2) Soit (Γ^k) la suite de jeux obtenues par une procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées. Alors pour tout $k \geq 1$, $NE(\Gamma^k) = NE(\Gamma)$.

(3) Si Γ est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors le profil de stratégies obtenu à la fin de la procédure est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Une conséquence de cette proposition est que toutes les stratégies des équilibres de Nash survivent à l'élimination itérée des stratégies strictement dominées.
On étudie maintenant les équilibres en stratégies dominantes et les stratégies dominées :

Proposition 14.

(1) Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash.

(2) Soit (Γ^k) la suite de jeux obtenues par une procédure d'élimination itérée des stratégies dominées. Alors pour tout $k \geq 1$, $NE(\Gamma^{k+1}) \subset NE(\Gamma^k)$.

Pour la démonstration de ces propositions, cf les séances de cours ; pour ceux qui ne sont pas allés en cours, la démonstration est laissée en exercice !

3.4. Sélection d'équilibres. On peut avoir plusieurs équilibres de Nash, et cependant en préférer un plutôt qu'un autre pour des raisons liées au "risque" pris en jouant les stratégies.

Exemple 14. *Quels sont les équilibres de Nash du jeu suivant ? Quelle stratégie choisiriez-vous ?*

	A	B
A	$9,9$	$-15,8$
B	$8,-15$	$7,7$

Réponse : les équilibres de Nash sont (A,A) et (B,B). La stratégie B est préférée par un agent averse au risque car elle est moins risquée. En effet, la stratégie B fait gagner au pire 7, alors que la stratégie A peut faire perdre -15.

Certaines stratégies dominées peuvent être jouées à l'équilibre de Nash.

Exemple 15. *Quels sont les équilibres de Nash du jeu suivant ? Quelle stratégie choisiriez-vous ?*

	A	B
A	$2,2$	$1,1$
B	$1,1$	$1,1$

Réponse : les équilibres de Nash sont (A,A) et (B,B). La stratégie B est dominée pour chaque joueur.

Exemple 16. *Quels sont les équilibres de Nash du jeu suivant ? Quelle stratégie choisiriez-vous ?*

	A	B
A	$2,2$	$1,2$
B	$2,1$	$1,1$

Réponse : tous les profils de stratégies pures sont des équilibres de Nash, (A,A), (A,B), (B,A) et (B,B).

4. Application : Enchères de Vickrey

4.1. Principe. De manière générale, dans une enchère, un certain nombre d'agents (particuliers, entreprises...) cherchent chacun à acquérir un même objet en proposant une offre. Chacun a sa propre estimation de la valeur de l'objet. Le commissaire-priseur (l'organisateur) attribue ensuite l'objet au gagnant, qui est la plupart du temps l'agent qui a proposé la plus haute offre. Le prix que doit payer le

gagnant pour acquérir l'objet dépend des règles de l'enchère. Le paiement total du gagnant est donc : "prix estimé de l'objet" moins "prix payé pour avoir l'objet".
Il existe de nombreuses manières d'organiser une enchère et de nombreuses règles possibles pour déterminer le prix que le gagnant doit payer. Nous étudions ici un cas particulier d'enchère, dite *enchère au second prix*, proposé par William Vickrey (qui a obtenu le prix Nobel d'Economie en 1996).

Dans une enchère au second prix, chaque agent propose une offre de manière privée : par exemple, chacun écrit son offre sur un papier qu'il glisse dans une enveloppe scellée, qui est ensuite transmise au commissaire-priseur.
Le commissaire-priseur examine toutes les offres, et détermine la plus haute. L'agent qui a proposé l'offre la plus haute acquiert l'objet. Il paie alors le prix correspondant à la deuxième meilleure offre de tous les agents.
Par exemple, s'il y a trois agents qui proposent respectivement 20, 30 et 50 euros, alors le troisième acquiert l'objet au prix de 30 euros.
S'il y a plusieurs "meilleures offres", alors le gagnant de l'enchère est tiré au sort parmi les agents qui ont proposé cette offre. Le gagnant paie alors la meilleure offre (comme il y a plusieurs meilleures offres, la deuxième meilleure offre est égale à la meilleure offre !).
Par exemple, s'il y a trois agents, et que le premier propose 20 euros, tandis que les deux autres proposent 30 euros, alors avec probabilité 1/2 le deuxième acquiert l'objet et paie 30 euros ; avec probabilité 1/2, le troisième acquiert l'objet au prix de 30 euros.

4.2. Formalisation. Décrivons l'enchère au second prix par un jeu forme normale. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'agents (appelés désormais joueurs), et soit $S_1 = S_2 = ... = S_N = \mathbb{R}_+$ les ensembles de stratégies des joueurs, qui correspondent à l'ensemble des offres qu'ils peuvent faire. L'estimation que le joueur i fait de l'objet est notée $v_i \in \mathbb{R}_+$. Soit $i \in [|1, N|]$. Pour $s_{-i} \in S_{-i}$, on note $M_i(s_{-i}) := \max_{j \neq i} s_j$. Le paiement du joueur i s'écrit

$$g_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i < M_i(s_{-i}) \\ \frac{v_i - M_i(s_{-i})}{m(s)} & \text{si } s_i \geq M_i(s) \text{ et } m(s) = Card\,\{j \in [|1, N|], s_j = s_i\}\,. \end{cases}$$

Lorsqu'il y a plusieurs meilleures offres, l'issue du jeu est aléatoire. On prend alors comme paiement l'espérance du paiement réalisé. Le terme $1/m$ dans le paiement correspond à la probabilité que le joueur i obtienne l'objet, s'il a fait la meilleure offre et si $m - 1$ autres agents ont fait la même offre que lui.

4.3. Equilibre en stratégies dominantes. Pour chaque joueur i, offrir exactement son estimation de l'objet v_i est une stratégie dominante.

Proposition 15. *Le profil de stratégies* $(v_1, v_2, ..., v_N)$ *est un équilibre en stratégies dominantes.*

Démonstration. Soit $i \in [|1, N|]$. Montrons que v_i est une stratégie dominante. Soit $s_{-i} \in S_{-i}$ et $s_i \in S_i$. Montrons que

$$g_i(v_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i}). \tag{1}$$

1er cas : $s_i < M_i(s_{-i})$. Dans ce cas, la stratégie s_i ne permet pas de gagner l'objet, donc elle rapporte 0. Comme $g_i(v_i, s_{-i})$ est positif, l'inégalité (1) est bien vérifiée.

2ème cas : $s_i \geq M_i(s_{-i})$. Dans ce cas, $g_i(s_i, s_{-i}) = \frac{v_i - M(s_{-i})}{m(s)}$. Si ce terme est négatif, l'inégalité (1) est vérifiée. Si ce terme est strictement positif, alors $v_i > M_i(s_{-i})$, et donc offrir v_i permet de remporter à coup sûr l'objet : on a donc $g_i(v_i, s_{-i}) = v_i - M_i(s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$. Ainsi, l'inégalité (1) est vérifiée dans tous les cas. □

4.4. Interprétation. Interprétons le résultat précédent. On a montré que pour chaque joueur i, quoi que fasse les autres joueurs, offrir v_i donne toujours le meilleur paiement (au sens large). Ainsi, il est optimal pour les agents d'offrir exactement ce qu'ils pensent être la valeur de l'objet, indépendamment du choix des autres joueurs. Cette règle d'enchère incite donc les agents à dire la vérité sur leur estimation de l'objet, et permet ainsi de limiter certaines manipulations que l'on retrouve souvent dans les enchères. Par exemple, si on prend une enchère au premier prix (même système que l'enchère au second prix, excepté que le gagnant paie le prix correspondant à sa propre offre), un joueur peut essayer d'annoncer un prix plus bas que son estimation, dans l'espoir que les autres joueurs en fassent de même et que l'objet soit ainsi vendu à un prix bradé. Avec l'enchère au second prix, annoncer moins que son estimation de l'objet n'a pas d'intérêt.

4.5. Applications. Les enchères au second prix ont trouvé de nombreuses applications. Ainsi, lorsqu'un état décide de l'attribution des fréquences radio à des entreprises (opérateurs téléphoniques par exemple), il est courant d'organiser une enchère au second prix. C'est le cas aux Etats-Unis, où la FCC (Federal Communications Commission) organise depuis 1994 des enchères au second prix pour vendre des brevets d'exploitation de fréquences radio. Ce système a un double avantage. Tout d'abord, la FCC n'a pas forcément une idée précise de la valeur monétaire d'une fréquence radio. Au lieu d'employer des experts pour déterminer cette valeur, elle délègue aux entreprises cherchant à acquérir la fréquence radio le choix de fixer le prix, à travers l'enchère. Par l'étude précédente, on sait que les entreprises auront intérêt à annoncer le vrai prix qu'elles estiment. Ce système permet donc de faire de grandes économies d'organisation.

Deuxièmement, comme les entreprises sont incitées à annoncer leur vraie estimation de l'objet, la FCC est certaine que le prix final ne sera pas un prix "bradé". L'enchère au second prix permet donc de "tirer le maximum" des entreprises. C'est vérifié dans les faits : les prix de vente avec ce système sont bien plus élevés que ceux avec l'ancien système.
Notons également que Yahoo et Google utilisent également ce type d'enchères pour déterminer les publicités qui apparaissent lorsque l'utilisateur tape une requête sur ces moteurs de recherche.

Chapitre 2

Jeux sous forme normale II : stratégies mixtes et jeux à somme nulle

Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash est que pour certains jeux, de tels équilibres n'existent pas. C'est le cas par exemple du jeu du Penalty, ou encore du jeu de "Pierre, Feuille, Ciseaux" :

	P	F	C
P	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
F	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
C	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

Il est facile de voir que ce jeu n'admet pas d'équilibre de Nash.

La raison de l'absence d'équilibres est la suivante : dans un équilibre de Nash $s = (s_1, s_2, ..., s_N)$, la définition exige que chaque joueur i obtienne le meilleur paiement sachant la stratégie des autres. Ainsi, dans le jeu du Pierre-Feuille-Ciseau, si le Joueur 1 joue Pierre, sachant que Pierre est joué le Joueur 2 devrait jouer Feuille ; mais sachant que le Joueur 2 joue Feuille, le Joueur 1 devrait jouer Ciseau, et ainsi de suite. Cette circularité provient du fait que dans un tel jeu, chacun des joueurs a intérêt à cacher sa stratégie, ou à bluffer. Exiger que chacun des deux joueurs fasse de son mieux sachant la stratégie de l'autre est donc une condition beaucoup trop forte. On peut faire un raisonnement similaire dans la plupart des situations où les joueurs jouent simultanément et où ils n'ont pas d'intérêts communs (jeu du Penalty, Poker...).

Les stratégies mixtes, ou aléatoires, permettent de représenter ces possibilités de bluff, ou de jouer aléatoirement.

1. Définitions

Nous allons définir les stratégies mixtes, puis les jeux dans lesquels les joueurs ont la possibilité de jouer des stratégies mixtes, et enfin définir un équilibre de Nash en stratégies mixtes comme un équilibre de Nash d'un tel jeu.

1.1. Stratégies mixtes.

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale. **On supposera dans tout ce chapitre que pour tout $i \in [|1, N|]$, S_i est un ensemble fini.**

Nous commençons par définir le concept de stratégies mixtes.

DÉFINITION 16. *Une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilités sur S_i.*

On note $\Delta(S_i)$ l'ensemble des stratégies mixtes. Pour faire la distinction avec les stratégies mixtes, on appellera désormais les éléments de S_i **stratégies pures** (rappelons qu'on les appelait simplement "stratégies" dans le chapitre précédent, car on n'avait pas encore défini les stratégies mixtes). Notons qu'une stratégie pure s_i peut-être vue comme la stratégie mixte qui joue s_i avec probabilité 1 : c'est donc une stratégie déterministe. Formellement, s_i correspond à la Dirac δ_{s_i}. On peut donc écrire $S_i \subset \Delta(S_i)$.
Comme S_i est fini, $\Delta(S_i)$ s'identifie à l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} \ : \ \forall k \ \ p_k \geq 0, \ \sum\nolimits_{k=1}^{|S_i|} p_k = 1\}$$

Notons que l'ensemble $\Delta(S_i)$ est convexe. Cette propriété joue un grand rôle dans le théorème d'existence d'équilibre de Nash en stratégies mixtes, que l'on aura l'occasion de voir.

Selon les cas, différentes notations pour les stratégies mixtes sont utilisées :

(1) Notation fonction : σ_i est l'application de S_i vers $\mathbb{R}$ qui associe à la stratégie pure s_i sa probabilité d'être jouée.

Exemple : Si $S_1 = \{H, B\}$, la stratégie σ_1 du Joueur 1 qui joue H avec probabilité 1/2 et B avec probabilité 1/2 peut s'écrire formellement : $\sigma_1(H) = \sigma_1(B) = \frac{1}{2}$.

(2) Vecteur : on écrit σ_i comme un vecteur de probabilités. Si $S_i = \{s_{i,1}, \ldots, s_{i,n_i}\}$, alors σ_i se représente comme $(\sigma_i(s_{i,1}), \ldots, \sigma_i(s_{i,n_i}))$.

Exemple : $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(3) Combinaison convexe de stratégies pures : par exemple, $\frac{1}{2} \cdot H + \frac{1}{2} \cdot B$.

Il y a plusieurs interprétations possibles des stratégies mixtes, les plus courantes sont les suivantes :

— Possibilité “matérielle” de jouer aléatoirement. Rien ne s'oppose à priori à ce qu'un joueur décide aléatoirement quelle stratégie pure utiliser. La stratégie mixte est un choix aléatoire d'une stratégie pure. Certains joueurs de poker utilisent effectivement des stratégies aléatoires : suivant la position de l'aiguille des secondes de leur montre, ils prendront la décision de relancer, ou de se coucher.

