Théorie des jeux — TD 1
École nationale des ponts et chaussées

Joon Kwon & Bruno Ziliotto

mardi 11 octobre 2016

Jeux sous forme normale en stratégies pures

Exercice 1. — *Équilibres de Nash et dominance dans les jeux* 2×3. — Considérez le jeu sous forme normale de la figure ci-dessous.

1/2	A_2	B_2	C_2
A_1	(a, b)	(c, d)	(e, f)
B_1	(g, h)	(i, j)	(k, l)

Déterminez les conditions sur les paramètres pour que

1) le résultat (A_1, C_2) soit un équilibre de Nash ;
2) la stratégie A_1 soit strictement dominante pour le joueur 1 ;
3) la stratégie B_2 soit dominante pour le joueur 2.

Exercice 2. — *Compétition à la Bertrand*. — Deux entreprises souhaitent vendre un même bien à un un consommateur. Chaque entreprise fixe un prix et le consommateur achète à l'entreprise qui propose le prix le plus bas. Si les prix proposés par les deux entreprises sont égales, le consommateur choisit au hasard à quelle entreprise acheter. Écrire le jeu sous forme normale et trouver les équilibres de Nash en stratégies pures.

Exercice 3. — *Passager clandestin*. — N joueurs disposent chacun d'un espace de stratégies qui comprend les 51 entiers de 0 à 50. Chaque joueur i choisit un entier s_i dans son ensemble de stratégies, sans connaître le choix des autres joueurs. Le gain du joueur i ($i = 1, \dots, N$) s'écrit :

$$\frac{13}{10}(50 - s_i) + \sum_{j=1}^{N} s_j .$$

1) Interpréter la fonction de paiement.
2) Écrivez le jeu sous forme normale lorsque $N = 2$ et que l'espace des stratégies de chaque joueur se réduit à $\{0, 50\}$. De quel type de jeu s'agit-il ?
3) On considère le jeu sous sa forme générale. Déterminez l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures. Commentez.

Exercice 4. — *Jugement majoritaire*. — N juges doivent attribuer une note à un patineur artistique. Chaque juge i choisit une note $s_i \in \{0, 1, \dots, 10\}$, et la note finale $x(s_1, \dots, s_N)$ du patineur dépend des notes de l'ensemble des juges (voir plus bas). Chaque juge i a également un avis $a_i \in \{0, 1, \dots, 10\}$ et sa fonction de paiement est définie par

$$g_i(s_1, \dots, s_N) = -\left|a_i - x(s_1, \dots, s_N)\right| .$$

1) On suppose dans cette question que $x(s_1, \dots, s_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i$. Montrer qu'il existe des valeurs de $N, a_1, a_2, \dots, a_N$ pour lesquelles aucun joueur n'a de stratégie dominante.
2) On suppose maintenant que N est impair et que $x(s_1, \dots, s_N)$ est la médiane des notes s_i. Montrer qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes.

Exercice 5. — *Un jeu de localisation*. — Deux magasins vendent le même produit à une population d'acheteurs identifiée au segment $[0, 1]$ (penser, par exemple, à des vendeurs de glaces sur une plage homogène d'un kilomètre). Soient t_1 et t_2 les localisations des deux magasins sur $[0, 1]$. Un acheteur se rend toujours au magasin le plus proche (si l'acheteur est situé au point i de $[0, 1]$, sa distance au magasin t est $|t - i|$). S'il est à distance égale des deux magasins, il va au magasin t_1 avec probabilité $1/2$ (et au magasin t_2 avec probabilité $1/2$). Chaque magasin choisit sa localisation t de sorte à maximiser le nombre d'acheteurs qui viennent à lui.

1) Représentez la situation par un jeu sous forme normale opposant les deux magasins. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?
2) Le segment $[0, 1]$ est remplacé par un cercle de centre O. La distance d'un acheteur i à un magasin t est l'angle t formé par les rayons Ot et Oi. Reprendre la question (1).
3) Le bien vendu par le magasin 1 est de meilleure qualité que celui vendu par le magasin 2. Ceci signifie qu'un acheteur i se rend au magasin 1 si la distance de celui-ci n'est pas supérieure à celle du magasin 2 augmentée d'une distance $d > 0$ ($|t_1 - i| \leq d + |t_2 - i|$). Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures dans les configurations segment et cercle ?

Jeux sous forme normale en stratégies mixtes

Exercice 6. — Trouvez tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre correspondants dans chacun des jeux suivants. Tracer les correspondances de meilleures réponses mixtes.

	C	D
C	−3, −3	−10, 0
D	0, −10	−5, −5

	E	C
E	1, 1	0, 0
C	0, 0	1, 1

	F	O
F	2, 1	0, 0
O	0, 0	1, 2

	F	O
F	1, 2	3, 1
O	2, 0	0, 3

Exercice 7. — *Jeu d'inspection*. — Un patron peut ou non inspecter son employé à un coût h. L'employé peut travailler ou paresser. La désutilité du travail est g pour l'employé, la valeur du travail est v pour le patron. Si le patron inspecte et l'employé paresse, le patron est dispensé de le payer, sinon il lui paye w. On suppose $0 < h < g < w$.

1) Décrire cette situation par un jeu 2×2.
2) Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash. Commenter. Comment varie cet équilibre lorsque h augmente ? lorsque g augmente ?

Exercice 8. — *Le bon Samaritain*. — Alertés par un cri au secours, chaque témoin peut répondre à l'appel ou l'ignorer. Un personne qui répond à l'appel reçoit un paiement égal à $1 - c$ (avec $0 < c < 1$). Si au moins une personne répond à l'appel, une personne n'ayant pas répondu à l'appel reçoit 1. Si personne ne répond à l'appel, tout le monde obtient 0. Écrire le jeu sous forme normale. Déterminer l'ensemble des équilibre de Nash en stratégies mixtes en fonction de c et du nombre de témoins $N \geqslant 2$. Commenter.

Exercice 9. — *Travail d'équipe*. — Deux individus ont la possibilité de produire un bien. La quantité de bien produite, qui sera partagée de manière équitable après la production, dépend de l'effort fourni par les deux individus. Deux niveaux d'effort seulement sont possibles : pas d'effort (P) et de l'effort (E). Le coût de l'effort pour un individu est égal à $c \in (1/2, 1)$, et l'utilité d'un individu est supposée égale à la quantité de bien qu'il reçoit après la production, moins le coût c s'il a fourni l'effort.

1) Supposons que la quantité totale produite est égale à 2 s'ils fournissent tous les deux de l'effort, 1 si un seul des deux fournit de l'effort, et 0 sinon. Représentez le jeu sous forme normale. De quel type de jeu s'agit-il ? Quels sont les équilibres de Nash ?
2) Supposons que la quantité totale produite est égale à 2 s'ils fournissent tous les deux de l'effort, et 0 sinon. Représentez le jeu sous forme normale. De quel type de jeu s'agit-il ? Quels sont les équilibres de Nash ? Comment varie la probabilité de fournir un effort à l'équilibre parfaitement mixte lorsque c varie ? Expliquez ce changement.