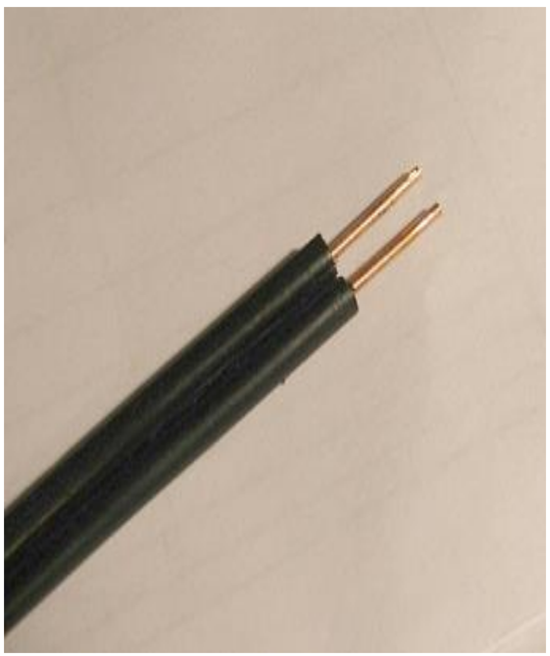
Théorie des lignes de transmission

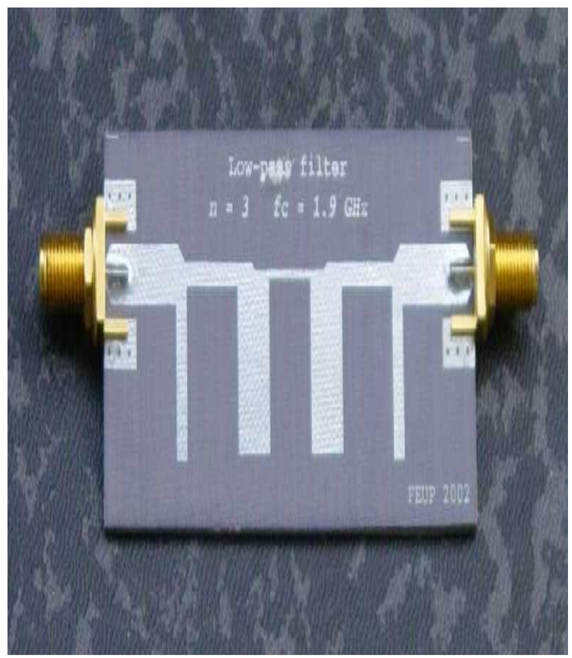
Les lignes de transmission forment la base de l’analyse des circuits a hautes fréquences.
La méthode de lignes de transmission permet d’analyser des circuits à hautes fréquences en termes communs a l’analyse de circuits : tension, courant, impédance

- Il y a deux catégories principales de la propagation guidée : les ligne de transmission et les guides d’ondes.

- Les ligne de transmission sont des dispositifs formés de deux conducteurs: ligne bifilaire, câble coaxial, piste de circuit imprimé avec son plan de masse …



