

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté de Technologie
Département d'électronique



Polycopié de cours destiné aux étudiants
Master 1 en télécommunication
Matière : Communications numériques avancées

Présenté par :

Dr. MEFTAH Elhadi

Année universitaire : 2018 -2019

Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Abréviations	viii
Notations	xii
Avant propos	1
I Rappels sur les modulations numériques	5
1 Modulations à bande étroite et à large bande	5
2 Modulations numériques de type ASK, FSK, PSK	6
2.1 La modulation ASK	8
2.2 La modulation PSK	9
2.3 La modulation QAM	10
2.4 La modulation FSK	11
3 Transmissions numériques en bande limitée	13
3.1 L'interférence entre symboles	14
3.2 Condition d'absence d'IES : critère de Nyquist	15

3.3	Diagramme de l'oeil	17
3.4	Expression de la probabilité d'erreur en présence de filtrage de Nyquist	19
4	Évaluations des systèmes de transmission numériques	20
4.1	Évaluation selon l'efficacité spectrale	22
4.2	Évaluation selon l'occupation spectrale	24
4.3	Évaluation selon l'efficacité en puissance	26
4.4	Évaluation selon la simplicité de réalisation	27
4.5	Compromis entre les divers paramètres de système de transmission numériques	27
5	Récepteurs AWGN : Démodulateur et Détecteur	28
5.1	Démodulateur	29
5.1.1	Filtre adapté	29
5.1.2	Corrélateur	32
5.2	Détecteur	34
5.2.1	Probabilité d'erreur	35
5.2.2	Seuil optimal	39
6	Exercices	40
II Canaux non idéaux		47
1	Canaux sans fil	47
1.1	Espace libre, émetteur et récepteur fixes	48
1.2	Espace libre, récepteur mobile	49
1.3	Emetteur et récepteur fixes, obstacle fixe	49
1.4	Récepteur mobile, obstacle fixe	50
2	Trajets multiples	50
3	Bruit	52
3.1	Bruit intrinsèque d'un récepteur numérique	53
3.2	Modélisation du bruit (AWGN)	54
4	Interférences	55
5	Canaux invariants et variants	57
5.1	Canal invariant	60
5.2	Canal variant	60

6	Fading de Rice et de Rayleigh	61
6.1	Fading de Rayleigh	62
6.2	Fading de Rice	62
7	Exercices	64
III Techniques d'accès multiple		68
1	Time Division Multiple Access (TDMA)	69
2	Frequency Division Multiple Access (FDMA)	71
3	Code Division Multiple Access (CDMA)	76
3.1	Étalement de spectre par séquence directe	77
3.2	Désétalement	80
3.2.1	Détecteur conventionnel	82
3.2.2	Détecteur décorrélateur	83
3.2.3	Détecteur à erreur quadratique moyenne	83
3.3	Capacité de la méthode d'accès multiple CDMA	84
3.4	Codes d'étalement	88
4	Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)	90
4.1	Principe	91
4.2	Notion d'orthogonalité	92
4.3	L'interférence entre symboles (IES)	95
4.4	L'interférence entre porteuses (IEP)	95
4.5	L'intervalle de garde	96
4.6	Avantages et inconvénients de l'OFDM	96
4.7	Accès multiple OFDMA	97
5	Exercices	98
IV Systèmes MIMO		105
1	Diversité à l'émission et à la réception	106
2	Diversité à la réception	109
3	Diversité à l'émission	111
4	Codage spatio-temporel	113
4.1	Codes spatio-temporels en treillis	114
4.2	Codes spatio-temporels par blocs	115

5	Multiplexage spatial	118
6	Démodulation conjointe	122
6.1	Détecteurs à maximum de vraisemblance	122
6.2	Détecteurs à filtrage linéaire	123
6.3	Annulations successives d'interférences ordonnées (V-BLAST)	124
7	Multi-utilisateurs MIMO	125
8	Exercices	127
Annexe		130
A	Aide mémoire de Traitement du Signal à l'usage des Communications Numériques Avancées	130
Références bibliographiques		139