— Bluff, et part d'incertitude que chacun laisse sur sa stratégie. Ici, une stratégie mixte représente plutôt une croyance que chaque joueur a sur les façons de jouer des autres joueurs. Même si je décide si je vais bluffer ou non, de manière pas forcément aléatoire, je ne souhaite surtout pas que les autres joueurs connaissent mon choix !

— Dans une population de joueurs, une stratégie correspond à une proportion dans laquelle une stratégie pure est jouée dans la population. Par exemple, si dans la ville de New Delhi 30% des piétons cherchent à passer à gauche (systématiquement) lorsqu'ils croisent un autre piéton, et 70% à droite, à chaque fois que je croise un piéton dans cette ville je joue face à la stratégie mixte $(30\%, 70\%)$.

— Incertitude sur les paiements (Harsanyi). Supposons que selon mon "humeur" du moment, j'ai une faible préférence soit pour bluffer, soit pour ne pas bluffer, et que les autres joueurs ne connaissent pas mes préférences. Dans ce cas, je joue la stratégie que je préfère, qui n'est donc pas aléatoire, mais les autres joueurs ont l'impression que je joue aléatoirement, et se représentent mon comportement par une stratégie mixte.

1.2. Extension mixte d'un jeu.

On utilisera désormais les notations : $\Sigma_i = \Delta(S_i)$, $\Sigma = \prod_{j=1}^N \Sigma_j$ et $\Sigma_{-i} = \prod_{j\neq i} \Sigma_j$.

Si chaque joueur j joue la stratégie mixte $\sigma_j \in \Sigma_j$, la probabilité que $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in S$ soit le profil de stratégies effectivement joué est $\prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j)$. Par conséquent, on définit le paiement espéré du joueur i comme :

$$\sum_{s\in S} \left[\prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j)\right] g_i(s).$$

On note $g_i(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$ cette quantité (ou simplement $g_i(\sigma)$, avec la notation habituelle $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$). Pour chaque $i \in [|1, N|]$, on a donc étendu la fonction g_i, qui était définie sur les profils de stratégies pures, aux profils de stratégies mixtes : on est passé de $g_i : S \to \mathbb{R}$ à $g_i : \Sigma \to \mathbb{R}$. On peut donc maintenant définir formellement l'extension mixte de (N, S, g).

DÉFINITION 17. L'extension mixte *du jeu sous forme normale* (N, S, g) *est le jeu sous forme normale* (N, Σ, g).

L'interprétation du jeu avec stratégies mixtes est la suivante :

— Chaque joueur i choisit une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$,

— Simultanément, chaque joueur i tire une stratégie pure s_i suivant la loi σ_i,

— Le paiement réalisé du joueur i est $g_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ (qu'on note aussi $g_i(s)$),

— Chaque joueur cherche à maximiser son paiement **en moyenne** (cela n'a pas vraiment de sens de maximiser son paiement réalisé, car il est par définition aléatoire) : donc à maximiser l'espérance de son paiement, qui correspond à la formule écrite plus haut.

La fonction de paiement de l'extension mixte possède une structure très particulière. En effet, du fait de la linéarité de l'espérance, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 18. *Soit $i \in [|1, N|]$. L'application $g_i \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, c.a.d. elle est linéaire par rapport à chaque coordonnée $\sigma_j \in \Sigma_j$.*

La preuve, laissée en exercice, nécessite de montrer que pour $\sigma_{-j} \in \Sigma_{-j}$, $\sigma_j, \sigma'_j \in \Sigma_j$ et $\lambda \in [0, 1]$, et $\sigma''_j = \lambda\sigma_j + (1 - \lambda)\sigma'_j$:

$$g_i(\sigma_{-j}, \sigma''_j) = \lambda g(\sigma_{-j}, \sigma_j) + (1 - \lambda)g(\sigma_{-j}, \sigma'_j).$$

COROLLAIRE 19. *En particulier, on a pour tout $i \in [|1, N|]$ et pour tout $\sigma \in \Sigma$:*

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum\nolimits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

1.3. Équilibre de Nash en stratégies mixtes. Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale. Rappelons que si $\sigma \in \Sigma$ et $i \in [|1, N|]$, on note σ_{-i} le profil de stratégies où on a retiré la stratégie du joueur i : $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, ..., \sigma_N)$.

DÉFINITION 20. *Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de Γ est un équilibre de Nash de l'extension mixte de Γ. C'est donc un profil de stratégies mixtes $\sigma \in \Sigma$ tel que $\forall i \in [|1, N|]$, $\forall \tau_i \in \Sigma_i$,*

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

On peut interpréter un équilibre de Nash en stratégies mixtes de la façon suivante : chaque joueur, s'il connait les probabilités choisies par ses adversaires, est content de la probabilité qu'il a choisie. Bien entendu, cela ne veut pas dire que chaque joueur sera content pour toutes les réalisations possibles, mais seulement qu'un joueur n'a pas intérêt à dévier avant de connaître les réalisations des différentes stratégies mixtes.

Pour faire la distinction avec les équilibres de Nash en stratégies mixtes, on appellera désormais les équilibres de Nash de Γ (au sens où on les a définis dans le chapitre précédent) des *équilibres de Nash en stratégies pures*.

On notera $NE_{mix}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes, et $NE_{pur}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.

2. Propriétés de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes

Plusieurs questions se posent :

- Quel rapport existe-t-il entre les équilibres de Nash en stratégies mixtes et ceux en stratégies pures ?
- Quand existe-t-il des équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

- Quel est le rapport entre les équilibres de Nash en stratégies mixtes et l'élimination itérée des stratégies strictement dominées ?
- Comment calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

2.1. Équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes.

PROPOSITION 21. *σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si :*

$$\forall i \in [|1, N|], \quad \forall s_i \in S_i, \quad g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

La partie "seulement si" provient du fait qu'une stratégie pure est aussi une stratégie mixte, la partie "si" de la linéarité de g_i en σ_i.

COROLLAIRE 22. *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Par conséquent, considérer les stratégies mixtes nous donne plus d'équilibres qu'avec les stratégies pures.

EXEMPLE 17. *Un équilibre de Nash du jeu du Penalty est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour chaque joueur, un équilibre de Nash du jeu de "Pierre, Feuille, Ciseaux" est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pour chaque joueur. Rappelons que ces deux jeux n'ont pas d'équilibres de Nash en stratégies pures.*

2.2. Le théorème de Nash. Le théorème suivant est souvent considéré comme le résultat le plus important de la théorie des jeux.

THÉORÈME 23. **(Nash)** *Tout jeu fini (*i.e.* avec ensembles de stratégies finis) admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Ce résultat signifie qu'on peut associer à tout jeu fini un concept de solution rationnelle, à savoir un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Notons que l'hypothèse de finitude des ensembles de stratégies n'est pas très contraignante d'un point de vue économique : dans la vraie vie, les ensembles de stratégies sont souvent finis !
La preuve de ce résultat est très élégante mathématiquement, et fait appel à un théorème de point fixe établi par Kakutani en 1941. Malheureusement, elle ne donne pas de méthode pour calculer les équilibres de Nash. Les grandes lignes de la preuve sont expliquées à la fin de ce chapitre.

2.3. Stratégies mixtes dominantes et dominées. Rappelons que l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est aussi un jeu sous forme normale. On peut donc lui appliquer les concepts définis dans le chapitre précédent, comme par exemple la notion de stratégie strictement dominée :

DÉFINITION 24. *Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée s'il existe $\tau_i \in \Sigma_i$ tel que*

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}, \quad g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < g_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

On dit alors que σ_i est strictement dominée par τ_i, et que τ_i domine strictement σ_i.

Pour vérifier qu'une stratégie en domine strictement une autre, il suffit de le vérifier face à tout profil de stratégies pures.

PROPOSITION 25. *$\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée par $\tau_i \in \Sigma_i$ si et seulement si*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(\tau_i, s_{-i}).$$

La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, utiliser la linéarité.

Une stratégie non strictement dominée par une stratégie pure peut être strictement dominée par une stratégie mixte.

EXEMPLE 18. *Dans le jeu suivant :*

	G	M	D
h	$1,1$	$0,2$	$0,4$
m	$0,2$	$5,0$	$1,6$
b	$0,2$	$1,1$	$2,1$

M est strictement dominé par $\frac{1}{2} \cdot G + \frac{1}{2} \cdot D$.

EXERCICE 26. *Ecrire la définition de stratégie mixte dominée par une stratégie mixte, ainsi que la proposition analogue à la proposition ci-dessus.*

Nous pouvons redéfinir la procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées en prenant en compte les stratégies strictement dominées par des stratégies mixtes :

On pose $\Gamma_1 = \Gamma$. A chaque étape $k \geq 1$:

— Si Γ^k n'a pas de stratégies pures strictement dominées, la procédure s'arrête.

— Sinon, soit $i \in [|1, N|]$ et $s_i \in S_i^k$ une stratégie pure de Γ^k qui est strictement dominée **par une stratégie mixte de** Γ^k. On pose $\Gamma^{k+1} := (N, S^{k+1}, g)$ avec $S_{-i}^{k+1} = S_{-i}^k$ et $S_i^{k+1} = S_i^{k+1} \setminus \{s_i\}$.

En appliquant ce qu'on a vu au chapitre précédent à l'extension mixte de Γ, on en déduit que les équilibres de Nash en stratégies mixtes résistent à la procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées. Ainsi, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 27. *Soit* (Γ^k) *la suite de jeux obtenue par une procédure d'élimination des stratégies (pures) strictement dominées (par des stratégies mixtes). Alors pour tout* $k \geq 1$, $NE_{mix}(\Gamma^k) = NE_{mix}(\Gamma)$.

Autrement dit, quand on élimine une stratégie strictement dominée (par une mixte), on ne perd pas d'équilibre de Nash mixte (en particulier, on ne perd pas d'équilibre de Nash pur).

REMARQUE 28. *On peut de la même manière éliminer une stratégie mixte (sans que celle-ci soit forcément pure) qui est strictement dominée par une stratégie mixte. Cependant, en général cela n'a pas grand intérêt, car les stratégies mixtes sont en nombre infini ; en éliminer une ne fait pas beaucoup avancer les choses ! L'intérêt d'éliminer une stratégie pure est qu'on enlève d'un coup toutes les stratégies mixtes qui accordent un poids positif à cette stratégie ; on raie donc une ligne ou une colonne entière de la matrice de paiement.*

EXEMPLE 19. *Résoudre le jeu précédent :*

	G	M	D
h	$1,1$	$0,2$	$0,4$
m	$0,2$	$5,0$	$1,6$
b	$0,2$	$1,1$	$2,1$

Réponse : le seul équilibre de Nash est de jouer $(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ *pour le joueur 1, et* $(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$ *pour le joueur 2.*

2.4. Recherche des équilibres en stratégies mixtes. On présente maintenant une méthode générale pour calculer tous les équilibres de Nash mixtes d'un jeu.
Comme dans le chapitre précédent, on peut définir la notion de meilleure réponse à un profil mixte (encore une fois, l'extension mixte d'un jeu est aussi un jeu !) :

DÉFINITION 29. $\sigma_i \in \Sigma_i$ *est meilleure réponse à* $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ *si pour tout* $\tau_i \in \Sigma_i$, $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(\tau_i, \sigma_{-i})$.

L'ensemble des meilleures réponses à σ_{-i} est noté $BR_i(\sigma_{-i})$.
On a alors la reformulation suivante :

PROPOSITION 30. *Un profil de stratégies* $\sigma \in \Sigma$ *est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout* i, $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

On va maintenant décrire une méthode qui permet de calculer les meilleures réponses, et donc les équilibres de Nash.

DÉFINITION 31. *Dans un jeu fini, le support de $\sigma_i \in \Sigma_i$ est*

$$\mathrm{supp}\,(\sigma_i) = \{s_i \in S_i, \sigma_i(s_i) > 0\}$$

PROPOSITION 32. *(Principe d'indifférence faible)*
Soit $i \in [|1, N|]$, $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ et $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$. Alors

$$\forall s_i, t_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i}).$$

Avec des mots : si un joueur joue une stratégie mixte qui est une meilleure réponse à un certain profil mixte des autres joueurs (ce profil est fixé), alors toutes les stratégies pures que le joueur joue avec probabilité positive donnent le même paiement contre ce profil.
En effet, dans le cas contraire, considérons la meilleure stratégie pure (contre le profil mixte des autres joueurs qui est fixé) parmi celles que le joueur joue avec probabilité positive. Celle-ci donne alors un paiement strictement meilleur que la stratégie mixte, ce qui contredit la définition de meilleure réponse.

DÉMONSTRATION. Ecrivons maintenant la preuve formelle. On a

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum\nolimits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) g_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum\nolimits_{s_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i)} \sigma_i(s_i) g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Par définition de meilleure réponse, on a $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \le g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i)$. Montrons qu'il y a en fait égalité. Par l'absurde, s'il existe $t_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i)$ tel que $g_i(t_i, \sigma_{-i}) < g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$, on a alors

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum\nolimits_{s_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i)} \sigma_i(s_i) g_i(s_i, \sigma_{-i}) < \sum\nolimits_{s_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i)} \sigma_i(s_i) g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),$$

ce qui est absurde. □

REMARQUE 33. *Par linéarité, la propriété*

$$\forall s_i, t_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i})$$

est équivalente à la propriété

$$\forall s_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

La proposition précédente donne une condition nécessaire pour être meilleure réponse ; la proposition suivante établit des conditions nécessaires et suffisantes.

PROPOSITION 34. *(Principe d'indifférence fort)*
Soit $i \in [|1, N|]$ et $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Alors $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$ équivaut à

(1)

$$\forall s_i, t_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i}),$$

(2)

$$\forall s_i \notin \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) \le g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

DÉMONSTRATION. Si σ_i est meilleure réponse, alors par le principe d'indifférence faible (i) est vérifiée ; et (ii) est vérifiée par définition de meilleure réponse. Enfin, si (i) et (ii) sont vérifiées, alors pour tout $s_i \in S_i$, $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$; ce qui par linéarité implique que σ_i est une meilleure réponse à σ_{-i}. □

COROLLAIRE 35. *σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si pour tout joueur i,*

(i)

$$\forall s_i, t_i \in \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i}),$$

(ii)

$$\forall s_i \notin \mathrm{supp}\,(\sigma_i), \quad g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

On obtient donc une procédure de recherche des équilibres en stratégies mixtes :
(i) essayer tous les supports possibles ;
(ii) résoudre les probabilités rendant chaque joueur indifférent sur son support ;
(iii) vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un paiement supérieur.