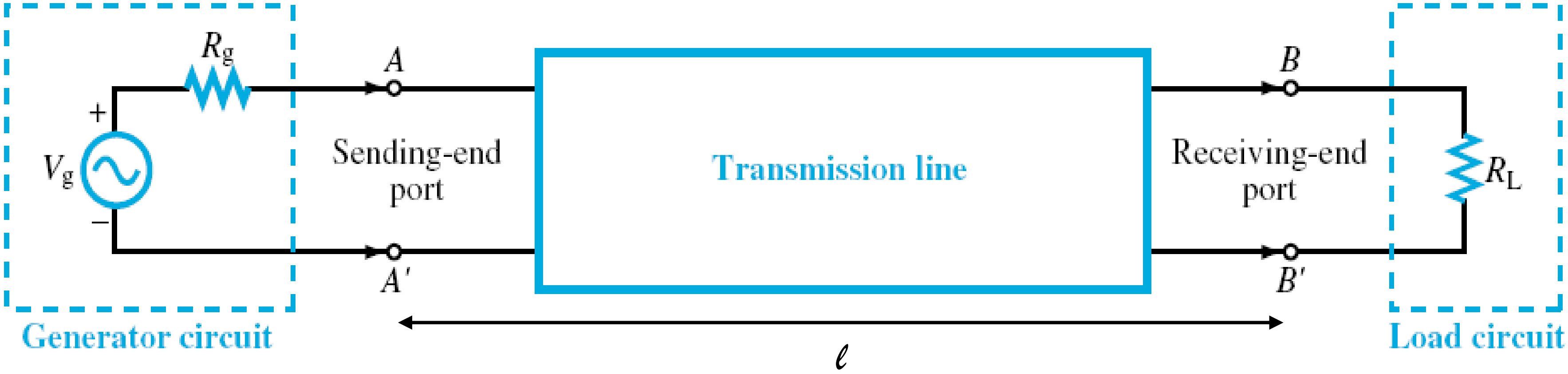
ligne bifilaire



Ligne imprimée

Câble coaxial

Différence entre une ligne de transmission et un circuit ordinaire

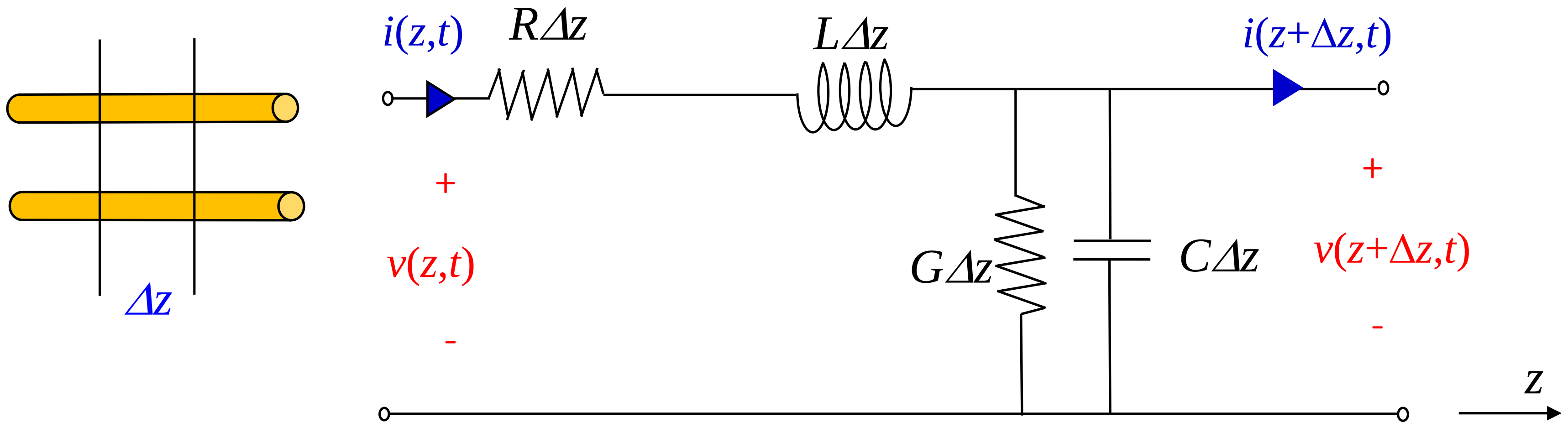


- On travaille aux basses-fréquences ou avec une ligne de longueur faible devant la longueur d'onde du signal $l \ll \lambda$
- on néglige le temps de propagation que met le signal pour aller de l'entrée à la sortie de la ligne ***s(t)=e(t) alors*** le courant est constant quel que soit**.**
- On tient compte du temps de propagation ***to*** que met le signal pour aller

de l'entrée à la sortie de la ligne ***s(t)≠e(t)***

- **On travaille à des fréquences élevées ou avec une ligne voisine ou plus longue que la longueur d'onde du signal .**
- Les lois classiques de l'électricité ne s'appliquent plus.

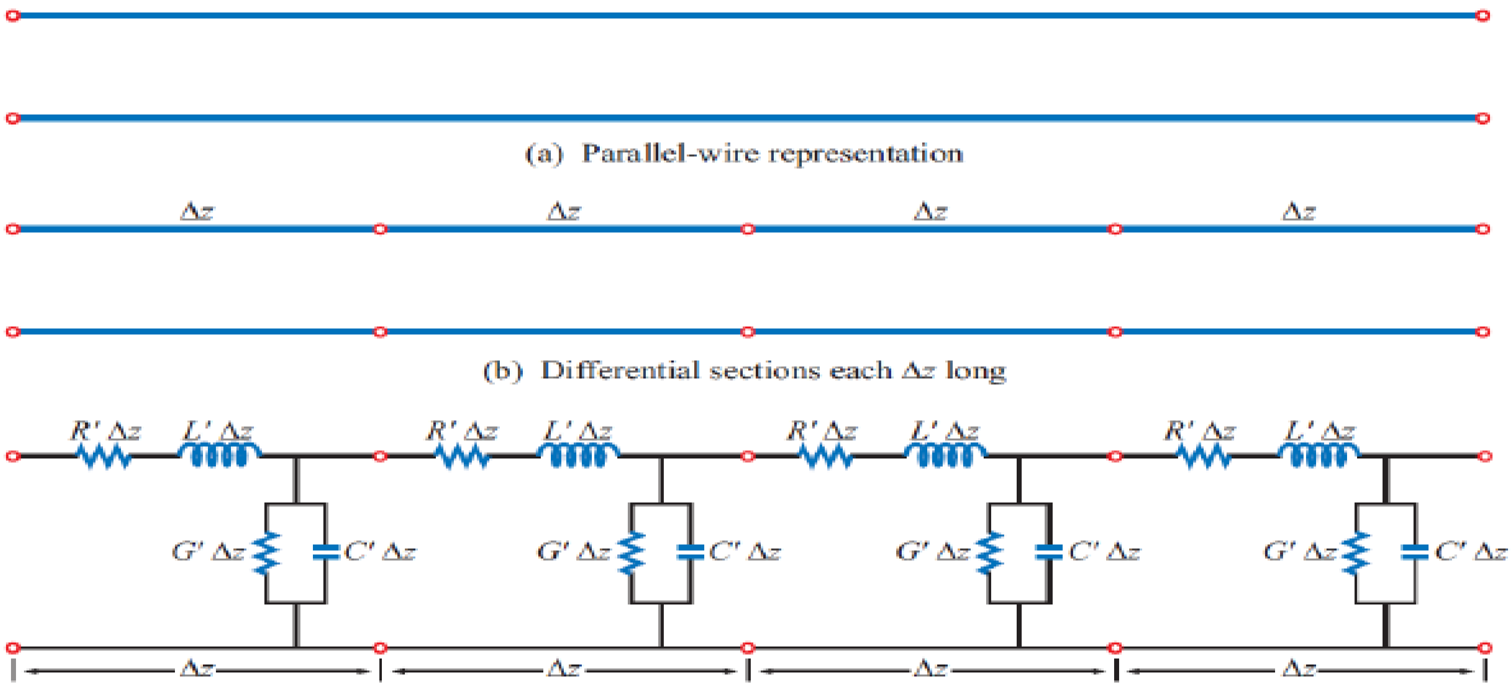
Pour faire l'étude de la propagation le long de la ligne, il faut modéliser la ligne en la décomposant en une suite de quadripôles mis en cascade. Les tronçons de longueur infiniment petite $dz \ll \lambda$ **(alors on peut considérer que les courants sont quasi-stationnaires) :**



On définit pour la ligne quatre grandeurs :