Table des figures

1	Structure du polycopié.	4
I.1	Forme générale du modulateur.	8
I.2	Exemple d'une modulation 4-ASK.	9
I.3	Exemple d'une modulation QPSK.	10
I.4	Exemple d'une modulation 16-QAM.	11
I.5	Constellation 16-QAM rectangulaire.	12
I.6	Exemple d'une modulation FSK.	13
I.7	Chaîne de transmission en bande de base.	14
I.8	Fonctions de transfert des filtres en cosinus-surélevé.	16
I.9	Réponses impulsionnelles des filtres en cosinus-surélevé.	17
I.10	Diagramme de l'oeil.	18
I.11	Limite fondamentale de transmission sur le canal AWGN ($BER = 10^{-5}$).	23
I.12	Efficacité spectrale de modulations M -aires sur le canal AWGN ($BER = 10^{-5}$).	23
I.13	Plan de l'efficacité spectrale	25
I.14	Récepteur AWGN : Démodulateur et Détecteur.	30
I.15	Fonctions de transfert des filtres en cosinus-surélevé.	32
I.16	Équivalence entre (a) filtre adapté, (b) corrélateur.	33
I.17	Fonction de densité de probabilité conditionnelle.	36
II.1	Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal.	48

II.2	Scénario d’une transmission radio-mobile sur un canal trajet multiple.	52
II.3	Modèle pour le signal reçu après un canal AWGN.	54
II.4	Interférences co-canal dans un réseau cellulaire.	56
II.5	Interférences sur canal adjacent dans un réseau cellulaire.	56
II.6	Classification des canaux.	61
II.7	La distribution de Rayleigh.	63
II.8	Distribution de Rayleigh vs Rice.	64
III.1	Schéma d’un multiplexage temporel (TDMA).	69
III.2	Principe du multiplexage en fréquence.	72
III.3	Schéma d’un multiplexage en fréquence (FDMA).	73
III.4	Capacité normalisée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour FDMA.	75
III.5	Différentes techniques CDMA.	77
III.6	Principe de l’étalement de spectre par séquence directe.	79
III.7	Principe de désétalement de spectre par séquence directe.	81
III.8	Capacité normalisée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour CDMA.	85
III.9	Région de capacité du canal gaussien à accès multiple CDMA (deux utilisateurs).	88
III.10	Schéma de principe du modulateur OFDM numérique.	93
III.11	Spectre en fréquence d’une trame OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes $N = 4$	94
III.12	Intervalle de garde pour un système OFDM.	97
IV.1	Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal.	106
IV.2	Schéma d’un système de transmission sans fil type MIMO.	108
IV.3	Capacité des systèmes MIMO par rapport aux systèmes SISO et SIMO.	109
IV.4	Schéma d’un système de transmission sans fil type SIMO.	110
IV.5	Schéma d’un système de transmission sans fil type MISO.	112
IV.6	Les familles de codes temps-espace.	113
IV.7	Diagramme de treillis pour un STTC à 4 états utilisant $N_t = 2$ et une modulation QPSK.	115
IV.8	Le codage spatio-temporel d’Alamouti.	116
IV.9	Différentes architectures d’émission de multiplexage spatial.	119
IV.10	Technique d’accès SDMA (MU–MIMO beamforming multi–utilisateur).	126

Liste des tableaux

I.1	Quelques systèmes à bande étroite et des valeurs pratiques de f_0 et B_m	6
-----	--	---

Abréviations

A

ASK	Amplitude Shift Keying
AMRC	Access Multiple par Répartition de Codes
AMRF	Acces Multiple par Répartition de Fréquence
AMRT	Access Multiple par Répartition dans le Temps
AWGN	Additive White Gaussian Noise

B

BER	Bit Error Rate
BLAST	Bell Labs Advanced Space Time
BPSK	Binary Phase Shift Keying

C

CDMA	Code Division Multiple Access
CRNs	Cognitive Radio Networks
CSI	Channel State Information

D

D-BLAST	Diagonally Bell Labs Advanced Space Time
DS-CDMA	Direct Sequence Code Division Multiple Access