EXEMPLE 20. *Trouver tous les équilibres de Nash mixtes du jeu de la rencontre :*

	E	C
E	$1,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,1$

1ère étape : on cherche des stratégies pures strictement dominantes/strictement dominées (par des stratégies mixtes). Ici, cela ne donne rien.
2ème étape :
On cherche les équilibres de Nash purs. Ici, on obtient (E, E) et (C, C).
3ème étape : on cherche les équilibres de Nash mixtes.
Pour simplifier les notations, il sera d'usage d'identifier une loi de probabilité sur $\{E, C\}$ par la probabilité de jouer E. Ainsi, un réel $a \in [0, 1]$ représente la stratégie mixte tel que :
— *E est joué avec probabilité a,*
— *C est joué avec probabilité $1 - a$.*
*On cherche donc une stratégie $x \in [0, 1]$ du Joueur 1 et $y \in [0, 1]$ du Joueur 2 telles que (x, y) est un équilibre de Nash du jeu de la rencontre. Or, on a déjà déterminé les Nash purs ; on peut donc supposer que $x \in]0, 1[$ et $y \in [0, 1]$ **ou** $x \in [0, 1]$ et $y \in]0, 1[$.*
1er cas : $x \in]0, 1[$ et $y \in [0, 1]$. On a $\mathrm{supp}\,(x) = \{G, D\}$ (comme $x \in]0, 1[$, la stratégie x met un poids strictement positif sur G et D).

D'après le principe d'indifférence fort, on a

$$x \in BR_1(y) \Leftrightarrow g_1(E, y) = g_1(C, y).$$

C'est toujours la même idée : x met un poids positif sur E et C, x est une meilleure réponse à y, donc E et C donnent le même paiement contre y ; sinon, si par exemple E donne un paiement strictement meilleur que C contre y, alors jouer E contre y serait strictement meilleur que jouer x contre y, et x ne serait pas une meilleure réponse à y. Si vous avez le choix entre une banane et une pomme, et que vous préférez strictement les pommes, vous allez choisir la pomme avec probabilité 1 ! Ainsi, si vous prenez la banane avec probabilité positive et la pomme avec probabilité positive, c'est que vous êtes indifférent entre banane et pomme.

Or, $g_1(E, y) = y$ et $g_1(C, y) = 1 - y$, donc

$$x \in BR_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}.$$

Il peut paraître surprenant qu'appliquer le principe d'indifférence fort au joueur 1 permette de calculer non pas la stratégie du joueur 1 mais la stratégie du joueur 2. En fait, c'est logique : si le joueur 1 est indifférent entre E et C contre y, c'est justement parce que le joueur 2 met exactement le bon poids sur E pour que le joueur 1 soit indifférent entre jouer E et C.
On sait maintenant que $y = 1/2$, donc en particulier $y \in]0, 1[$; on peut donc appliquer le principe d'indifférence fort au Joueur 2. On obtient de même que précédemment :

$$y \in BR_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

On a donc montré que : le seul équilibre de Nash de la forme (x, y) avec $x \in]0, 1[$ et $y \in [0, 1]$ est $(1/2, 1/2)$. Pour ceux qui n'aiment pas cette notation, on peut aussi écrire cette équilibre $(\frac{1}{2} \cdot E + \frac{1}{2} \cdot C, \frac{1}{2} \cdot E + \frac{1}{2} \cdot C)$, ou encore $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$, ou encore (σ_1, σ_2) avec $\sigma_1(E) = \sigma_1(C) = 1/2$ et $\sigma_2 = \sigma_1$.

On doit maintenant traiter le cas où $x \in [0, 1]$ et $y \in]0, 1[$. Comme les joueurs jouent des rôles symétriques, on retombe sur l'équilibre $(1/2, 1/2)$. Finalement, on a obtenu que :

$$NE_{mix}(\Gamma) = \{(E, E), (C, C), (1/2, 1/2)\}.$$

Ne pas oublier les équilibres de Nash purs, qui sont aussi des équilibres de Nash mixtes !
On a alors comme ensemble de paiements d'équilibres de Nash mixtes

$$E_{mix}(\Gamma) = \{(1, 1), (1/2, 1/2)\}.$$

Remarquons que par le principe d'indifférence faible, on a $g_1(1/2, 1/2) = g_1(0, 1/2) =$

$g_1(1, 1/2)$. *Pour calculer* $g_1(1/2, 1/2)$, *on détermine donc plutôt* $g_1(0, 1/2)$ *ou* $g_1(1, 1/2)$, *qui sont plus simples à calculer.*

EXEMPLE 21. *Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes du jeu suivant ?*

	G	D
H	$1, 1$	$0, 4$
B	$0, 2$	$2, 1$

Réponse : il n'y pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. L'équilibre en stratégies mixtes est : le joueur 1 joue $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ *et le joueur 2 joue* $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

2.5. Preuve du théorème de Nash. On donne ici une esquisse de la preuve du théorème de Nash.

DÉFINITION 36. *Une correspondance de* A *vers* B *est une application de* A *vers les parties de* B, *notée* $F : A \rightrightarrows B$.
Le graphe d'une correspondance $F : A \rightrightarrows B$ *est :*

$$Gr(F) = \{(a, b) \in A \times B,\ b \in F(a)\}.$$

DÉFINITION 37. *La correspondance de meilleures réponses du jeu* G *est la correspondance de* Σ *vers* Σ *donnée par*

$$BR(\sigma) = \prod\nolimits_{i \in [|1,N|]} BR_i(\sigma_{-i})$$

On sait que σ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\forall i \quad \sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$$

ce qui s'écrit :

$$\sigma \in BR(\sigma).$$

On a les propriétés suivantes de la correspondance de meilleures réponses :

PROPOSITION 38.
(i) Pour tout σ, $BR(\sigma)$ *est non vide.*
(ii) Pour tout σ, $BR(\sigma)$ *est convexe.*
(iii) Le graphe de BR, *est fermé, i.e. si* $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$ *et* $\tau_n \in BR(\sigma_n)$ *alors* $\tau \in BR(\sigma)$.

On rappelle le théorème d'existence de point fixe d'une correspondance de Kakutani :

THÉORÈME 39. **(Kakutani)** *Soient* X *un compact convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$, *et* F *une correspondance de* X *vers* X *telle que :*
- $\forall x \in X$, $F(x)$ *est convexe et non vide ;*

- le graphe de F est fermé.
Alors F admet un point fixe, i.e. il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

En corollaire du théorème précédent, on obtient la preuve du théorème d'existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes.

3. Jeux à deux joueurs

Avant d'étudier les jeux à somme nulle, nous étudions le concept des stratégies maxmin ou prudentes.

3.1. Stratégies maxmin ou prudentes. Dans cette partie, on considère un jeu à deux joueurs $\Gamma = \{\{1,2\},(S_1,S_2),(g_1,g_2)\}$.

DÉFINITION 40. *Soit $w \in \mathbb{R}$. On dit que le joueur i garantit le paiement w s'il a une stratégie mixte qui lui permet d'obtenir au moins w contre toute stratégie de l'autre joueur. Formellement, le joueur i garantit w si :*

$$\exists \sigma_i \in \Sigma_i, \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}, \quad g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq w,$$

ce qui s'écrit encore

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} \min_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq w.$$

Par linéarité du paiement, le joueur i garantit w si et seulement si

$$\exists \sigma_i \in \Sigma_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq w,$$

ce qui s'écrit encore

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} g_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq w.$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition :

PROPOSITION 41. *Soit v_i le plus grand paiement que le joueur i peut garantir. Alors*

$$v_i = \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} \min_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} g_i(\sigma_i, s_{-i}).$$

On définit alors une stratégie prudente (ou maxmin) comme étant une stratégie qui permet au joueur i d'obtenir au moins v_i :

DÉFINITION 42. *Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est une* stratégie prudente (ou stratégie maxmin) *du joueur i si elle garantit v_i. Cela peut aussi s'écrire :*

$$\min_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = v_i.$$

Un profil de stratégies prudentes n'est pas toujours un équilibre de Nash, mais peut-être une manière de jouer raisonnable pour des joueurs averses au risque ou qui n'ont pas confiance en la rationalité de l'autre joueur.

EXEMPLE 22. *Considérons le jeu suivant :*

	A_2	B_2
A_1	$-15, 0$	$8, 1$
B_1	$7, 0$	$7, 1$

La stratégie B_1 du joueur 1 garantit 7, qui est le maximum que le Joueur 1 peut garantir.
La stratégie B_2 du joueur 2 garantit 1*, qui est le maximum que le Joueur 2 peut garantir.*
(B_1, B_2) est un profil de stratégies prudentes, mais ce n'est pas un équilibre de Nash. La stratégie B_2 est strictement dominante pour le Joueur 2, et (A_1, B_2) est l'unique équilibre de Nash en stratégies mixtes.
Cependant, B_1 peut être intéressant à jouer pour le joueur 1, dans la mesure où il obtient 7 même si le joueur 2 joue mal. Jouer A_1 comporte le risque que le joueur 2 se trompe et joue A_2, ce qui conduirait à un paiement très mauvais pour le joueur 1.

Une stratégie prudente peut être complètement mixte, comme le montre l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE 23. *Considérons l'exemple ci-dessous :*

	a	b
a	$3, 2$	$1, 1$
b	$0, 0$	$2, 3$

L'unique stratégie prudente du joueur 1 est $(1/2, 1/2)$*, et l'unique stratégie prudente du joueur 2 est* $(1/2, 1/2)$ *(voir plus loin pour savoir comment calculer les stratégies prudentes).*

3.2. Jeux à somme nulle.

DÉFINITION 43. *Un jeu sous forme normale à deux joueurs* $\Gamma = \{\{1, 2\}, (S_1, S_2), (g_1, g_2)\}$ *est dit* à somme nulle *si les joueurs ont des préférences parfaitement opposées :* $g_1 = -g_2$.

Par exemple, le jeu de "Pierre, Papier, Ciseaux" et le jeu du Penalty sont des jeux à somme nulle.

THÉORÈME 44. *Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies (σ_1^*, σ_2^*) est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si (σ_1^*, σ_2^*) est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a :*

$$g_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} g_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} g_1(\sigma_1, \sigma_2), \tag{2}$$

ce qui s'écrit encore avec les notations de la sous-section précédente :

$$g_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 = -v_2.$$

Ainsi, il existe un unique paiement d'équilibre de Nash, égal à $(v_1, -v_1)$*. On appelle* v_1 *la* valeur du jeu.

La valeur du jeu est donc le paiement maximal que peut garantir le joueur 1. C'est également l'opposé du paiement maximal que peut garantir le joueur 2.
L'égalité (2) du théorème ci-dessus n'est en général pas vraie en stratégies pures, comme dans le jeu du Penalty :

Exemple 24. *Considérons l'exemple suivant :*

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

On a :

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} g_1(s_1, s_2) = -1 < \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} g_1(s_1, s_2) = 1.$$

Remarque 45. *Lorsque le jeu est à somme nulle, les stratégies prudentes sont aussi appelées* stratégies optimales.

Dans un jeu à somme nulle, le calcul des stratégies prudentes et de la valeur se fait exactement de la même manière que dans les jeux à somme non nulle : on calcule les équilibres de Nash en stratégies mixtes, qui correspondent aux profils de stratégies prudentes. On en déduit les paiements d'équilibre de Nash, donc la valeur.
Dans un jeu à somme non nulle, le calcul des stratégies prudentes du joueur i se fait en remplaçant les paiements de l'autre joueur par $-g_i$. Ainsi, dans l'exemple 23, pour calculer les stratégies prudentes du Joueur 1, il suffit de calculer les Nash du jeu à somme nulle suivant :

	a	b
a	$3, -3$	$1, -1$
b	$0, 0$	$2, -2$

Les stratégies prudentes du Joueur 1 sont alors toutes les stratégies du Joueur 1 qui font partie d'un équilibre de Nash.

Chapitre 3

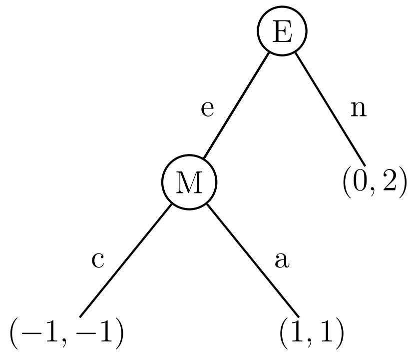
Jeux sous forme extensive

Les jeux sous forme normale donnent une représentation adéquate de joueurs effectuant des choix de stratégies simultanés. Dans ces jeux, aucun joueur n'a d'information sur les stratégies utilisées par les autres joueurs au moment de faire ses choix. Dans de nombreuses situations au contraire, les joueurs effectuent leurs choix en fonction d'une situation observée qui dépend en particulier des choix précédents des autres joueurs. C'est par exemple le cas pour une enchère croissante, dans une négociation, au jeu d'échecs, au Poker...

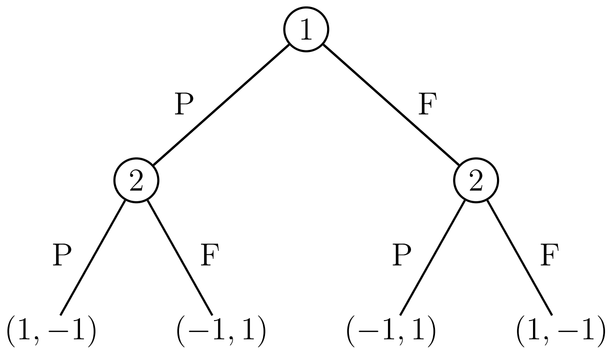
Pour représenter ces possibilités, nous introduisons la représentation d'un jeu sous forme d'un arbre, dite *représentation sous forme extensive*.