- la résistance linéique **R** ou résistance des conducteurs par unité de longueur qui est en général très faible (en ohms/m)
- l'inductance linéique **L**: chaque tronçon de ligne est soumis à un champ variable créé par le courant circulant dans les tronçons voisins. Il est donc le siège de phénomènes d'induction caractérisés par l'inductance par unit éde longueur (en H/m)
- la conductance linéique **G**: c'est l'inverse de la résistance entre les deux conducteurs constituant la ligne. Pour un bon diélectrique, la résistance de fuite est très élevée et on prend souvent G = 0 (en Siemens/m)
- la capacité linéique **C**: c'est la capacité qui existe entre les deux fils (en F/m)

L’équation des télégraphistes



L’application de la loi de Kirchhoff sue le circuit donne:

$$v(z,t) = v(z+\Delta z,t) + i(z,t)R\Delta z + L\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \qquad \text{(a)}$$

$$i(z,t) = i(z+\Delta z,t) + v(z+\Delta z,t)G\Delta z + C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} \qquad \text{b}$$

Les équations (a)et (b) sont divisées par Δz ,après on prend la limite pour $\Delta z \to 0$
les équations différentielles devient :

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -(R)I(z,t) - L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -(G)V(z,t) - C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z)$$

Ces équations sont similaires aux équations de MAXWELL alors on peut écrire:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0$$

γ la constant de propagation complexe

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$
$$= \alpha + j\beta$$

La solution de ses équations donne la formule de V(z)et courant sous la forme phaseur:

$$V(z) = V_0^+ e^{+\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

$$= \left|V_0^+\right| e^{j\phi^+} e^{+\alpha z} e^{-j\beta z} + \left|V_0^-\right| e^{j\phi^-} e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

Onde vers la direction +z

Onde vers la direction -z

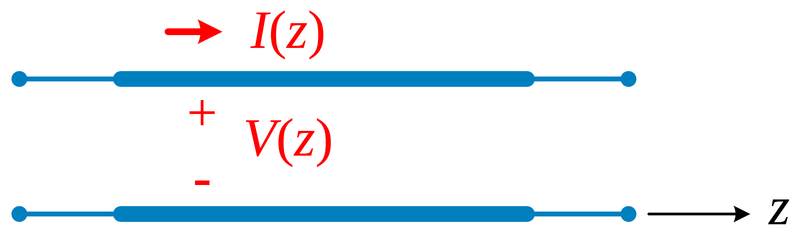
Note:

$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V(z) e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \left|V_0^+\right| e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi^+\right)$$

$$+ \left|V_0^-\right| e^{+\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi^-\right)$$

Résumé des formules de base de la ligne de transmission



$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C) \right]^{1/2}$$

$$Z_0 = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{1/2}$$

Z_0 :impédance caractéristique de la ligne

La longueur d'onde ≡ λg

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \text{ [m]}$$

La vitesse de phase ≡ vp

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \text{ [m/s]}$$

Cas d'une ligne de transmission sans parte

$$\boxed{R = 0,\ G = 0}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \left[(\cancel{R} + j\omega L)(\cancel{G} + j\omega C)\right]^{1/2}$$
$$= j\omega\sqrt{LC}$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= 0\\ \beta &= \omega\sqrt{LC}\end{aligned}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow \boxed{v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$Z_0 = \left(\frac{\cancel{R} + j\omega L}{\cancel{G} + j\omega C}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Les formules de la tension et le courant devient :

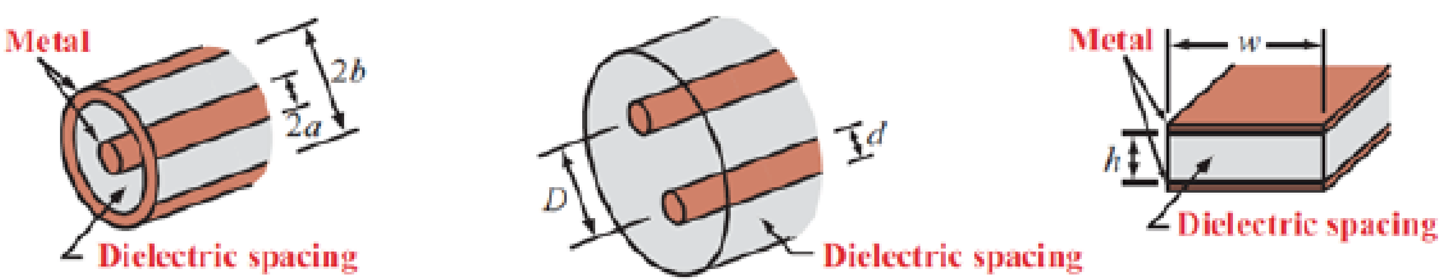
$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

Transmission-line parameters R', L', G', and C' for three types of lines.

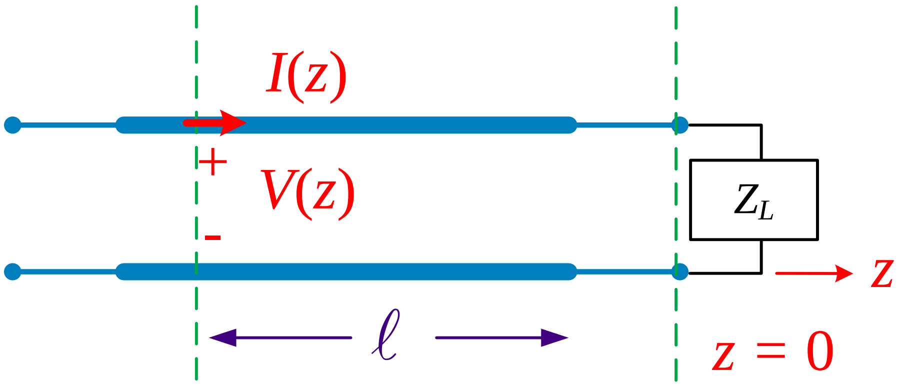
Parameter	Coaxial	Two-Wire	Parallel-Plate	Unit
R'	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{2R_s}{\pi d}$	$\frac{2R_s}{w}$	Ω/m
L'	$\frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]$	$\frac{\mu h}{w}$	H/m
G'	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]}$	$\frac{\sigma w}{h}$	S/m
C'	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]}$	$\frac{\varepsilon w}{h}$	F/m

Notes: . (2) μ, ε, and σ pertain to the insulating material between the conductors. (3) $R_s = \sqrt{\pi f \mu_c/\sigma_c}$. (4) μ_c and σ_c pertain to the conductors. (5) If $(D/d)^2 \gg 1$, then $\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right] \simeq \ln(2D/d)$.