E

ENC	Encoder
-----	---------

F

FDMA	Frequency Division Multiple Access
FF	Fast – Fading
FFT	Fast Fourier Transform
FH-SS	Frequency Hopping Spread Spectrum
FSK	Frequency Shift Keying

G

GI	Guard Interval
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
GSM	Global System for Mobile Communication

I

IAM	Interférence Accès Multiples
IES	Interférence entre symboles
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
IoT	Internet of Things
IS 95	Interim Standard 95
ISI	Inter Symbol Interference
I.I.D	Indépendantes et Identiquement Distribuées

L

LLR	Logarithm Likelihood Ratio
LLR	LLR Combining
LST	Layered Space – Time

M

MAI	Multiple Access Channel
MAI	Multiple Access Interference
MAP	Maximum <i>A Posteriori</i>
MF	Matched Filter
MC	Multi-Carrier
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum Likelihood
MMSE	Minimum Mean Square Error
MISO	Multiple Input Single Output
MRC	Maximum Ratio Combining
MRT	Maximum Ratio Transmitter
MSK	Minimum Shift Keying
MS	Mobile Station
MU-MIMO	Multi-Utilisateur MIMO
MUD	Multiple User Detection
MUG	Multiple User Gain

N

NFE	Near Far Effect
NOMA	Non-Orthogonal Multiple Access

O

OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OFDMA	Orthogonal Frequency Division Multiple Access
OMA	Orthogonal Multiple Access
OVSF	Orthogonal Variable Spreading Factor

P

PC	Préfixe Cyclique
PN	Pseudo Noise
PSD	Power Spectral Density
PSK	Phase Shift Keying

Q

QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
QoS	Quality of Services

S

SC	Single Carrier
SDMA	Space Division Multiple Access
SIC	Serial Interference Cancellation
SIMO	Single Input Multiple Output
SISO	Single Input Single Output
SNR	Signal-to-Noise Ratio
ST	Space Time
SNIR	Signal-to-Interference and Noise Ratio
STBC	Space Time Block Codes
STTC	Space Time Trellis Code
SUD	Single User Detection
SVD	Singular Value Decomposition

T

TDMA	Time Division Multiple Access
TFD	Transformé de Fourier Discrètes
TH-SS	Time Hopping Spread Spectrum

W

W-CDMA	Wide-CDMA
--------	-----------

Z

ZF	Zero Forcing
----	--------------

Notations

Outils mathématiques :

- Nombre imaginaire pur : $j = \sqrt{-1}$
- Transformée de Fourier : $X(f) = TF(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi jft} dt$
- Transformée de Fourier Inverse : $x(t) = IFFT(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi jft} df$
- $\Pr(B/A)$: Probabilité conditionnelle de l'évènement B par rapport à l'évènement A
- Pe : Probabilité d'erreur binaire
- $Q(x)$: Fonction de Marcum $\left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt\right)$
- $E[\]$: Espérance mathématique
- $Re[\]$: Partie réelle
- $Im[\]$: Partie imaginaire
- $\arg[\]$: Fonction argument
- $\log[\]$: Fonction logarithmique
- $\min[\]$: Fonction minimale
- $\max[\]$: Fonction maximale
- $[\]^T$: Operateur de transposition
- $[\]^H$: Hermitien, i.e. complexe conjugué transpose.
- $[\]^{-1}$: Matrice inverse
- $[\]^\#$: Pseudo inverse
- $(\hat{\ })$: Valeur estimée

- $*$: Produit de convolution
- $| |$: Module d'un nombre complexe
- $\| \|$: Norme Euclidienne
- $\det []$: Determinant d'une matrice
- $diag []$: Matrice diagonale
- x : Scalaire
- \mathbf{x} : Vecteur
- \mathbf{X} : Matrice
- \mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.
- \mathbb{N} : Ensemble des entiers naturels
- \mathbf{I}_n : Matrice identité de taille $n \times n$.