1. Exemples préliminaires

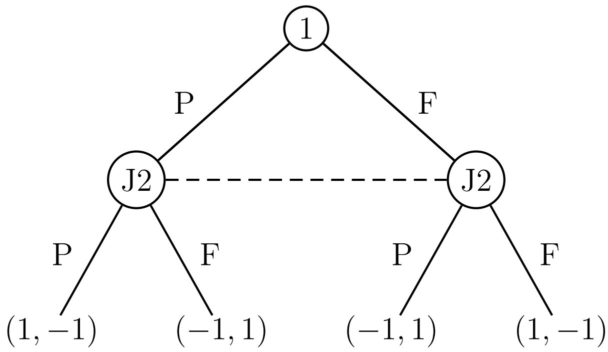
1.1. Jeu d'entrée. Une firme M est en situation de monopole sur un marché. Une autre firme E peut décider d'entrer (e) ou non (n) sur le marché. Si la firme E décide d'entrer, la firme M peut alors soit combattre (c), soit s'accommoder (a). Les paiements pour E et pour M sont $(0, 2)$ si E n'entre pas, $(-1, -1)$ si E entre et M combat, et $(1, 1)$ si E entre et M s'accommode. On représente ce jeu par l'arbre suivant :



1.2. Pile ou face. Le joueur 1 choisit pile ou face, le joueur 2 observe le choix du joueur 1 puis choisit pile ou face. Le joueur 2 gagne si les choix sont différents, et perd si les choix sont égaux (c'est un jeu à somme nulle). On représente ce jeu par l'arbre suivant :

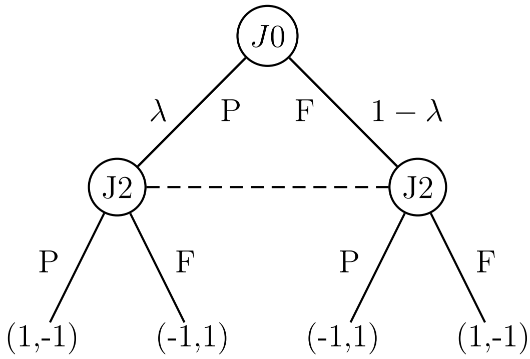


1.3. Pile ou Face sans observation. On suppose maintenant que le joueur 2 ne connaît pas le choix du joueur 1 lorsqu'il effectue son choix. Ceci peut être représenté à l'aide d'un ensemble d'information (pointillés) :



L'ensemble d'information du joueur 2 comprend ses deux nœuds de décision. Ceci signifie que le joueur 2 ne différencie pas ces deux nœuds. Il doit effectuer un choix indépendant de celui effectué précédemment par le joueur 1. Cela est équivalent à un choix simultané, étant donné que le joueur 2 n'observe pas le choix du joueur 1.

1.4. Pile ou Face contre la nature. Cette fois-ci, il n'y a pas de joueur 1, mais le joueur 2 joue contre la Nature qui tire une pièce de monnaie, Pile ou Face, avec probabilités λ et $1 - \lambda$. On représente la Nature par le *Joueur 0*. Le joueur 0 n'a pas d'intérêt stratégique ni de paiement : il sert simplement à représenter le caractère aléatoire des résultats du jeu.



2. Définitions

2.1. Jeu sous forme extensive. On définit tout d'abord la notion d'arbre avant d'introduire la définition d'un jeu sous forme extensive.

Définition 46. *Un* arbre $\mathcal{A}$ *est un triplet* (Z, r, θ) *où :*
— Z *est un ensemble fini de noeuds ;*
— r *est un noeud particulier appelé racine ;*
— $\theta\,:\,Z\setminus\{r\}\to Z$ *est l'application prédécesseur ;*
— *tous les noeuds sont reliés à la racine, c'est-à-dire :*

$$\forall z\in Z,\ \exists n\in\mathbb{N}\ \textit{tel que}\ \theta^n(z)=r.$$

De façon équivalente, il n'y a pas de cycle.
On note $S(z)=\{z'\in Z\ :\ \exists n\in\mathbb{N}\,\theta^n(z')=z\}$ *l'ensemble de tous les successeurs (directs ou indirects) de* z*. L'ensemble des noeuds sans successeurs est noté* T *: c'est l'ensemble des noeuds terminaux.*

Définition 47. *Un* jeu sous forme extensive à information imparfaite Γ *est donné par :*
— *un nombre fini de joueurs* N *;*
— *un arbre* $\mathcal{A}=(Z,r,\theta)$ *;*
— *une partition* $\{Z_i, i\in[|1,N|]\}$ *de* $Z\setminus T$ *: si* $z\in Z_i$*, c'est le Joueur* i *qui joue au noeud* z *;*
— *pour chaque noeud* $z\in Z\setminus T$*, un ensemble fini d'actions* $A(z)$*,*
— *Pour chaque noeud* $z\in Z\setminus T$ *et action* $a\in A(z)$*, un successeur* $Sc(z,a)$ *de* z*,*
— *Pour chaque noeud* $z\in Z_0$ *(noeuds contrôlés par le Joueur 0, dit aussi Joueur hasard), une distribution de probabilité* $D(z)$ *sur* $A(z)$*,*
— *Pour tout* $i\in||1,N|]$*, une partition de* Z_i *en sous-ensembles appelés ensembles d'information, tel que si* z *et* z' *sont dans le même ensemble d'infor-*

mation, alors $A(z) = A(z')$. On note $u(z)$ l'ensemble d'information contenant z ;

— *Une fonction de paiement $g : T \to \mathbb{R}^N$.*

2.2. Déroulement de la partie.

(1) Soit i le joueur tel que $r \in Z_i$.
   - Si $i = 0$, une action a_1 est tirée suivant la distribution $D(r)$, et le jeu va dans le noeud $z_2 = Sc(r, a_1)$.
   - Si $i \neq 0$, le joueur i choisit une action $a_1 \in A(r)$, et le jeu va dans le noeud $z_2 = Sc(r, a_1)$.

(2) Inductivement, soit $i \in [|1, N|]$ tel que $z_t \in Z_i$.
   - Si $i = 0$, une action a_t est tirée suivant la distribution $D(z_t)$, et le jeu va dans le noeud $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$.
   - Si $i \neq 0$: le joueur i est informé de $u(z_t)$ mais ne connaît pas forcément z_t. Il choisit $a_t \in A(z_t)$, et le nouveau noeud est $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$.

(3) Soit $t \in T$ le noeud terminal atteint par cette procédure. Chaque joueur i reçoit le paiement $g_i(t)$.

Vocabulaire : La suite des noeuds $(z_1, z_2, ...)$ visités au cours du jeu est appelée une *partie* du jeu.

Définition 48. *On dit qu'un jeu est à* information parfaite *lorsque chaque ensemble d'information est un singleton.*

Des exemples de jeux à information parfaite sont fournis par les jeux d'échecs, de Go, et par le jeu d'entrée précédent.

2.3. Stratégies. Lorsqu'un joueur décide d'une action dans un noeud, il ne connaît pas forcément le noeud où il se trouve. Il connaît cependant l'ensemble d'information auquel ce noeud appartient. Pour décrire la manière de jouer d'un joueur, il faut donc décrire quelle action il choisit en fonction de l'ensemble d'information où il se trouve.

Définition 49. *Soit $i \in [|1, N|]$. Une stratégie (pure) s_i du joueur i associe à chacun de ses ensembles d'information $u(z)$ ($z \in Z_i$) une action $a \in A(z)$.*
On note S_i l'ensemble des stratégies (pures) du joueur i.

Remarque 50. *Soulignons que le joueur doit choisir la même action dans tous les noeuds appartenant au même ensemble d'information ; il ne fait pas la différence entre ces noeuds.*

Maintenant qu'on a défini les stratégies, on peut définir le paiement associé à un profil de stratégies.

DÉFINITION 51. *Un profil de stratégies (pures) $s = (s_1, s_2, ..., s_N)$ induit une partie (aléatoire), donc un paiement (aléatoire). On note $g(s) \in \mathbb{R}^N$ l'espérance de ce paiement aléatoire. On appelle réduction sous forme normale le triplet (N, S, g).*

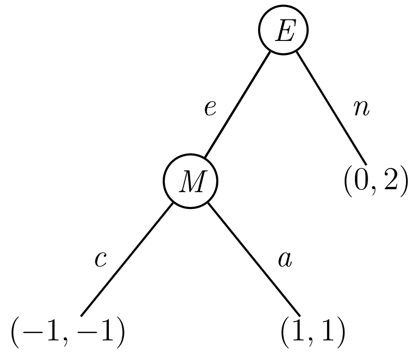
REMARQUE 52. *Même si les joueurs utilisent des stratégies pures, le paiement du jeu peut être aléatoire, du fait du Joueur 0. Comme d'habitude, lorsqu'on met le jeu sous forme normale, on prend comme paiement du jeu l'espérance du paiement.*

Une fois qu'on a transformé un jeu sous forme extensive en jeu sous forme normale, on peut lui appliquer les concepts étudiés lors des chapitres 1 et 2, notamment le concept d'équilibre de Nash en stratégies pures et mixtes.

DÉFINITION 53. *(Equilibre de Nash) On définit un équilibre de Nash (en stratégies pures ou mixtes) d'un jeu sous forme extensive comme étant un équilibre de Nash (en stratégies pures ou mixtes) de sa forme normale.*

REMARQUE 54. *D'après le théorème de Nash, tout jeu sous forme extensive admet donc un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

EXEMPLE 25. *Reprenons le jeu d'entrée du début :*

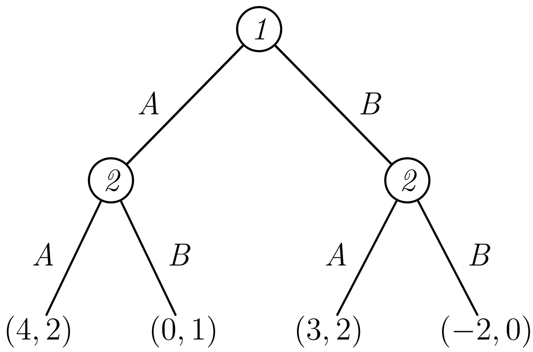


La forme normale associée de ce jeu est :

E / M	c	a
e	$(-1, -1)$	$(1, 1)$
n	$(0, 2)$	$(0, 2)$

Il y a donc deux équilibres de Nash en stratégies pures : (e, a) et (n, c), et une infinité d'équilibres en stratégies mixtes : outre (e, a), tout profil de la forme $(n, x \cdot c + (1 - x) \cdot a)$, avec $x \geq 1/2$, est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

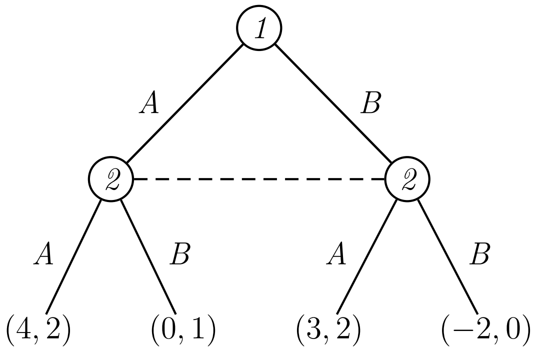
EXEMPLE 26. *Considérons le jeu représenté par l'arbre suivant :*



La forme normale associée de ce jeu est :

	AA	AB	BA	BB
A	$(4,2)$	$(4,2)$	$(0,1)$	$(0,1)$
B	$(3,2)$	$(-2,0)$	$(3,2)$	$(-2,0)$

A titre d'exercice, on peut chercher les équilibres en stratégies pures et mixtes du jeu ci-dessus. Modifions désormais l'exemple ci-dessus en ajoutant un ensemble d'information pour le joueur 2 comme suit :



On se retrouve avec uniquement deux stratégies pures pour le joueur 2, A et B : ce jeu est équivalent à un jeu simultané entre les joueurs 1 et 2.

2.4. Compter les stratégies pures. Une question que redoute un certain nombre d'étudiants est la suivante : étant donné un jeu sous forme extensive, combien de stratégies ont chaque joueur ?
Pour compter les stratégies d'un joueur, il suffit de déterminer quels sont les ensembles d'information et les actions de ce joueur. En effet, notons $u_1, u_2, ..., u_p$ les p

ensembles d'information de ce joueur ($p \geq 1$). Pour $k \in [|1, p|]$, soit n_k le nombre d'actions de ce joueur dans l'ensemble d'information u_k (rappelons que le nombre d'actions disponibles dans un noeud ne dépend que de l'ensemble d'information dans lequel ce noeud se trouve). Une stratégie associe une action à chaque ensemble d'information. Pour $k \in [|1, p|]$, dans l'ensemble d'information u_k, le joueur a n_k choix possibles. Il a donc en tout $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ stratégies.
Par exemple, si un joueur a 3 ensembles d'information avec 2 actions dans les 2 premiers et 3 dans le troisième, alors le nombre de stratégies est $2 \times 2 \times 3 = 12$ stratégies.