(a) Coaxial line (b) Two-wire line (c) Parallel-plate line

Ligne fermée sur un charge



- Un axe qui a son origine en bout de ligne et orienté de la sortie vers l'entrée
- Une origine des temps telle que la phase de l'onde incidente soit nulle au niveau de la charge

- Quand on cherche à transmettre un signal à une charge, la tension crée par le générateur se propage le long de la ligne. On calcule la propagation de proche en proche sur des tronçons élémentaire jusqu'à atteindre la charge.
- les conditions imposées au courant et à la tension changent (discontinuité), créant une tension et un courant réfléchis

La tension et courant sur la ligne s'écrivent:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \Longrightarrow I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

Au niveau de la charge ,la tension et courant s'écrivent :

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0 \Longrightarrow V_0^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+$$

Le rapport entre l'amplitude l'onde réfléchie et l'onde incidente est définie par le coefficient de réflexion Γ :

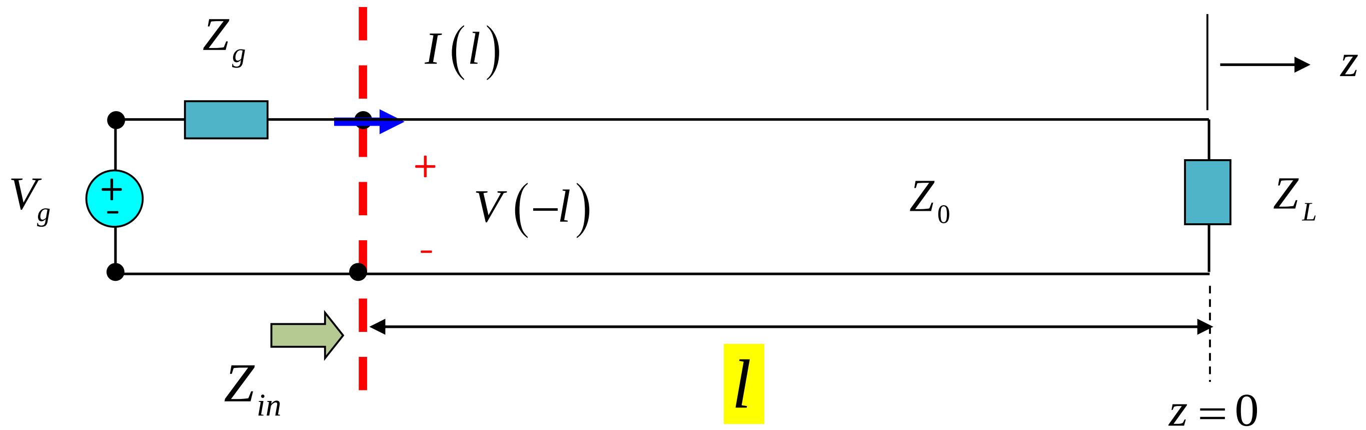
$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

La tension et courant sur la ligne s'écrivent maintenant:

$$V(z) = V_0^+ \left[e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right]$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} \left[e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z} \right]$$

Une ligne adaptée



Ⓐ Une ligne adaptée: $(Z_L=Z_0)$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0$$

Pas de réfléxion à partir de la charge

$$\Rightarrow V(\ell) = V_0^+ e^{-j\beta\ell}$$

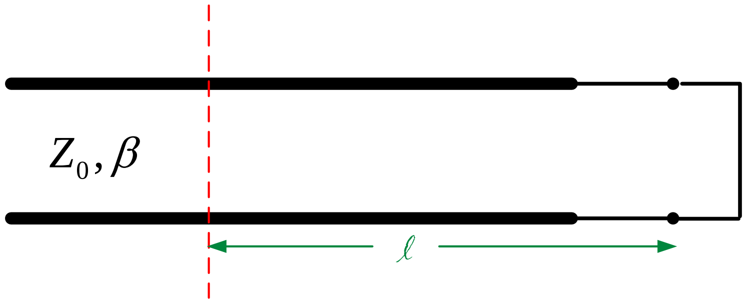
$$I(\ell) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta\ell}$$

$$\Rightarrow Z(\ell) = Z_0$$

Pour toute l

Ligne non adaptée

B Une charge court-circuité : ($Z_L = 0$)