Théorie de l'information

- Capacité de canal : C

Codage et modulation

- Bits de la source ou Données : $\{b_{(i)}\}_{i=0, Nb-1}$, où Nb désigne la longueur de la séquence (typiquement *i.i.d.* Bernouilli de probabilité 1/2)
- Symboles émis : $\{a_k\}_k$
- Signal émis : $s(t) = \sum_k a_k g(t - kTs)$
- Filtre de mise en forme : $g(t); h(t)$
- Durée d'un symbole : Ts
- Temps-bit : T_b
- Rapidité de modulation : R
- Débit (bit utile) : $Db = R/T_b$
- Signal reçu : $x(t) = s(t) + W(t)$
- Bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de niveau spectral $\frac{N_0}{2}$: $W(t)$
- Filtre de réception : $h_r(t)$
- Signal après filtrage de réception : $y(t) = (x * h_r)(t)$
- Signal après échantillonnage : $y(kTs) = (x * h_r)(kTs)$ (quand $h * h_r$ satisfait le critère de Nyquist, $y_k = s_k + w_k$ avec w_k une gaussienne *i.i.d.* de moyenne nulle et de variance $\frac{N_0}{2} p(0)$)

Paramètres du système

L	Nombre de trajets du canal
τ_{RMS}	Étalement moyen au sens des moindres carrés
τ_{max}	Delai maximal de retard des trajets
$\bar{\tau}$	Delai moyen
$\alpha_l(\tau)$	Puissance du $l^{ème}$ trajet
$h_c(\tau; t)$	Réponse impulsionnelle d'un canal à trajets multiples
$\Gamma_{k,m}$	Matrice d'inter-corrélation
c^k	Séquence de chips de l'utilisateur k
$\delta_{m,n}$	Symbole de Kronecker
E_s	Energie par symbole
E_b	Energie par bit utile
B_m	Largeur de bande utilisée
B_{coh}	Bande de cohérence
E_b/N_0	Rapport entre énergie par bit et densité spectrale du bruit
$f_0; f_c$	Fréquence porteuse
f_d	Fréquence Doppler
B_d	Étalement Doppler
v	Vitesse du mobile
T_{coh}	Temps de cohérence
N_t	Nombre d'antennes en émission.
N_r	Nombre d'antennes en réception
\mathbf{r}	Vecteur de réception tel que $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$.
\mathbf{H}	Matrice du canal tel que $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$
\mathbf{s}	Vecteur de transmission tel que $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$
\mathbf{w}	Vecteur bruit tel que $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$
$h_{j,i}$	Coefficient d'évanouissement entre le $i^{ème}$ émetteur et le $j^{ème}$ récepteur
α	Facteur d'arrondi $\alpha \in [0, 1]$
M	Taille de la constellation
\mathbf{F}	Matrice de pondération \mathbf{F} (Beamformer)

ρ		SNR
G_r		Gain de multiplexage
G_d		Gain de diversité
η		Éfficacité spectrale
T_N		Durée d'un symbole OFDM
T_{tot}		Durée totale d'un symbole OFDM
T_g		Durée d'un intervalle de garde
N		Nombre de sous-porteuses
$B_N = \Delta f$		Distance entre sous-porteuses
$S(n)$	=	Symbole OFDM
$\sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{kn}{N}}$		

Avant propos

·
·
·

Avant propos

Ce polycopié de cours de la matière *communications numériques avancées* (UEF1.1.1) est destiné aux étudiants de première année Master LMD , filière : *Télécommunications*, spécialité : *Systèmes des Télécommunications*¹. Il est conforme au programme agréé par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.

L'élaboration du présent polycopié a été motivée par deux principales évolutions dans les communications numériques sans fil au cours de la dernière décennie. Le premier est l'accroissement massif des activités de recherche sur la théorie de la communication numérique sans fil au niveau physique. Bien que cela ait fait l'objet d'une étude depuis les années 60, les évolutions récentes dans le domaine, telles que les techniques d'accès multiples, la modulation multi-porteurs et les antennes multiples, ont apporté de nouvelles perspectives sur la façon de communiquer sur des canaux sans fil.