2.5. Stratégies de comportement. Une stratégie mixte dans un jeu sous forme extensive peut être vue de la manière suivante : au début du jeu, un joueur choisit aléatoirement une stratégie pure, puis joue cette stratégie pure pendant tout le jeu. Or, le nombre de stratégies pures d'un jeu sous forme extensive grandit de manière exponentielle avec le nombre d'ensembles d'information et le nombre d'actions (voir la partie précédente). Une stratégie mixte est donc souvent un objet compliqué : c'est une distribution de probabilités sur un très grand ensemble. Il est alors difficile de les étudier.
Nous allons voir un autre type de stratégie aléatoire : les *stratégies de comportement*. Lorsqu'un joueur utilise une stratégie de comportement, à chaque fois qu'il doit choisir une action au cours du jeu, il la choisit aléatoirement. La différence entre stratégie mixte et stratégie de comportement peut donc être vue de la manière suivante :

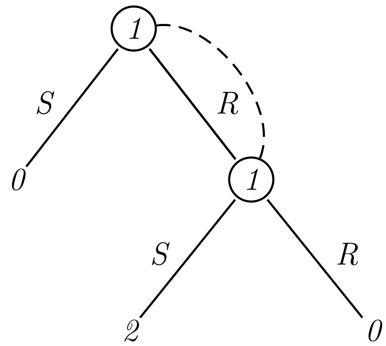
— Dans une stratégie mixte, le tirage aléatoire s'effectue une seule fois et au début du jeu, et ce tirage aléatoire s'effectue sur l'ensemble des stratégies pures, qui est souvent très grand.
— Dans une stratégie de comportement, de "petits" tirages aléatoires sont effectués à chaque fois que le joueur choisit une action. "Petits", car le nombre d'actions dans un ensemble d'information donné est souvent petit comparativement au nombre de stratégies pures.

DÉFINITION 55. *Une stratégie de comportement du Joueur i associe à chacun de ses ensembles d'information $u(z)$ ($z \in Z_i$) un élément de $\Delta(A(z))$.*

REMARQUE 56. *Soulignons que le joueur doit choisir la même distribution de probabilités sur ses actions dans tous les noeuds appartenant au même ensemble d'information ; il ne fait pas la différence entre ces noeuds.*

Un profil de stratégies de comportement induit une distribution de probabilités sur l'ensemble des noeuds terminaux, donc un paiement. On peut naturellement se demander si considérer les stratégies de comportement à la place des stratégies mixtes change la fonction de paiement. C'est le cas dans l'exemple suivant.

Exemple 27. *Considérons le cas du conducteur distrait. Une autoroute comprend deux sorties. Afin de se rendre chez lui, un automobiliste doit prendre la seconde sortie. Cependant, on suppose que le conducteur est distrait, c'est-à-dire qu'au moment de décider de sortir de l'autoroute ou d'y rester, il est incapable de déterminer s'il se trouve à la première ou a la deuxième sortie. Ce jeu est représenté par l'arbre suivant :*



Dans cette exemple, les stratégies pures ou mixtes donnent toutes un paiement 0 au joueur. Avec une stratégie de comportement, le joueur peut obtenir un paiement de $1/2$.
En effet, comme le Joueur 1 ne peut distinguer entre le premier noeud et le deuxième noeud, il est obligé de jouer la même action dans l'un et dans l'autre. Les seules stratégies pures possibles sont donc (S, S) *et* (R, R)*, qui donnent toutes deux un paiement 0. Ainsi, toute stratégie mixte donne aussi un paiement 0 (mixer entre deux stratégies qui donnent un paiement nul donne aussi un paiement nul).*
Considérons maintenant la stratégie de comportement qui consiste à jouer $1/2 \cdot S + 1/2 \cdot R$ *dans chacun des deux noeuds. Avec cette stratégie, avec probabilité* $1/4$*, le joueur joue* R *dans le premier noeud, puis* S *dans le deuxième noeud ; il obtient dans ce cas 2, et sinon, il obtient 0. En espérance, il obtient donc* $1/2$.

Ainsi, dans cet exemple, cette stratégie de comportement n'admet pas de stratégie mixte équivalente.
On peut en fait montrer que dans ce jeu, toute stratégie de comportement qui n'est pas pure n'admet pas de stratégie mixte équivalente, et vice et versa.

2.6. Hypothèse de mémoire parfaite. Dans l'exemple du conducteur distrait, le joueur oublie ce qu'il a joué au cours du jeu. Il est naturel de supposer qu'un joueur ne peut pas oublier de l'information au cours du déroulement du jeu. Notamment, ce joueur doit se rappeler tous ses choix précédents. C'est l'hypothèse dite de mémoire parfaite.

Soit $z \in Z_i$, et $h_i(z)$ la suite des ensembles d'information et des actions du Joueur i avant d'arriver au noeud z.

DÉFINITION 57. *Un jeu sous forme extensive est à mémoire parfaite si pour tout i et pour tout ensemble d'information $u(z)$ ($z \in Z_i$) du joueur i, pour tout $z, z' \in u(z)$, $h_i(z) = h_i(z')$.*

REMARQUE 58. *Tout jeu sous forme extensive à information parfaite est à mémoire parfaite.*

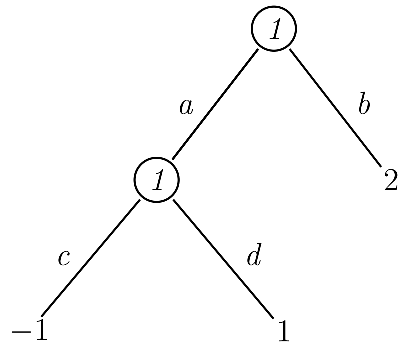
REMARQUE 59. *Dans le jeu du conducteur distrait, si z_1 désigne le premier noeud et z_2 le deuxième noeud de l'unique ensemble d'information du joueur, alors on a $h_1(z_1) = \emptyset$ et $h_1(z_2) = \{u(z_1), R\}$. On a donc $h_1(z_1) \neq h_1(z_2)$, et le jeu n'est pas à mémoire parfaite.*

DÉFINITION 60. *Deux stratégies σ_i et σ_i' (mixtes ou de comportement) sont dites équivalentes lorsque pour toute stratégie σ_{-i} des autres joueurs (mixtes ou de comportement), (σ_i, σ_{-i}) et (σ_i', σ_{-i}) induisent la même distribution de probabilités sur les noeuds terminaux (et donc les mêmes paiements).*

THÉORÈME 61. *(Kuhn) Supposons qu'un jeu sous forme extensive soit à mémoire parfaite. Alors*
- *Toute stratégie mixte admet une stratégie de comportement qui lui est équivalente,*
- *toute stratégie de comportement admet une stratégie mixte qui lui est équivalente.*

Par la suite, **on ne considérera que des jeux à mémoire parfaite**.

EXEMPLE 28. *Considérons le jeu sous forme extensive à information parfaite et à un seul joueur représenté par l'arbre suivant :*



L'ensemble des stratégies pures du joueur 1 est : $\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$. On remarque que les deux stratégies (b,c) et (b,d) aboutissent au même noeud (de paiement 2). Elles sont donc équivalentes.

3. Induction en amont et équilibre sous-jeu parfait

Revenons sur le jeu d'entrée de l'exemple 25. On avait trouvé un équilibre de Nash tel que dans cet équilibre, la firme M combat si l'autre entre sur le marché, et la firme E n'entre pas sur le marché. Autrement dit, la firme M menace la firme E de combattre si elle entre ; cette menace fonctionne, et la firme E n'entre pas sur le marché. Le raisonnement suivant montre que cet équilibre de Nash n'est pas forcément réaliste :

— Supposons que E ait déjà joué e. M a intérêt à jouer c plutôt que a (M est "mis devant le fait accompli").

— Ayant effectué ce raisonnement, E a intérêt à jouer e.

La menace de la firme M de jouer c n'est pas *crédible*, dans la mesure où elle n'a pas intérêt à l'exécuter. Pour éviter ce type de situation, on va raffiner la notion d'équilibre de Nash, et introduire la notion d'*équilibre sous-jeu parfait.*

3.1. Notion de sous-jeu.

Définition 62. *Soit $z_* \in Z \setminus T$ et soit $Z_* \subset Z$ l'ensemble des noeuds composant le sous-arbre de racine z_*. Supposons que l'une des deux propriétés suivantes sont vérifiées : soit $z_* \in Z_0$ (noeud contrôlé par le Joueur 0), ou alors pour tout $z \in Z_*$, $u(z) \subset Z_*$. Alors le jeu sous forme extensive associé à ce sous-arbre est appelé sous-jeu partant de z_*.*

Remarque 63. *En particulier, un jeu sous forme extensive est un sous-jeu de lui-même. Tout jeu admet par conséquent au moins un sous-jeu !*

Remarque 64. *Dans un jeu à information parfaite, on a autant de sous-jeux que de nœuds non terminaux.*

On peut maintenant définir la notion d'équilibre sous-jeu parfait.

Définition 65. *Un profil de stratégies σ est un équilibre sous-jeu parfait si σ induit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.*

Remarque 66. *Un équilibre sous-jeu parfait est un équilibre de Nash.*

Exemple 29. *Revenons au jeu d'entrée du début et cherchons les équilibres sous-jeu parfait. Notons tout d'abord que le jeu d'entrée admet deux sous-jeux, à savoir lui-même et le sous-jeu après M. Un équilibre de Nash du jeu d'entrée est donc sous-jeu parfait si et seulement si il induit un équilibre de Nash dans le sous-jeu après M.*

Considérons donc le sous-jeu après M. Dans ce sous-jeu, il n'y a qu'un seul joueur (la firme M), qui n'a qu'un choix à faire, choisir c ou a. Il n'y a donc que deux profils de stratégies pures dans ce sous-jeu, à savoir c ou a (comme il n'y a qu'un joueur, un profil de stratégies correspond simplement à une stratégie du joueur). Ce sous-jeu n'a qu'un équilibre de Nash, à savoir a.
L'équilibre de Nash (e, a) du jeu d'entrée induit la stratégie a dans le sous-jeu après M, qui est bien un Nash de ce sous-jeu. L'équilibre de Nash (e, a) est donc sous-jeu parfait.
Au contraire, l'équilibre de Nash (n, c) du jeu d'entrée induit la stratégie c dans le sous-jeu après M, qui n'est pas un Nash de ce sous-jeu. L'équilibre de Nash (n, c) n'est donc pas un équilibre sous-jeu parfait.
Quant aux équilibre mixtes de la forme $(n, x \cdot c + (1-x) \cdot a)$, avec $1/2 \leq x \leq 1$, ils ne sont pas non plus sous-jeu parfait, car ils induisent la stratégie $x \cdot c + (1-x) \cdot a$ dans le sous-jeu après M.

On voit donc que la notion de sous-jeu parfait permet d'éliminer les Nash qui sont basés sur une menace non crédible : la firme M n'ayant pas intérêt à jouer c si le jeu arrive dans le noeud M, il est peu probable que la firme E accorde crédit à cette menace et joue n.

3.2. Existence d'équilibre sous-jeu parfait et induction en amont. On s'intéresse dans cette section à des résultats d'existence d'équilibres sous-jeu parfaits.

Théorème 67. *(Zermelo) Tout jeu sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies pures.*

Dans le cas du jeu d'échecs, le théorème de Zermelo donne le résultat suivant :
— soit un joueur a une stratégie gagnante ;
— soit chacun des joueurs peut se garantir pat (partie nulle).
Pourquoi joue-t-on encore aux échecs ? Car on ne sait pas calculer les stratégies optimales...
La preuve de ce résultat est similaire à la preuve du résultat suivant.

Théorème 68. *Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc en stratégies de comportement).*

Démonstration. Preuve : par "induction en amont". On raisonne par récurrence sur la taille de l'arbre n.
— Pour $n = 1$: OK.
— Pour $n \geq 2$. On identifie un sous-jeu de taille minimale,

— Ce sous-jeu admet un équilibre de Nash, et comme il est de taille minimale, c'est aussi un équilibre sous-jeu parfait,
— On remplace le sous-jeu par ce paiement de Nash,
— Le nouveau jeu a un équilibre sous-jeu parfait par hypothèse de récurrence.

□

On déduit de cette preuve une méthode générale pour trouver les équilibres sous-jeu parfaits :
— Identifier un sous-jeu minimal,
— Calculer un équilibre de Nash de ce sous-jeu,
— Remplacer ce sous-jeu par un noeud terminal dont le paiement est celui de l'équilibre de Nash,
— Recommencer cette procédure.

Remarque 69. *Il peut arriver qu'à un moment de la procédure, le sous-jeu de taille minimale admette plusieurs équilibres de Nash. C'est notamment le cas lorsque dans un noeud, un joueur a deux actions qui lui rapportent le même paiement. Dans ce cas, on choisit un des équilibres de Nash, et on continue la procédure ; une fois qu'on a déterminé un équilibre sous-jeu parfait, on recommence à l'endroit où on avait choisi un des équilibres de Nash, et on en choisit un autre ; et ainsi de suite.*

Remarque 70. *Dans le cas d'un jeu à information parfaite, la procédure d'induction en amont est aisé à mettre en place. En effet, chaque sous-jeu minimal consiste en un jeu à un joueur, où le joueur n'a qu'un seul noeud de décision. Dans le cas d'un jeu à information imparfaite, un sous-jeu minimal peut être beaucoup plus complexe.*

Chapitre 4

Équilibres corrélés

Dans ce chapitre, on considère des situations où avant que le jeu ne commence, les joueurs peuvent recevoir des messages de la part d'un individu extérieur appelé *médiateur*. La réception de ces messages peut notamment permettre une meilleure coordination stratégique des joueurs. On étudie dans quelle mesure l'envoi de ces messages affecte les conditions d'équilibre, ce qui nous conduira à définir la notion d'*équilibre corrélé*.

1. Deux exemples

EXEMPLE 30. *Split or Steal ?*

	P	V
P	$1,1$	$0,2$
V	$2,0$	$0,0$

Ce jeu possède 3 équilibres de Nash, de paiements respectifs $(2,0)$, $(0,2)$ et $(0,0)$. En terme de bien-être social, ces trois issues du jeu ne sont pas très satisfaisantes. Il paraît plus juste que chacun des joueurs obtienne 1. Or, (P,P) n'est pas un équilibre de Nash. Une manière équitable de jouer serait que le Nash (P,V) soit joué avec probabilité $1/2$, et le Nash (V,P) avec probabilité $1/2$. Le problème est qu'il n'existe aucun profil de stratégies mixtes $(\sigma,\tau) \in \Delta(\{P,V\})^2$ qui induise une distribution de probabilité $\frac{1}{2}\cdot(P,V)+\frac{1}{2}\cdot(V,P)$ sur l'ensemble des profils de stratégies ! En effet, si le Joueur 1 joue P avec probabilité $x \in [0,1]$, et le Joueur 2 joue P avec probabilité $y \in [0,1]$, alors :

— le profil (P,P) est joué avec probabilité xy,
— le profil (P,V) est joué avec probabilité $x(1-y)$,
— le profil (V,P) est joué avec probabilité $y(1-x)$,
— le profil (V,V) est joué avec probabilité $(1-x)(1-y)$.