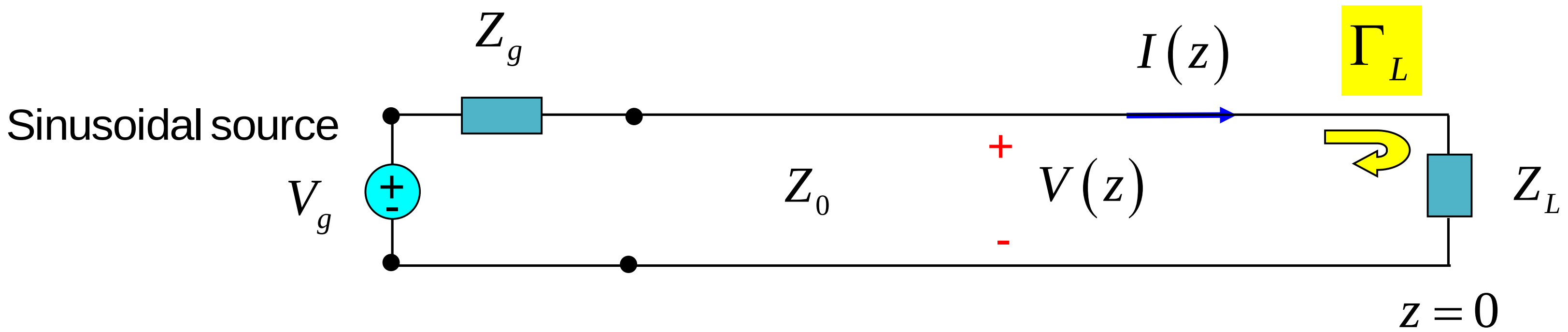


$$\Gamma_L = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

$$\Rightarrow Z(\ell) = jZ_0 \tan(\beta\ell)$$

$$\beta\ell = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_g}$$

Ondes stationnaires sur la ligne non adaptée



$$V(z) = A\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} A\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$V(z) = Ae^{-j\beta z}\left(1 + \Gamma_L e^{+j2\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} Ae^{-j\beta z}\left(1 - \Gamma_L e^{+j2\beta z}\right)$$

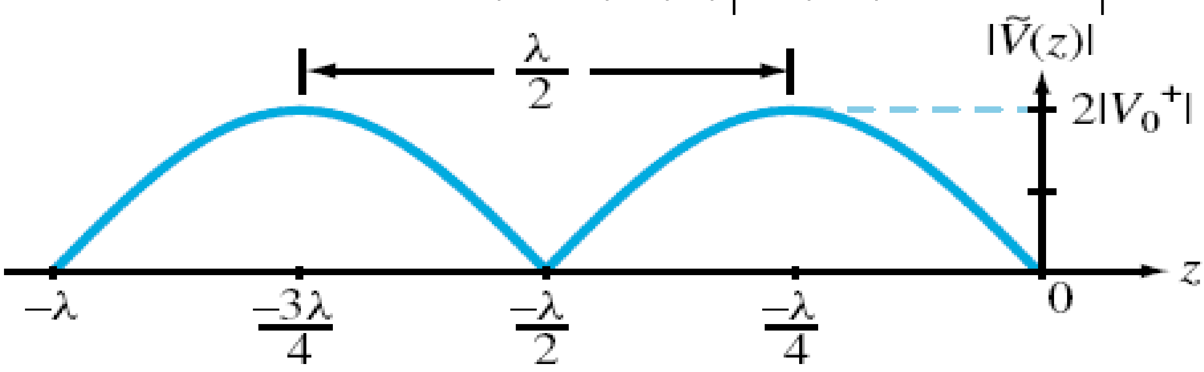
$$V^+(z) = Ae^{-j\beta z} \qquad V^-(z) = A\Gamma_L e^{+j\beta z} \qquad V^-(z)/V^+(z) = \Gamma_L e^{+j2\beta z}$$

Lorsque l'impédance de la charge de la ligne n'est pas strictement égale à celle de l'impédance caractéristique Z_0 de la ligne. L'interférence entre les deux ondes (incidente et réfléchie) provoque la mise en vibration électrique de la totalité de la ligne avec formation d'une onde stationnaire.

$$V(z) = Ae^{-j\beta z}\left(1+\Gamma_L e^{+j2\beta z}\right)$$ Dénote $$\Gamma_L = \left|\Gamma_L\right| e^{j\phi}$$

Donc on obtient $$V(z) = Ae^{-j\beta z}\left(1+\left|\Gamma_L\right| e^{+j(\phi+2\beta z)}\right)$$

L'amplitude est $$\left|V(z)\right| = \left|A\right| \left|1+\left|\Gamma_L\right| e^{+j(\phi+2\beta z)}\right|$$



Le voltage maximum : $$V_{\max} \equiv \left|V(z)\right|_{\max} = \left|A\right|\left(1+\left|\Gamma_L\right|\right) \qquad \phi + 2\beta z = 2\pi m$$

Le voltage Minimum $$V_{\min} \equiv \left|V(z)\right|_{\min} = \left|A\right|\left(1-\left|\Gamma_L\right|\right) \qquad \phi + 2\beta z = \pi + 2\pi n$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Le taux d'onde stationnaire est le rapport entre V_{max} to V_{min}

$$\mathrm{VSWR} \equiv \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$$

On a:

$$\mathrm{VSWR} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}$$

$$1 \leq \mathrm{VSWR} \leq \infty$$

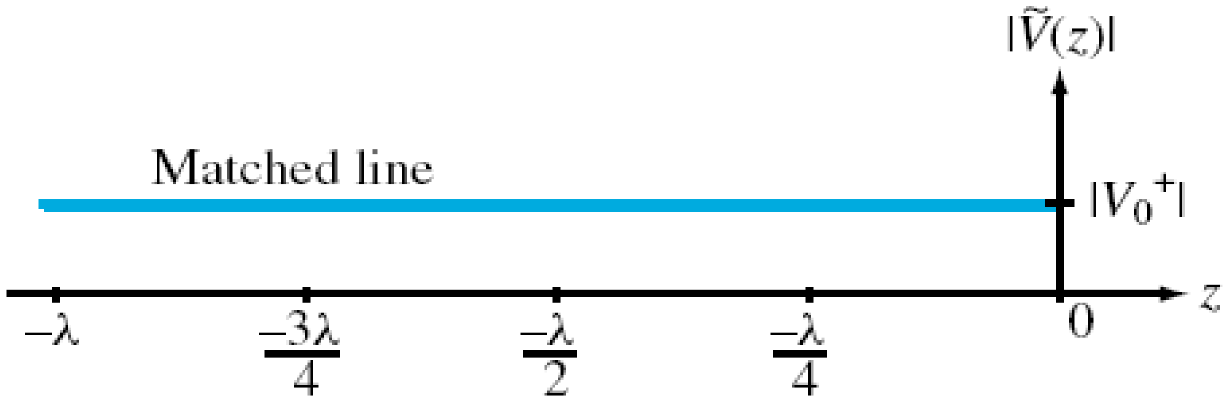
Adaptation parfait : $\Gamma_L = 0$

On peut retenir comme repères les valeurs suivantes :