Deuxièmement, la technologie des systèmes de communication sans fil s'est développée à un rythme rapide à cause du développement potentiel de nouvelles applications telles que l'internet des objets (IoT : Internet of Things). Alors les exigences en terme des débits de transmissions et de la qualité de service (QoS) sont constamment revues et améliorées afin de s'assurer que les utilisateurs obtiennent la satisfaction souhaitée de leur expérience de communication sans fil.

1. Il peut également servir aux étudiants de troisième année Licence LMD , filière : *Télécommunications*, spécialité : *Télécommunications*.

Ce polycopié offre un horizon assez complet des principes de base qui sous-tendent l'analyse et la conception des systèmes de communication numériques sans fil. Il est le fruit d'un travail pédagogique et correspond à un cours enseigné depuis de nombreuses années dans le cursus master télécommunications. Le sujet des communications numériques implique la transmission d'informations sous forme numérique à partir d'une source générant les informations vers une ou plusieurs destinations (utilisateurs). Une importance particulière dans l'analyse et la conception de systèmes de communication c'est les caractéristiques des canaux sans fil à travers lesquels, l'information est transmise. Les caractéristiques du canal affectent généralement la conception des blocs basiques du système de communication sans fil.

La structure de ce polycopie, illustrée sur la figure 1, s'articule autour de quatre chapitres, correspondant aux différentes étapes repérant la conception d'un système de communication :

Chapitre I : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions élémentaires sur les modulations numériques. Le concept de représentation en phase et en quadrature offre une présentation conjointe de la modulation et de la démodulation pour les transmissions en bande de base comme pour les transmissions sur fréquence porteuse. Nous indiquons qu'en présence de bruit gaussien, le détecteur optimal est composé d'un filtre adapté (ou bien un corrélateur) suivi d'un bloc d'échantillonnage et de décision. Nous discutons le cas où l'absence d'interférence entre symboles IES permet de réaliser une décision symbole par symbole. Cette stratégie mené au critère de Nyquist et à la notion de diagramme de l'oeil. L'expression du taux d'erreurs binaire est établie pour la famille des modulations à M niveaux d'amplitude. Une comparaison est faite qui s'appuie sur deux notions fondamentales : le rapport signal sur bruit et l'efficacité spectrale. Ces deux notions sont aussi reliés à la formule de Shannon qui permet de déduire la limite fondamentale de l'efficacité spectrale pour un rapport signal sur bruit donné.

Chapitre II : Ce chapitre passe en revue les caractéristiques principales des canaux non idéaux et présente les modèles les plus fréquemment utilisés pour caractériser ces canaux, soient le modèle AWGN, le modèle de Rayleigh, le modèle de Rice. Nous parlons de la distribution de Rayleigh choisie comme modèle pour caractériser l'effet des évanouissements du canal. Nous discutons aussi les caractéristiques du canal sans fil tels que le temps et la bande cohérence, l'effet Doppler et l'effet des trajets multiples, ainsi le bruit et les interférences. Enfin, nous donnons aussi un aperçu sur les modèles mathématiques ainsi que les paramètres qui caractérisent les canaux invariant et variant en temps et en fréquences.

Chapitre III : Nous consacrons ce chapitre aux systèmes de communication multi-utilisateurs. Dans un premier temps, nous avons présenté les trois principales techniques d'accès multiple qui consistent à permettre aux différents utilisateurs présents dans un canal de partager les différentes ressources (bande passante, puissance, etc.) offertes par le système. Le partage de ces ressources pourra se faire selon différentes dimensions, soit en divisant le temps (dimension temporelle TDMA), la fréquence (dimension fréquentielle FDMA) ou soit en servant les usagers avec des codes distincts (dimension code CDMA). Nous avons fourni une description de chacune de ces techniques ainsi que ses principaux avantages et inconvénients tout en nous concentrons sur le CDMA. Deuxièmement, nous décrivons le principe de la modulation multi-porteuses orthogonale, ou encore multiplexage orthogonal par répartition de fréquence OFDM, est une technique qui consiste à employer plusieurs porteuses pour transmettre l'information. Cette technique de modulation a présenté une solution qui minimise les déformation dues aux interférences entre symboles IES, en outre, nous nous intéressons à cette technique en particulier pour sa propriété d'orthogonalité qui est implémentée afin de combattre les effets de canal multi-trajets à évanouissements.