Ainsi, pour que (P,V) et (V,P) soient joués avec probabilité strictement positive, il faut que $0<x<1$ et $0<y<1$, mais dans ce cas (P,P) et (V,V) sont aussi joués avec probabilité strictement positive.

Pour contourner ce problème, les joueurs peuvent décider de jouer de la façon suivante :

— Un joueur (ou un individu extérieur appelé médiateur) tire une pièce au vu et au su de tous.

— Si c'est pile, J1 joue P et J2 joue V ; Si c'est face, J1 joue V et J2 joue P.

Aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de cette procédure. En effet, supposons que J2 suive la procédure et regardons si J1 a intérêt à la suivre aussi. Si (P, V) est annoncé par le médiateur, alors J2 joue V, et P est bien une meilleure réponse à V. Si (V, P) est annoncé par le médiateur, alors J2 joue P, et V est bien une meilleure réponse à P. J1 n'a donc pas intérêt à dévier de la procédure, et par symétrie J2 non plus.
On dit alors que cette procédure est un *équilibre corrélé public*.

Remarque 71. *On peut représenter le jeu avec médiateur sous forme extensive (cf cours). Le profil de stratégies où chaque joueur suit toujours le médiateur est un équilibre de Nash de ce jeu.*

Exemple 31. *Travailler ou Paresser ?*

	T	P
T	$6,6$	$2,7$
P	$7,2$	$0,0$

— **Equilibres de Nash :** il y a trois équilibres de Nash, de paiements respectifs $(2,7)$, $(7,2)$ (purs) et $\left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ (mixte).

— **Equilibres corrélés publics :** Les paiements associés aux équilibres corrélés publics correspondent à l'enveloppe convexe de $(2,7)$ et $(7,2)$, c'est-à-dire à l'ensemble $\{(2x + 7(1-x), 7x + 2(1-x)), x \in [0,1]\}$ (exercice, ou conséquence directe de la Proposition 76, énoncée plus loin).

Même en ayant recours à un médiateur qui envoie des signaux publics, on n'arrive pas à obtenir un équilibre où la somme des paiements des joueurs est plus grande que 9. Considérons maintenant le cas d'un médiateur qui envoie des signaux privés. Considérons la procédure suivante :

— Un médiateur neutre tire **de manière privée** $(s_1, s_2) \in \{T, P\}^2$ suivant la loi $\pi = \frac{1}{3} \cdot (T,T) + \frac{1}{3} \cdot (T,P) + \frac{1}{3} \cdot (P,T)$. Les joueurs connaissent π, mais n'observent pas la réalisation de π.

— Le médiateur envoie **de manière privée** s_1 à J1 et s_2 à J2,

— J1 joue s_1 et J2 joue s_2.

De même que précédemment, aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de cette procédure. Vérifions-le. Supposons que J2 suive cette procédure, et regardons si J1 a également intérêt à la suivre.

— 1er cas : J1 reçoit la recommandation T. Il sait que J2 suit sa recommandation ; or, conditionnellement au fait que J1 ait reçu la recommandation T, J2 a reçu la recommandation T avec probabilité $1/2$, et la recommandation P avec probabilité $1/2$. Si J1 joue T, son paiement espéré (conditionnellement à avoir reçu la recommandation T) est donc 4, et s'il joue P, son paiement espéré (conditionnellement à avoir reçu la recommandation T) est $7/2$. J1 a donc intérêt à suivre la recommandation.

— 2ème cas : J1 reçoit P. Il est alors certain que J2 a reçu T, donc il a intérêt à jouer P.

Par symétrie, J2 n'a pas non plus intérêt à dévier unilatéralement de la procédure. On parle d'*équilibre corrélé*. Il donne un paiement $(5,5)$, donc la somme des paiements est plus grande que 9 : cette procédure permet d'améliorer le bien-être social à l'équilibre.

REMARQUE 72. *De même que pour la corrélation publique, le jeu avec corrélation privée peut se représenter sous forme extensive (cf cours).*

En s'inspirant de ces exemples, dans toute la suite, on s'attachera à répondre aux questions suivantes :

— Comment écrire de manière formelle les mécanismes de corrélation publique et privée sous la forme d'un jeu ?
— Quelles distributions de probabilité sur les profils de stratégies pures peut-on obtenir à l'équilibre avec de la corrélation publique ou privée ?
— Quelle est le lien entre les distributions sur les profils de stratégies générées par les équilibres de Nash en stratégies mixtes et celles mentionnées dans la question précédente ?

2. Formalisme

2.1. Corrélation publique. Soit $G = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale et $\pi \in \Delta(S)$. On considère le jeu (sous forme extensive) $[G, \pi]$ suivant :

— **étape 0 :** Le médiateur tire $s \in S$ selon la loi π et envoie la recommandation s à tous les joueurs.
— **étape 1 :** les joueurs jouent dans le jeu G.

Pour chaque $s \in S$, considérons une copie $G[s]$ de la représentation sous forme extensive de G.

La représentation de $[G, \pi]$ sous forme extensive est la suivante :

— L'arbre est formé d'une racine et des sous-arbres $G[s], s \in S$ qui lui sont reliés,
— La racine est contrôlée par le Joueur 0,
— La probabilité de passer de la racine au sous-arbre $G[s]$ est $\pi(s)$.

Chaque joueur connaît la réalisation du profil choisi par le médiateur, donc chaque joueur a $|S|$ (cardinal de S) ensembles d'information. Comme n'importe quel jeu sous forme extensive, on peut alors mettre $[G, \pi]$ sous forme normale : une stratégie (pure) du joueur i dans $[G, \pi]$ est donc une fonction de S dans S_i.

REMARQUE 73. *Soit S' l'ensemble des profils $s \in S$ tels que $\pi(s) > 0$. Dans la forme extensive de $[G, \pi]$, on pourrait se contenter de mettre les sous-arbres $G[s]$ tels que $\pi(s) > 0$: cela ne change rien aux aspects stratégiques du jeu. Une stratégie d'un joueur devient alors une fonction de S' dans S_i.*

Dans les deux exemples de la section précédente, on a évoqué informellement la stratégie d'un joueur qui consiste à "toujours suivre la recommandation du médiateur". On peut maintenant formaliser cette stratégie.

DÉFINITION 74. *Soit $i \in [|1, N|]$, et soit $\sigma_i^* : S \to S_i$ défini par : pour tout $s \in S$, $\sigma_i^*(s) = s_i$. Cette stratégie du jeu $[G, \pi]$ est dite "stratégie obéissante" : elle consiste à toujours suivre la recommandation du médiateur.*
Le profil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_N^*)$ est dit "profil obéissant" : dans ce profil, tout le monde suit toujours la recommandation du médiateur.

DÉFINITION 75. *On dit que $\pi \in \Delta(S)$ est une distribution d'équilibre corrélé public de G si σ^* est un équilibre de Nash de $[G, \pi]$.*

— On note $DECP(G)$ l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés publics de G.
— Informellement, π est une distribution d'équilibre corrélé public si "tout le monde suit toujours la recommandation" est un équilibre de Nash de $[G, \pi]$.
— On dira aussi que σ^* est un *équilibre corrélé public* de G pour π.

L'ensemble des distributions d'équilibres corrélés publics se caractérise de manière très simple par la proposition suivante :

PROPOSITION 76. *$\pi \in \Delta(S)$ est une distribution d'équilibre corrélé public si et seulement si pour tout profil de stratégies s vérifiant $\pi(s) > 0$, s est un équilibre de Nash pur :*

$$DECP(G) = \Delta(NE_{pur}).$$

DÉMONSTRATION. On donne l'intuition du résultat ; pour une preuve plus formelle, cf cours.
Soit π une distribution d'équilibre public, et soit s un profil de stratégies annoncé avec probabilité strictement positive par le médiateur. Comme $\pi \in DECP(G)$, le profil obéissant σ^* est un Nash de $[G, \pi]$. Sous ce profil de stratégies, lorsque s est annoncé, les joueurs jouent s. Si s n'était pas un Nash, un joueur aurait une déviation qui lui rapporte strictement mieux, et donc σ^* ne serait pas un Nash de $[G, \pi]$.

On a donc montré que $DECP(G) \subset \Delta(NE_{pur})$.
Soit $\pi \in \Delta(NE_{pur})$. Supposons que $s \in S$ est tiré suivant π et annoncé par le médiateur. Comme $s \in NE_{pur}$, aucun joueur n'a intérêt à désobéir unilatéralement de s : σ^* est donc bien un Nash de $[G, \pi]$. On a donc montré que $\Delta(NE_{pur}) \subset DECP(G)$, ce qui conclut la preuve. □

2.2. Corrélation privée. Soit $G = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale et $\pi \in \Delta(S)$. On considère le jeu (sous forme extensive) $[G, \pi]$ suivant :

— **étape 0 :** Le médiateur tire $s \in S$ **de manière privée** selon la loi π et envoie à chaque joueur i la recommandation privée s_i.
— **étape 1 :** les joueurs jouent dans le jeu G.

Pour chaque $s \in S$, considérons une copie $G[s]$ de la représentation sous forme extensive de G. La représentation de $[G, \pi]$ sous forme extensive est la suivante :

— L'arbre est formé d'une racine et des sous-arbres $G[s], s \in S$ qui lui sont reliés,
— La racine est contrôlée par le Joueur 0,
— La probabilité de passer de la racine au sous-arbre $G[s]$ est $\pi(s)$,
— Chaque joueur i a $|S_i|$ ensembles d'information ; étant donné $s_i \in S_i$, tous les noeuds du Joueur i qui appartiennent à un sous-arbre du type $G[s_i, s_{-i}]$ $(s_{-i} \in S_{-i})$ sont dans le même ensemble d'information.

Comme n'importe quel jeu sous forme extensive, on peut alors mettre $[G, \pi]$ sous forme normale : une stratégie (pure) du joueur i dans $[G, \pi]$ est donc une fonction de S_i dans S_i.

2.3. Distribution d'équilibre corrélé.

DÉFINITION 77. *Soit $i \in [|1, N|]$, et soit $\sigma_i^* : S_i \to S_i$ défini par : pour tout $s_i \in S_i$, $\sigma_i^*(s_i) = s_i$. Cette stratégie du jeu $[G, \pi]$ est dite "stratégie obéissante" : elle consiste à toujours suivre la recommandation du médiateur.*
Le profil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_N^*)$ est dit "profil obéissant" : dans ce profil, tout le monde suit toujours la recommandation du médiateur.

DÉFINITION 78. *On dit que $\pi \in \Delta(S)$ est une distribution d'équilibre corrélé de G si σ^* est un équilibre de Nash de $[G, \pi]$.*

— On note $DEC(G)$ l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés de G.
— Informellement, π est une distribution d'équilibre corrélé si "tout le monde suit toujours la recommandation" est un équilibre de Nash de $[G, \pi]$.
— On dira aussi que σ^* est un *équilibre corrélé* de G pour π.

Remarque 79. *On pourrait se demander pourquoi on n'appelle pas plutôt ces distributions "distributions d'équilibres corrélés privés". En fait, nous allons voir que toute distribution d'équilibre corrélé public est aussi une distribution d'équilibre corrélé.*
La raison en est simple. Fixons une distribution $\pi \in \Delta(S)$ utilisée par le médiateur. Dans le cas d'une corrélation publique, les joueurs ont plus d'information que dans le cas d'une corrélation privée (dans le premier cas, ils connaissent les recommandations de tous les joueurs, dans le second cas, ils connaissent seulement leur propre recommandation). Dans le cas d'une corrélation publique, les joueurs ont donc un ensemble de stratégies plus riche que dans le cas d'une corrélation privée. La condition d'équilibre de Nash "pas de déviation unilatérale profitable" est donc une condition plus contraignante dans le cas d'une corrélation publique ; si cette condition est vérifiée dans le jeu avec corrélation publique (avec distribution π), alors elle est vérifiée dans le jeu avec corrélation privée (avec distribution π).

La proposition suivante permet de calculer efficacement les distributions d'équilibre corrélées d'un jeu matriciel donné.