- ROS = 1la ligne est parfaitement adaptée , $\Gamma = 0$
- ROS de 1 à1,5 la ligne est presque adaptée
- ROS supérieur à 2 la ligne est désadaptée

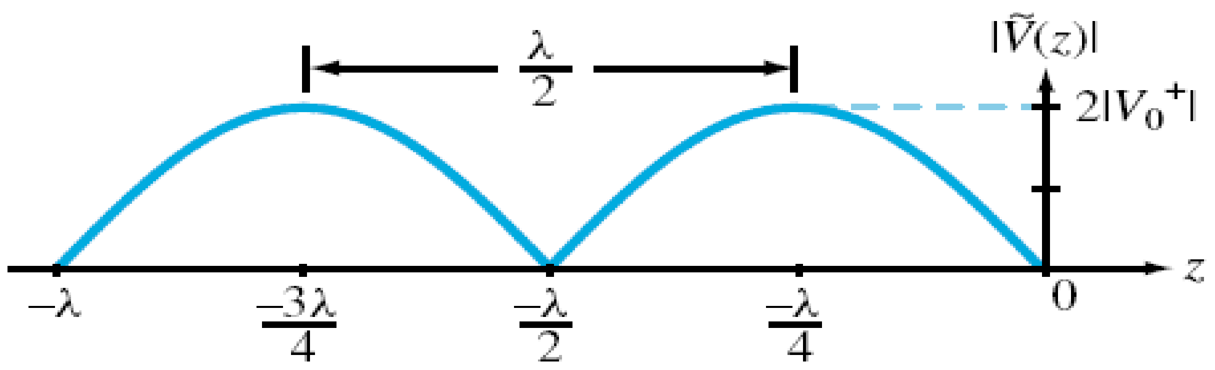
Pour une ligne adaptée, $Z_L = Z_0$, $\Gamma = 0$ and

$\left|\tilde{V}(z)\right| = |V_0^+|$ pour toutes valeurs de z.



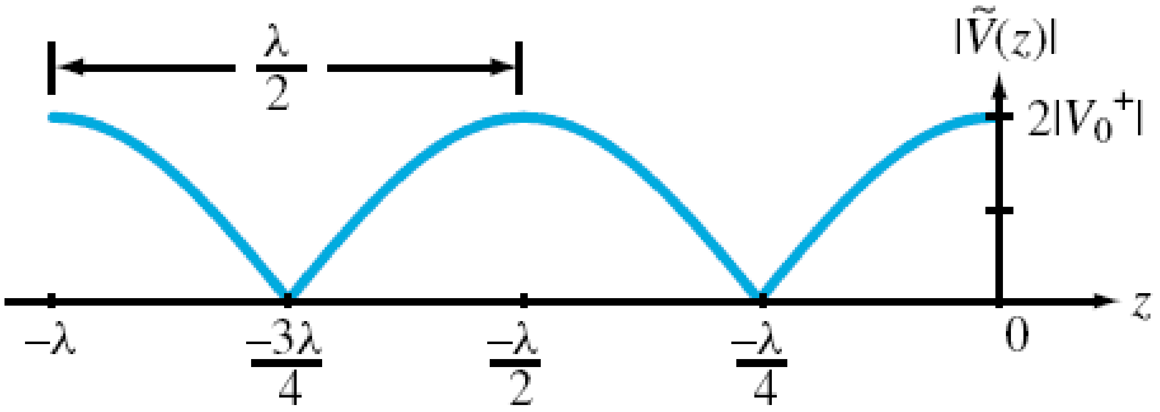
(a) $Z_L = Z_0$

Pour une charge court-circuité, (Z_L=0), Γ = -1



(b) $Z_L = 0$ (short circuit)

Pour une charge a circuit-ouvert, ($Z_L=\infty$), Γ = 1.



(c) $Z_L = \infty$ (open circuit)

Exemple: Une ligne de transmission d'une impédance caractéristique Z0=50 Ohm, se termine par une charge avec ZL = (100 + j50) Ω. Trouvez le coefficient de réflexion et le rapport d'onde stationnaire de tension (TOS).

On a,

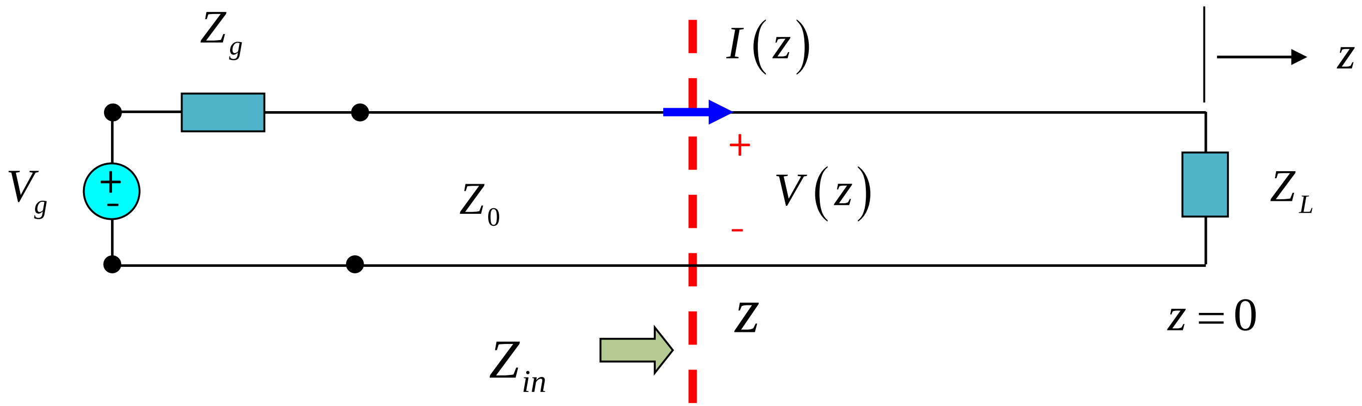
$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(100 + j50) - 50}{(100 + j50) + 50} = 0.45e^{j26.6^\circ}$$