Chapitre IV : Nous étudions dans ce chapitre la capacité des systèmes multi-antennes MIMO afin de déterminer les débits théoriques qu'on peut attendre de ces systèmes. Nous donnons d'abord un état de l'art sur les techniques MIMO et sur la capacité les formules des capacités des différents canaux SISO et SIMO et MISO seront fournies par la théorie de l'information et comparées à celle du système MIMO. Par cette notion de capacité, nous montrons les améliorations en termes de performances apportées par les systèmes MIMO. Ensuite, nous présentons les différentes techniques à diversité d'espace en émission, de codages spatio-temporels, multiplexage spatial, les MIMO "Beamforming" et les récepteurs les plus courants. . Enfin, nous terminons le chapitre par une dernière solution en vue d'une implémentation en de plusieurs antennes dans un contexte multi-utilisateurs (MU-MIMO).

Une liste d'exercices complète le cours chapitre par chapitre sont donnés à titre d'exercices d'applications, et permet aux étudiants de s'exercer régulièrement.

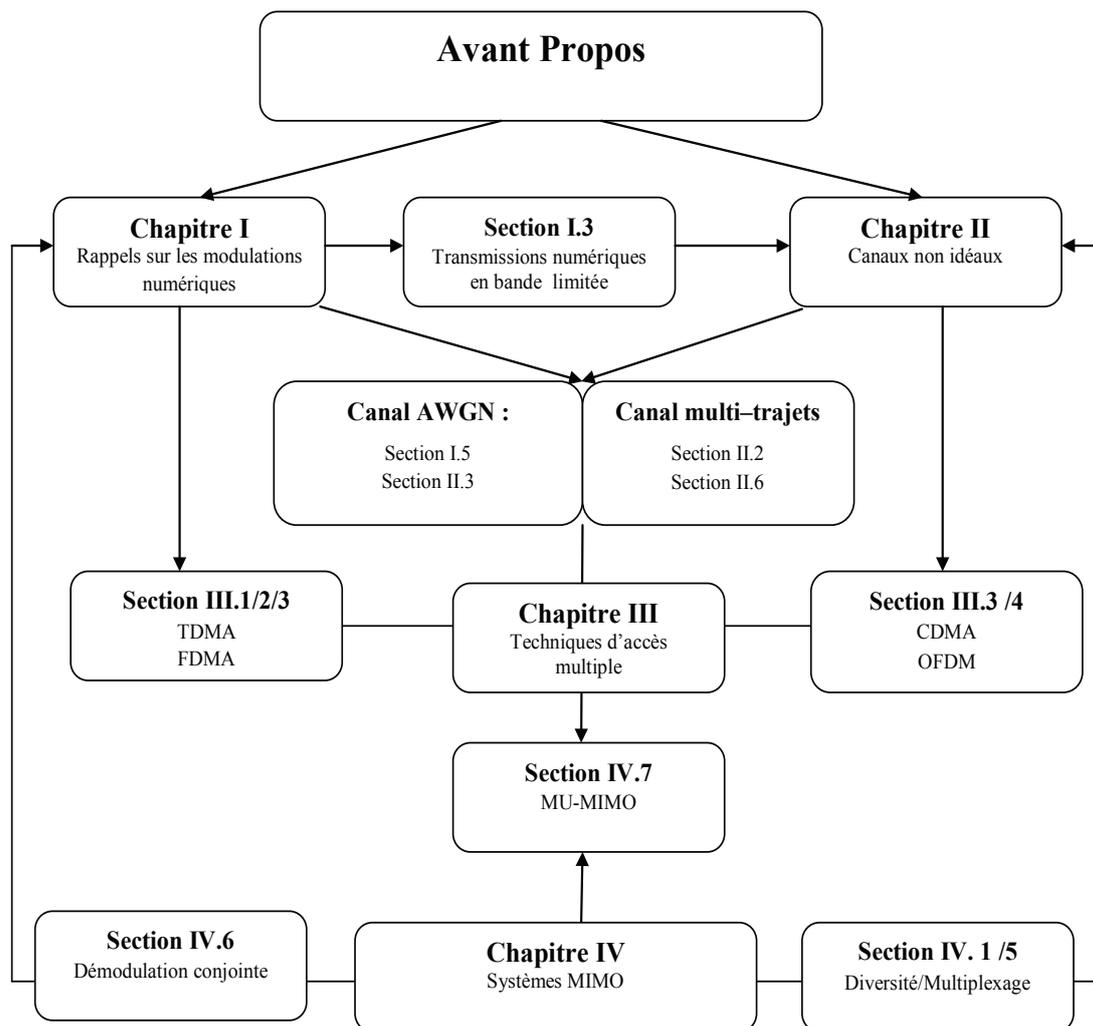
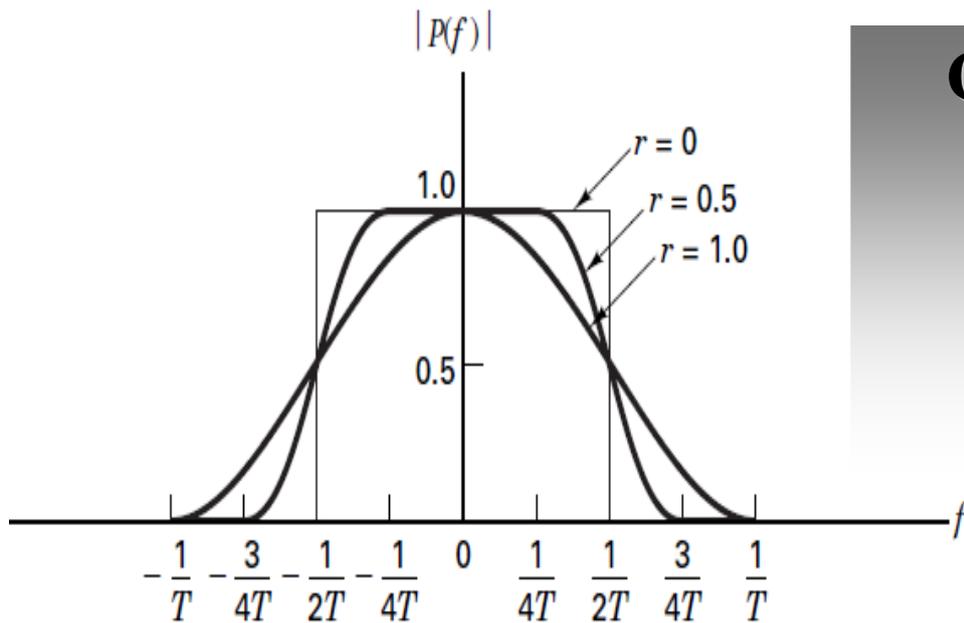


Figure 1: Structure du polycopié.



Rappels sur les modulations numérique

1. Modulations à bande étroite et à large bande
2. Modulations numériques de type ASK, FSK, PSK
3. Transmissions numériques en bande limitée
4. Évaluations des systèmes de transmission numériques
5. Récepteurs AWGN : Démodulateur et Détecteur
6. Exercices

Chapitre I

Rappels sur les modulations numériques

1 Modulations à bande étroite et à large bande

L'opération de modulation numérique peut se décomposer en une opération de construction des composantes en Bande de Base du signal modulé, qui dépend du format de la modulation suivie d'une opération de transposition autour de la fréquence porteuse désirée, appelée « Modulation I/Q ».