Proposition 80. *$\pi \in DEC(G)$ si et seulement si : $\forall i \in [|1, N|], \forall s_i, t_i \in S_i$:*

$$\sum\nolimits_{s_{-i} \in S_{-i}} [g_i(s_i, s_{-i}) - g_i(t_i, s_{-i})]\pi(s_i, s_{-i}) \geq 0. \tag{3}$$

Démonstration. Si s_i est annoncé par le médiateur avec probabilité strictement positive (formellement, $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) > 0$), alors la formule (3) équivaut à :

$$\sum\nolimits_{s_{-i} \in S_{-i}} g_i(s_i, s_{-i})\pi(s_{-i}|s_i) \geq \sum\nolimits_{s_{-i} \in S_{-i}} g_i(t_i, s_{-i})\pi(s_{-i}|s_i), \tag{4}$$

où $\pi(s_{-i}|s_i)$ est la loi conditionnelle de s_{-i} sachant s_i.
Cette formule s'interprète de la manière suivante : supposons que le joueur i reçoive la recommandation s_i, et supposons que les autres joueurs suivent la recommandation du médiateur. Conditionnellement à avoir reçu s_i, la croyance du joueur i sur ce que vont jouer les autres joueurs est la distribution de probabilité $\pi(.|s_i) \in \Delta(S_{-i})$. Si le joueur i suit la recommandation s_i, son paiement espéré est donc le terme de gauche de la formule (4). Si le joueur i dévie en jouant t_i, son paiement espéré est le terme de droite.
Cette formule est donc une condition nécessaire et suffisante pour que le joueur i ait intérêt à suivre la recommandation s_i, sachant que les autres joueurs jouent la stratégie obéissante. Le joueur i a donc intérêt à jouer la stratégie obéissante dans $[G, \pi]$ (sachant que les autres jouent la stratégie obéissante) si et seulement si pour tout s_i annoncé avec probabilité strictement positive, la formule (4) est vérifiée, et on en déduit la proposition. $\square$

De cette proposition, nous allons pouvoir établir les liens entre équilibre de Nash en stratégies mixtes, distributions d'équilibres corrélés publics et distributions d'équilibres corrélés.
Soit $\sigma \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \times ...\Delta(S_N)$ un profil de stratégies mixtes du jeu G. Le profil σ induit une distribution $\pi \in \Delta(S)$ sur les profils de stratégies pures de G, définie par :

$$\forall s \in S, \quad \pi(s) = \prod_{j=1}^{N} \sigma_j(s_j).$$

Par exemple, dans le jeu "Split or Steal", si chaque joueur joue $\frac{1}{2} \cdot P + \frac{1}{2} \cdot V$, alors la distribution induite sur S est $\pi = \frac{1}{4} \cdot (P, P) + \frac{1}{4} \cdot (P, V) + \frac{1}{4}(V, P) + \frac{1}{4} \cdot (V, V)$. Lorsque σ est un équilibre de Nash (mixte), on dira que π est une *distribution d'équilibre de Nash* (mixte).
La proposition ci-dessus a plusieurs conséquences théoriques importantes.

Corollaire 81.

(1) L'ensemble des distributions d'équilibres corrélés est convexe.

(2) Toute distribution d'équilibre corrélé public est une distribution d'équilibre corrélé : $DECP(G) \subset DEC(G)$.

(3) Toute distribution d'équilibre de Nash (mixte) est une distribution d'équilibre corrélé.

Ainsi, les distributions d'équilibres corrélées construites avec de la corrélation publique peuvent aussi l'être avec de la corrélation privée.
De plus, toutes les distribution d'équilibre de Nash peuvent être générés avec de la corrélation privée. La notion de distribution d'équilibre corrélé généralise donc la notion de distribution d'équilibre de Nash. La corrélation permet donc de générer un plus grand nombre d'équilibres, ce qui peut être intéressant notamment lorsqu'on cherche à obtenir des équilibres qui donnent un meilleur bien-être social.

Démonstration.

(1) Soit $\lambda \in [0, 1]$, et $\pi, \pi' \in DEC(G)$. Comme π et π' vérifient la formule (3), par linéarité de la somme, $\lambda\pi + (1 - \lambda)\pi'$ vérifie aussi la formule (3).

(2) On sait que $DECP(G) = \Delta(NE_{pur})$. Comme $DEC(G)$ est convexe, pour montrer le résultat, il suffit donc de montrer que $NE_{pur} \subset DEC(G)$. Soit $s \in NE_{pur}$. Lorsque $\pi = s$ (c'est-à-dire : π est la distribution qui met une probabilité 1 sur s), la formule (3) est équivalente à :

$$\forall i \in [|1, N|], \quad \forall t_i \in S_i, \quad g_i(s_i, s_{-i}) - g_i(t_i, s_{-i}) \geq 0,$$

ce qui est la définition de l'équilibre de Nash en stratégies pures.

(3) Soit σ un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Soit $\pi \in \Delta(S)$ la distribution induite : $\pi(s) = \prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j)$. La formule (3) s'écrit

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}[g_i(s_i, s_{-i}) - g_i(t_i, s_{-i})] \prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j) \geq 0, \tag{5}$$

ce qui s'écrit encore : $\forall i \in [|1, N|], \quad \forall t_i \in S_i$

$$[g_i(s_i, \sigma_{-i}) - g_i(t_i, \sigma_{-i})]\sigma_i(s_i) \geq 0,$$

ce qui est vérifié puisque σ est un équilibre de Nash.

$\square$

Chapitre 5

Jeux répétés

Dans ce chapitre, nous étudions des interactions de long terme, en considérant un jeu de base sous forme normale qui est joué plusieurs fois par les mêmes joueurs : on parle alors de *jeux répétés.* A chaque étape du temps $t = 1, 2, \ldots$ (fini ou infini), les joueurs jouent le même jeu simultané et observent à la fin de chaque étape t les actions jouées par leurs adversaires à l'étape t : on parle alors de jeux répétés à *observation parfaite.* Dans ce chapitre, nous n'étudions que des jeux répétés à observation parfaite.

Dans ces situations, les incitations peuvent différer totalement par rapport aux jeux en un coup, et des phénomènes stratégiques nouveaux apparaissent : comportements sophistiqués, normes sociales, menaces, dissuasion, punitions, promesses, etc. La principale question est alors de savoir si la répétition d'une interaction facilite la coopération entre les joueurs : peut-on aboutir à des équilibres meilleurs en terme de bien-être social ?

Exemple 32. *Soit le jeu simultané sous forme normale suivant :*

	A	B
A	$(1,0)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,1)$

Dans le jeu en un coup, il y a trois paiements d'équilibres de Nash : $(1,0)$*,* $(0,0)$ *et* $(0,1)$*. Il est facile de construire un équilibre de Nash du jeu répété deux fois avec un paiement moyen de* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *: les joueurs jouent* (A,A) *à la première étape et* (B,B) *à la deuxième étape (quel que soit ce qui a été joué à l'étape 1).*
Notons que ce jeu peut être représenté sous forme extensive (cf cours), et on dénombre alors 2^5 *stratégies pour chaque joueur.*

Exemple 33.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad C \quad & \quad D \quad & \quad E \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) & (-10,-10) \\ (4,0) & (1,1) & (-10,-10) \\ (-10,-10) & (-10,-10) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

Les paiements d'équilibre de Nash du jeu en une étape sont $(1,1)$ *et* $(-10,-10)$*.*

Lorsque le jeu est répété deux fois, on peut construire un équilibre de la forme suivante :

— *A l'étape 1, chaque joueur joue C,*

— *A l'étape 2, chaque joueur joue D si (C, C) a été joué à l'étape 1, et joue E sinon.*

Notons que ce jeu peut être représenté sous forme extensive (cf cours), et on dénombre alors 3^{10} stratégies pour chaque joueur.

1. Le modèle

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in[|1,N|]}, (g_i)_{i\in[|1,N|]})$ un jeu sous forme normale : N est le nombre fini des joueurs, A_i est l'ensemble fini d'*actions* du joueur i, $g_i : A = \prod_{j=1}^{N} A_j \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de paiement du joueur i.
On parle d'*actions* plutôt que de stratégies pour désigner les décisions prises dans le jeu matriciel, et on les note A_i plutôt que S_i. On fait cela pour éviter la confusion entre stratégie du jeu matriciel et stratégie du jeu répété.

1.1. Description du jeu. Le jeu se déroule de la manière suivante : à chaque étape $t \geq 1$,

— Chaque joueur i choisit indépendamment et simultanément $a_i^t \in A_i$ (éventuellement de manière aléatoire),

— Chaque joueur i reçoit $g_i(a_1^t, a_2^t, ..., a_N^t)$,

— $(a_1^t, a_2^t, ..., a_N^t)$ est annoncé aux joueurs.

On utilisera la notation $a^t = (a_1^t, a_2^t, ..., a_N^t)$.
On souhaite maintenant mettre ce jeu sous forme normale. Pour cela, on définit d'abord ce qu'est une stratégie dans ce jeu.

1.2. Stratégies. Rappelons qu'une stratégie doit permettre de décrire les décisions d'un joueur en fonction de ce qu'il sait au moment de la prise de décision. A l'étape t, chaque joueur a connaissance de toutes les actions jouées par tous les joueurs entre les étapes 1 et $t-1$. Cela nous conduit à la définition des histoires d'un jeu :

DÉFINITION 82. *Soit $t \geq 1$. Une histoire avant l'étape t est un élément $(a^1, a^2, ..., a^{t-1}) \in A^{t-1}$.*

On peut maintenant définir les stratégies pures :

DÉFINITION 83. *Une stratégie pure s_i du joueur i associe un élément de A_i à chaque étape t et à chaque histoire $(a^1, a^2, ..., a^{t-1})$.*

Ainsi, si $h = (a^1, a^2, ..., a^{t-1})$ est une histoire avant l'étape t, $s_i(h)$ désigne l'action qu'utilise le joueur i en date t si $(a^1, a^2, ..., a^{t-1})$ a été joué aux dates 1,2,...,$t-1$.

Intéressons-nous maintenant aux stratégies aléatoires. Comme pour les jeux sous forme extensive, on peut envisager les stratégies mixtes et les stratégies de comportement.

DÉFINITION 84. *Une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur les stratégies pures.*

DÉFINITION 85. *Une stratégie de comportement du joueur i associe une probabilité sur A_i à chaque étape t et à chaque histoire $(a^1, a^2, ..., a^{t-1})$.*

En appliquant le théorème de Kuhn à la représentation sous forme extensive du jeu répété, on obtient que stratégies mixtes et stratégies de comportement sont équivalentes (au sens où on l'a défini dans le chapitre sur les jeux sous forme extensive). On considérera en général les stratégies de comportement, qui sont plus simples à manipuler. On note Σ_i l'ensemble des stratégies de comportement du joueur i et $\Sigma = \Pi_{i\in[|1,N|]}\Sigma_i$ l'ensemble des profils de stratégies de comportement.

1.3. Paiements. Pour compléter la mise sous forme normale du jeu répété, on définit la fonction de paiement. Notons d'abord qu'un profil de stratégies $\sigma \in \Sigma$ induit naturellement une mesure de probabilités sur l'ensemble des suites $(a^1, a^2, ..., a^t, ...) \in A^{\mathbb{N}}$. L'espérance suivant cette mesure de probabilités est notée $\mathbb{E}_\sigma$.
Il y a deux manières standards de définir le paiement d'un joueur dans le jeu répété. La première est de considérer que le jeu dure T étapes (avec $T \geq 1$ un entier), et que le paiement total d'un joueur est l'espérance de la moyenne des paiements de ce joueur sur les T premières étapes.

DÉFINITION 86. *Pour $T \geq 1$, Le jeu en T étapes est le jeu $G_T = (N, (\Sigma_i)_{i\in[|1,N|]}, (\gamma_i^T)_{i\in[|1,N|]})$, où γ_i^T est le paiement moyen du joueur i jusqu'à l'étape T :*

$$\textit{Pour tout } \sigma \in \Sigma, \gamma_i^T(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma\left(\frac{1}{T}\sum\nolimits_{t=1}^{T} g_i(a^t)\right).$$

Remarquons que dans cette formule, le profil d'actions $a^t \in A$ joué en date t est une variable aléatoire.

Dans de nombreuses situations, les agents peuvent accorder plus de valeur aux gains présents que futurs (impatience) : on parle de *préférence pour le présent.* On modélise ces situations en introduisant un *taux d'actualisation* ou *facteur d'escompte* $\delta \in [0, 1[$, signifiant que le joueur est indifférent entre recevoir x demain et δx aujourd'hui. Ainsi, plus δ est élevé, plus le joueur est patient. Par exemple, pour tout $\delta < 1$, la suite de paiements $(1, -1, 0, 0, 0, \dots)$ est préférée à $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

DÉFINITION 87. *Pour δ dans $[0, 1[$, le jeu escompté au taux δ est $G_\delta = (N, (\Sigma_i)_{i \in [|1,N|]}, (\gamma_i^\delta)_{i \in [|1,N|]})$, où γ_i^δ est le paiement moyen du joueur i escompté au taux δ :*

$$\textit{Pour tout } \sigma \in \Sigma, \gamma_i^\delta(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma\left((1-\delta)\sum\nolimits_{t=1}^{+\infty} \delta^{t-1} g_i(a^t)\right).$$

Le facteur $(1 - \delta)$ dans l'expression précédente est un facteur de normalisation qui fait que la somme des poids qu'un joueur accorde aux différentes étapes est égal à 1. Ce facteur joue le même rôle que le facteur $1/T$ dans le paiement du jeu en T étapes.

1.4. Equilibres de Nash. On a vu deux manières différentes de mettre le jeu répété sous forme normale (jeu en T étapes ou jeu δ-escompté). On peut maintenant appliquer à ces jeux le concept d'équilibre de Nash vu dans les deux premiers chapitres. On s'intéresse tout particulièrement aux paiements d'équilibre de Nash, afin notamment de déterminer dans quelle mesure la répétition du jeu permet d'obtenir des équilibres où les joueurs ont des comportements coopératifs.
Pour $T \geq 1$, on note E_T l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash (en stratégies de comportement) du jeu en T étapes G_T.
Pour $\delta \in [0, 1[$, on note E_δ l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash (en stratégies de comportement) du jeu δ-escompté G_δ.

PROPOSITION 88. *E_T et E_δ sont non vides. De plus, $E_1 \subset E_T$ et $E_1 \subset E_\delta$.*

DÉMONSTRATION. La première affirmation est une conséquence directe du théorème de Nash. La deuxième affirmation découle du fait qu'étant donné σ un équilibre de Nash du jeu en une étape, "répéter cet équilibre à toutes les étapes quelle que soit l'histoire passée" constitue un équilibre de Nash du jeu en T étapes et du jeu δ-escompté. □

EXEMPLE 34.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans ce dilemme du prisonnier, on a $E_T = \{(1, 1)\}$ pour tout T.