Le TOS est donné:

$$VSWR = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0.45}{1-0.45} = 2.6$$

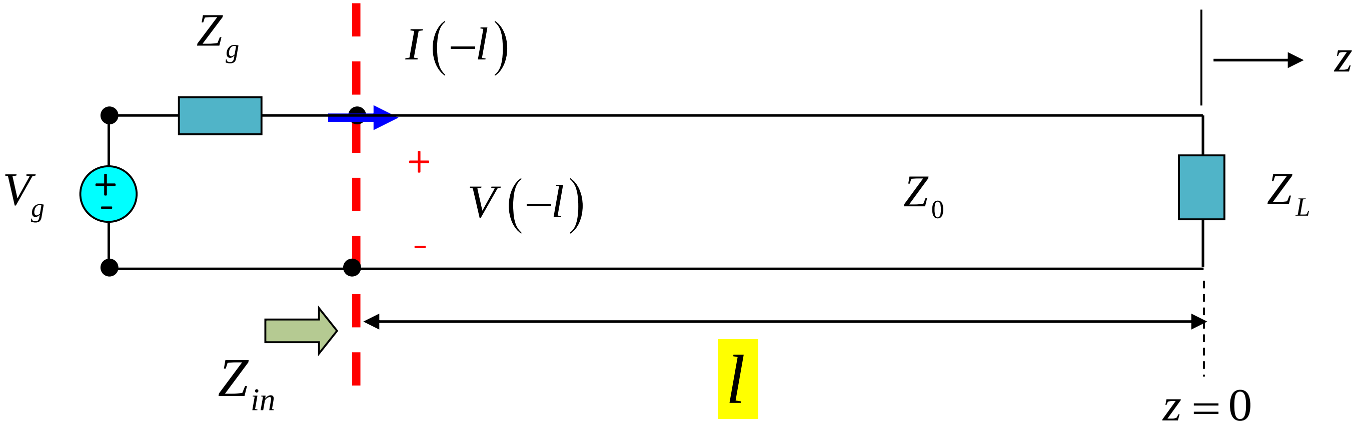
Impédance d'une ligne de transmission

On peut définir l'impédance d'entrée à tout point z sur la ligne :



$$Z_{in}(z) \equiv \frac{V(z)}{I(z)}$$

L'impédance d'entrée est l'impédance «vue» en regardant vers la droite.



A une distance z= -ℓ de la charge , l'impédance d'entrée :

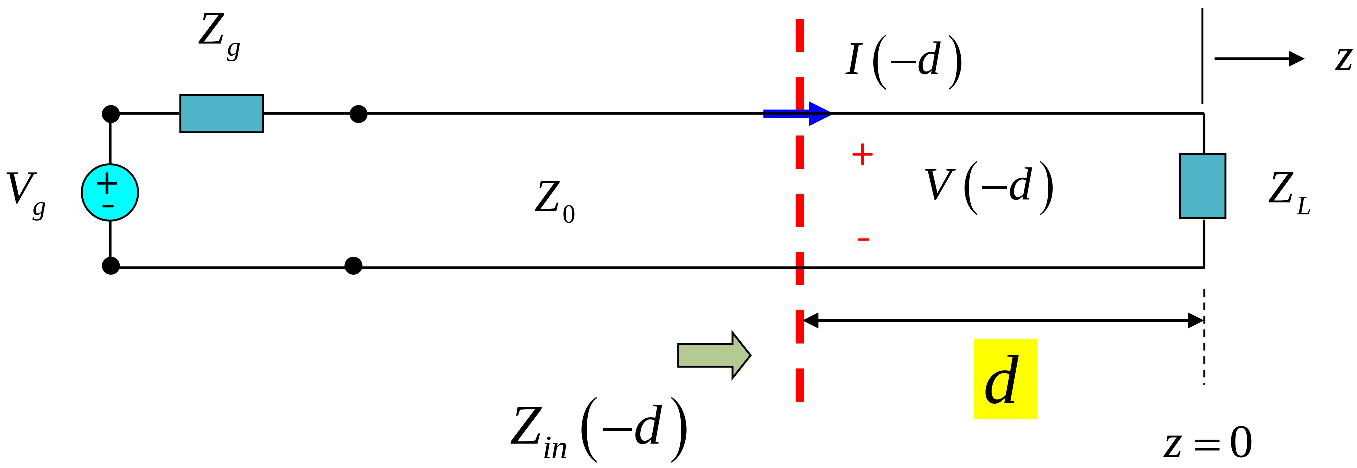
$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{V_0^+\left[e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right]}{V_0^+\left[e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l}\right]} Z_0 = \frac{1+\Gamma e^{-2j\beta l}}{1-\Gamma e^{-2j\beta l}} Z_0$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos\beta l + jZ_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + jZ_L \sin\beta l}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_0)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_0)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_0)e^{-j\beta l}}$$

$$\boxed{Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_L \tan\beta l}}$$

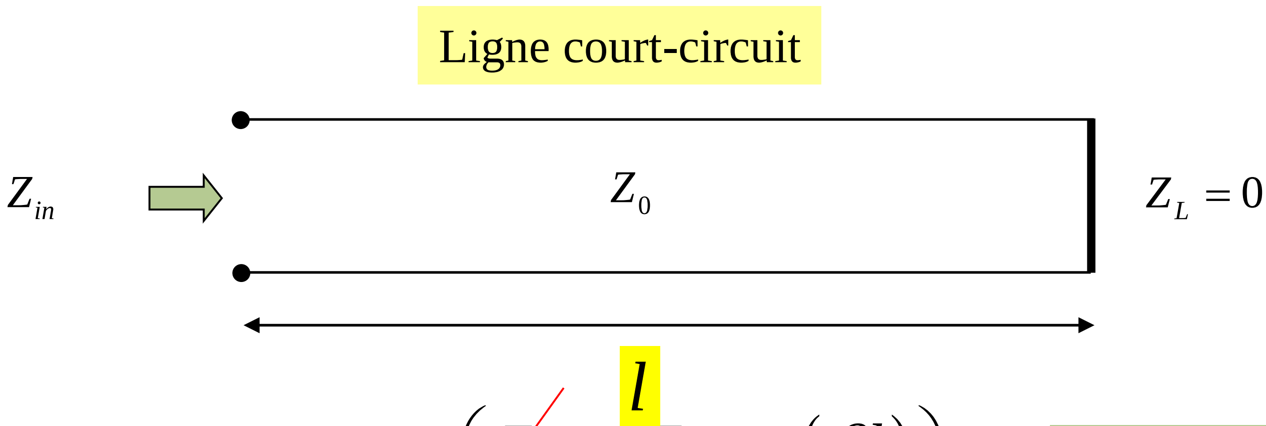
Pour une distance z = - d :



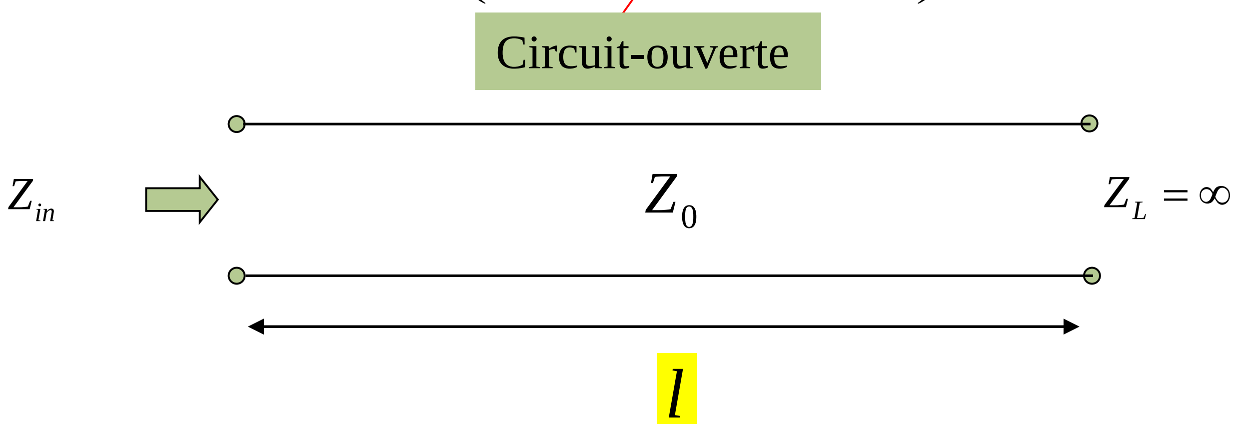
$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d}$$

d = distance de la charge

Cas special

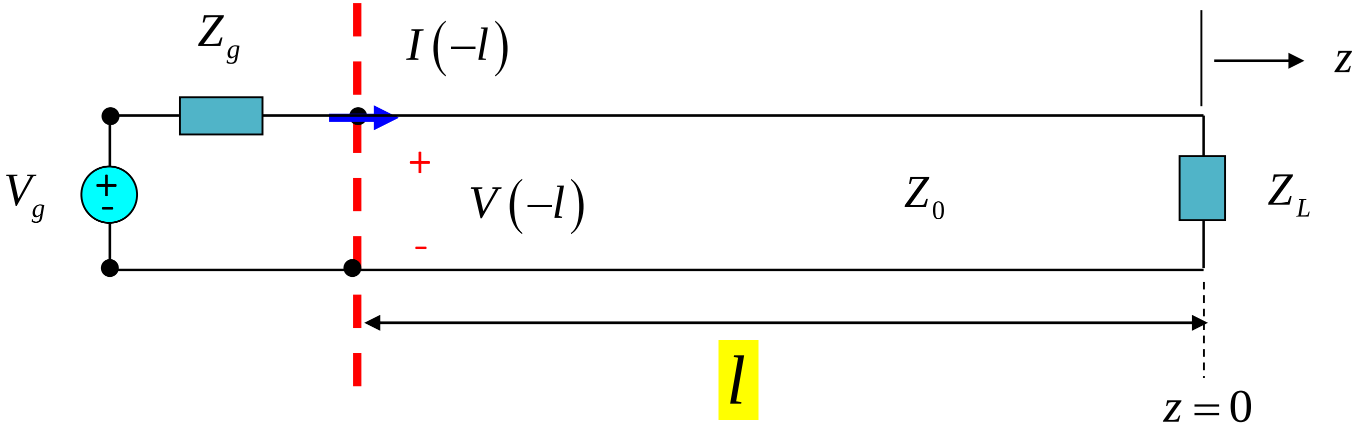


$$Z_{in} = Z_0\left(\frac{\cancel{Z_L} + jZ_0\tan(\beta l)}{Z_0 + \cancel{jZ_L}\tan(\beta l)}\right) \Rightarrow \boxed{Z_{in} = jZ_0\tan(\beta l)}$$



$$Z_{in} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta l)}\right) \Rightarrow \boxed{Z_{in} = -jZ_0\cot(\beta l)}$$

Flux de puissance moyen



$$P(-d) \approx \frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0} e^{2\alpha\ell}\left(1-\left|\Gamma_L\right|^2 e^{-4\alpha\ell}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0^*} e^{2\alpha\ell}}_{\text{puissance refléchie}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0^*}\left|\Gamma_L\right|^2 e^{-2\alpha\ell}}_{\text{puissance incidente}}$$

Ligne sans perte ($\alpha = 0$)

$$P(-d) = \frac{1}{2}\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\left(1-\left|\Gamma_L\right|^2\right)$$

Si $Z_L \neq Z_0$, la puissance de la source ne se rend pas toute a la charge. Ce sont les pertes par réflexion :

$$RL = -20 \log |\Gamma|$$