La raison en est la suivante. Considérons le jeu en T étapes, et un équilibre de Nash de ce jeu. Plaçons-nous à la dernière étape du jeu. Comme D est strictement dominant, chacun des joueurs a intérêt à jouer D, quoi que fasse l'autre joueur. Dans cet équilibre, les joueurs jouent donc D à l'étape T. ***Une parenthèse très***

importante *: on affirme que si les deux joueurs jouent un équilibre de Nash du jeu en T étapes, alors celui-ci les amène à jouer D à l'étape T. Cependant, si l'un d'eux dévie à une certaine étape, il se pourrait a priori que l'autre joue C à la dernière étape. Ainsi, on ne prétend pas que quelle que soit l'histoire avant l'étape T, les joueurs jouent (D, D) à l'étape T : c'est seulement si l'histoire avant l'étape T correspond à l'histoire associée à l'équilibre ! Par contre, si on considérait un équilibre sous-jeu parfait, alors on pourrait affirmer que quelle que soit l'histoire avant l'étape T, les joueurs jouent D à l'étape T.*
Plaçons-nous maintenant à l'avant-dernière étape $T-1$. Montrons qu'après l'histoire d'équilibre, les joueurs jouent D à l'étape $T-1$. Par l'absurde, supposons qu'un joueur joue C. Alors il obtient :

- *à l'avant-dernière étape : strictement moins que s'il avait joué D,*
- *à la dernière étape : 1.*

La stratégie suivante est alors une déviation profitable : jouer l'équilibre entre les étapes 1 et $T-2$, puis toujours jouer D aux étapes $T-1$ et T, ce qui est une contradiction. Ainsi, à l'équilibre, les joueurs jouent D à l'étape $T-1$. Par récurrence, on obtient que les joueurs jouent D à toutes les étapes, et donc $E_T = \{(1, 1)\}$.
Ainsi, dans le dilemme du prisonnier, on ne peut pas mettre en place un équilibre du type : coopérer et punir s'il n'y pas de coopération. La répétition ne change rien en termes de paiements d'équilibres de Nash.

REMARQUE 89. *Considérons un jeu dans lequel chaque joueur a une stratégie strictement dominante. Il se peut que dans un équilibre de Nash du jeu répété T fois $(T \geq 1)$, les joueurs ne jouent pas toujours cette stratégie strictement dominante à toutes les étapes. C'est le cas dans l'exemple suivant (pourquoi ?) :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) & (-10,-10) \\ (4,0) & (1,1) & (-5,-5) \\ (-10,-10) & (-5,-5) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

EXEMPLE 35. *Revenons au dilemme du prisonnier et étudions le cas des jeux escomptés.*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Considérons la stratégie "Trigger" : à chaque étape t, jouer C si les deux joueurs ont toujours joué C avant, sinon jouer D.
Soit $\delta \in [0, 1[$. Le profil de stratégies $(Trigger, Trigger)$ est-il un équilibre de Nash

du jeu δ-escompté ?

- *Supposons que les joueurs utilisent Trigger. Dans ce cas chacun gagne* 3.
- *Si J1 dévie et joue D à toutes les étapes, il obtient* $4(1-\delta)+\delta = 4-3\delta$.
- *Donc si* $\delta < 1/3$, $(Trigger, Trigger)$ *n'est pas un Nash.*
- *Supposons* $\delta \geq 1/3$. *Si J1 dévie unilatéralement et joue une stratégie qui lui fait jouer D à une certaine étape* $t_0 \geq 1$, *son paiement est plus petit que*

$$(1-\delta)\left[\sum_{t=1}^{t_0-1}\delta^{t-1}3 + 4\delta^{t_0-1} + \sum_{t=t_0+1}^{+\infty}\delta^{t-1}1\right] \leq 3.$$

- *Conclusion :* $(Trigger, Trigger)$ *équilibre de Nash ssi* $\delta \geq \frac{1}{3}$.

1.5. Equilibres sous-jeu parfaits. Dans certaines situations, pour punir un joueur, les autres joueurs doivent jouer un profil de stratégies qui leur donnent un mauvais paiement. La punition est alors une menace non crédible, et un joueur peut être incité à dévier de la règle pré-établie, en se disant que les autres joueurs n'auront pas intérêt à le punir. Cela nous conduit à raffiner la notion d'équilibre de Nash, et à définir les *équilibres sous-jeux parfaits.*

Définition 90. *Etant données une étape* $t \geq 2$, *une histoire* $h = (a^1, a^2, ..., a^{t-1})$, *et une stratégie* σ_i *du Joueur* i, *on note* $\sigma_i[h]$ *la stratégie induite par* σ_i *après l'histoire* h.

Définition 91. *Soit* $T \geq 1$. *Un équilibre sous-jeu parfait de* G_T *est un équilibre de Nash* σ *tel que pour tout* $t \in [|2, T|]$ *et toute histoire* $h \in A^{t-1}$, $\sigma[h]$ *est un équilibre de Nash de* G_{T-t+1}.

Remarque 92. *Comme pour les jeux sous forme extensive vus au chapitre précédent, un équilibre sous-jeu parfait est un équilibre de Nash après n'importe quelle histoire (et à chaque étape), y compris en particulier après des histoires où il y a eu une (ou des) déviation(s) de la part d'un (des) joueur(s).*

Définition 93. *Soit* $\delta \in [0, 1[$. *Un équilibre sous-jeu parfait de* G_δ *est un équilibre de Nash* σ *tel que pour tout* $t \geq 1$ *et toute histoire* $h \in A^{t-1}$, $\sigma[h]$ *est un équilibre de Nash de* G_δ.

Exemple 36.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad C \quad & \quad D \quad & \quad E \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) & (-10,-10) \\ (4,0) & (1,1) & (-10,-10) \\ (-10,-10) & (-10,-10) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit s *la stratégie "A l'étape 1, jouer* C *; à l'étape 2, jouer* D *si* (C, C) *a été joué à l'étape 1 ; sinon, jouer* E*".*

Est-ce que (s, s) *est un équilibre sous-jeu parfait de* G_2 *?*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) & (0,0) \\ (4,0) & (1,1) & (0,0) \\ (-10,-10) & (-10,-10) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans cet exemple modifié, est-ce que (s, s) est un équilibre sous-jeu parfait de G_2 ?

2. Jeux répétés un grand nombre de fois

Il est courant que des interactions stratégiques soient répétées un grand nombre de fois (par exemple, des entreprises vendant un produit sur l'année peuvent changer leur prix tous les jours). Dans un jeu en T étapes, cela correspond au fait que T est très grand. Dans un jeu δ-escompté, cela correspond au fait que δ est proche de 1 : en effet, dire que le jeu est long signifie que les joueurs accordent de l'importance à leurs paiements futurs (on dit aussi que les joueurs sont *patients*). Or, plus le jeu est répété, plus l'ensemble des stratégies de chaque joueur grossit, et ce de manière exponentielle. Le jeu devient alors très complexe à analyser.

Le but de cette partie est de décrire au mieux l'ensemble E_δ des paiements d'équilibre de Nash du jeu δ-escompté, lorsque δ est proche de 1. Nous laisserons de côté l'ensemble E_T.

Nous avons vu dans les exemples précédents qu'on pouvait construire des équilibres de Nash du type "Trigger" dans des jeux répétés : "les joueurs se mettent d'accord pour jouer tel profil de stratégies, dit "coopératif" ; si à une certaine étape t, un joueur ne se conforme pas au profil coopératif, les autres le punissent pour toujours". La question que l'on se pose est maintenant la suivante : étant donné un profil de paiements $u \in \mathbb{R}^N$, peut-on construire un équilibre de Nash de type "Trigger" dans G_δ, tel que le paiement du joueur i dans G_δ soit u_i ?

2.1. Paiements réalisables. Pour construire un équilibre de type Trigger, encore faut-il qu'il existe un profil coopératif qui donne à chaque joueur u_i dans G_δ. Par exemple, dans le dilemme du Prisonnier, même avec toute la bonne volonté du monde, les joueurs ne peuvent pas obtenir $(5, 5)$! Ceci nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 94. *Un profil de paiements $u \in \mathbb{R}^N$ est réalisable s'il existe $\pi \in \Delta(A)$ tel que $u_i = \sum_{a \in A} \pi(a) g_i(a)$ pour tout $i \in [|1, N|]$.*

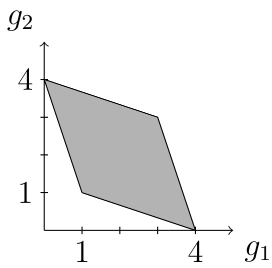
L'ensemble des paiements réalisables est donc l'ensemble des combinaisons convexes des paiements du jeu de base. On le note $Co(g)$.

Remarque 95. *Il est à noter qu'il y a plus de paiements réalisables que de paiements pouvant être obtenus en jouant des stratégies mixtes dans le jeu en un coup.*

Exemple 37. *Soit le dilemme du prisonnier suivant :*

	C	D
C	$3,3$	$0,4$
D	$4,0$	$1,1$

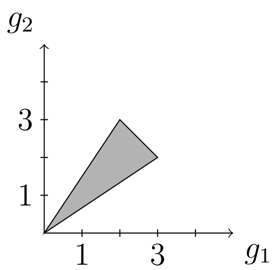
L'ensemble des paiements réalisables est la surface grise sur la figure ci-dessous :



Exemple 38. *Considérons le jeu de la bataille des sexes ci-dessous :*

	F	O
F	$3,2$	$1,1$
O	$0,0$	$2,3$

L'ensemble des paiements réalisables est la surface grise sur la figure ci-dessous :



Proposition 96. *Tout paiement d'équilibre de Nash du jeu δ-escompté est réalisable : $E_\delta \subset Co(g)$.*

Démonstration. Si $(a^1, a^2, ..., a^t, ...)$ est une suite infinie de profil d'actions, alors le paiement $\sum_{t\geq 1}(1-\delta)\delta^{t-1}g(a^t)$ est dans $Co(g)$: c'est bien une combinaison convexe de paiements du jeu en une étape. On en déduit que si $\sigma \in \Sigma$ est un profil de stratégies quelconque du jeu répété, alors le paiement $\gamma^\delta(\sigma)$ induit dans G_δ est aussi dans $Co(g)$. En particulier, tout paiement d'équilibre de Nash est dans $Co(g)$. $\square$

PROPOSITION 97. *Soit u un paiement réalisable. Il existe $\delta_0 \in [0,1[$ tel que pour tout $\delta \geq \delta_0$, il existe un profil de stratégies pures $s \in \Sigma$ tel que pour tout joueur i, $\gamma_i^\delta(s) = u_i$.*

La preuve est un peu technique, mais l'idée générale est très simple. Soit $u = \sum_{a \in A} \pi(a) g(a) \in Co(g)$ un paiement réalisable. Pour générer un paiement u dans le jeu δ-escompté, l'idée est que les joueurs jouent en moyenne approximativement $\pi(a)$ pour cent du temps le profil d'actions a, pour chaque $a \in A$. Bien sûr, cet argument omet deux points délicats : 1) il faut tenir compte du facteur d'escompte dans la fréquence avec laquelle on joue l'action a, 2) on ne veut pas seulement générer approximativement le paiement u, on veut générer EXACTEMENT le paiement u.

On sait donc que pour δ proche de 1, la coopération permet de générer exactement $Co(g)$ comme paiements de G_δ. Etant donné $u \in Co(g)$, on veut maintenant construire un équilibre de type "Trigger" tel que les joueurs ont intérêt à jouer le profil qui génère u. Pour certains u, ce n'est clairement pas possible. Ainsi, dans le dilemme du prisonnier, le paiement $(4,0)$ est dans $Co(g)$, mais aucune menace ne peut permettre de convaincre le Joueur 2 de coopérer pour avoir 0 ! Cela nous conduit à la définition de *paiement individuellement rationnel.*

2.2. Paiements individuellement rationnels. Le *paiement de punition d'un joueur i est le paiement le plus faible auquel les autres joueurs peuvent le contraindre.*

DÉFINITION 98. *Pour chaque joueur i, on définit le paiement de punition du joueur i comme :*

$$v_i = \min_{x_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A_j)} \max_{x_i \in \Delta(A_i)} g_i(x_i, x_{-i}).$$

Ainsi, v_i est le paiement le plus faible cohérent avec la rationalité individuelle du joueur i. C'est la punition la plus sévère qui peut être infligée au joueur i (sans corrélation des stratégies de la part des adversaires de i). Cette notion nous permet alors de définir la rationalité individuelle.

DÉFINITION 99. *Un profil de paiement $(u_1, u_2, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$ est individuellement rationnel si chaque joueur gagne au moins son paiement de punition : pour tout i, $u_i \geq v_i$.*

DÉFINITION 100. *Un profil de paiement $(u_1, u_2, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$ est strictement individuellement rationnel si pour tout i, $u_i > v_i$.*

EXEMPLE 39. *Considérons le dilemme du prisonnier suivant :*

	C	D
C	$3,3$	$0,4$
D	$4,0$	$1,1$

Le paiement de punition de chaque joueur est 1.

Comme un joueur peut toujours obtenir au moins son paiement de punition, on en déduit :

PROPOSITION 101. *Tout paiement d'équilibre de Nash du jeu δ-escompté est individuellement rationnel.*

2.3. Folk theorem. *On a vu que tout paiement d'équilibre de Nash du jeu δ-escompté est réalisable et individuellement rationnel. Dans quelle mesure peut-on établir une réciproque à ce résultat ?*

THÉORÈME 102. *(Folk theorem) Pour δ suffisamment proche de 1, tout paiement réalisable et strictement individuellement rationnel est un paiement d'équilibre de Nash du jeu δ-escompté.*

L'idée de la preuve : *Soit $u \in \mathbb{R}^N$ un paiement réalisable et strictement individuellement rationnel.*

On construit le profil de stratégies suivant :

- *Les joueurs se mettent d'accord pour jouer un profil de stratégies pures dont le paiement δ-escompté est u (un tel profil existe pour δ suffisamment proche de 1),*
- *Dès qu'un joueur dévie de ce profil, il se fait punir par les autres pour toujours.*
- *Pour δ suffisamment proche de 1, ce profil de stratégies est un équilibre de Nash du jeu δ-escompté.*