Le signal modulé $m(t)$ étant un signal réel passe-bande de largeur B_m autour d'une fréquence porteuse f_0 , il peut toujours s'écrire (et être construit) comme :

$$m(t) = m_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + m_Q(t) \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) \quad (\text{I.1})$$

où $m_I(t)$, et $m_Q(t)$ sont deux signaux réels en bande de base appelés respectivement composantes en phase (I , *In phase*) et en quadrature (Q).

Définition 1.1 modulation à bande étroite

On parle d'une modulation à bande étroite si ($B_m \ll f_0$). Si la modulation numérique est bande étroite, alors le rythme de changement des symboles est lent.

À titre d'exemple, nous notons dans le tableau I.1 quelques valeurs de f_0 et B_m pour des

systèmes de communication standard à bande étroite. L'avantage majeur de telle modulation réside dans le fait que les atténuations du canal de propagation influencent toutes les informations de la même façon. Néanmoins, toute l'information étant concentrée sur une étendue spectrale faible, il est relativement aisée "d'écouter" la communication pour en intercepter le contenu. Les méthodes de modulations modernes tendent à dépasser ces limitations. Pour cela, au lieu d'être concentrée sur une petite étendue fréquentielle (le canal), l'information est répartie sur une large plage de fréquences. On parle alors de modulations "large bande".

Système	f_0	B_m
TNT/DVBT	600MHz (UHF)	8MHz
2G	900MHz	200KHz
WiFi	2,4 GHz	20MHz
LTE	0,7–2,6GHz	20MHz
Satellite DVB-S2	12–18GHz (bande Ku)	38MHz

Tableau I.1: Quelques systèmes à bande étroite et des valeurs pratiques de f_0 et B_m

Définition 1.2 modulation large bande

De façon générale, les techniques de modulation large-bande consistent à répartir le signal utile sur une large plage de fréquences autour de la porteuse. La relation $B_m \ll f_0$ devient $B_m \lesssim f_0$.

Cette modulation possède une densité spectrale de puissance globalement plus faible, pour l'émission des informations de chaque communication, la puissance disponible est étalée sur une large plage de fréquences. Il existe actuellement deux catégories de modulations larges bandes : les modulations à étalement de spectre et les modulations multi-porteuses, ces techniques seront traitées plus en détail dans chapitre III.

2 Modulations numériques de type ASK, FSK, PSK

La modulation a pour objectif d'adapter le signal à émettre au canal de transmission. Cette opération consiste à modifier un ou plusieurs paramètres d'une onde porteuse $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ centrée sur la bande de fréquence du canal. Les paramètres modifiables sont :

- L'amplitude : A

- La fréquence : $f_0 = \omega_0/2\pi$
- La phase : φ_0

Les types de modulation les plus fréquemment rencontrés sont les suivants :

- Modulation par Déplacement d'Amplitude MDA. (*Amplitude Shift Keying ASK*) ;
- Modulation par Déplacement de Phase MDP. (*Phase Shift Keying PSK*) ;
- Modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature MAQ. (*Quadrature Amplitude modulation QAM*) ;
- Modulation par Déplacement de Fréquence MDF. (*Frequency Shift Keying FSK*).

Dans les communications numériques, on utilise la modulation d'amplitude et la modulation de phase. Ces deux modulations peuvent être utilisées séparément, mais dans ce cas elles sont difficiles à générer à l'émetteur et difficiles à détecter au récepteur. Donc, en pratique, nous utilisons ces deux modulations d'une manière qu'elles dépendent l'une de l'autre : le signal à l'émettre est séparé en deux composants, **I** ("In-phase") et **Q** ("quadrature"), qui correspondent aux parties réelle et imaginaire du signal.

Définition 2.1 La modulation M -aire

La modulation s'appelle M -aire, si chaque symbole émis peut prendre M valeurs possibles. Dans la plupart des cas, le symbole est formé à partir d'un vecteur de n bits, ce qui conduit à $M = 2^n$.

Le signal modulant, obtenu après codage, est un signal en bande de base, éventuellement complexe, qui s'écrit sous la forme :

$$c(t) = \sum_k c_k g(t - kT) = c_k(t) = a_k(t) + jb_k(t) \quad (\text{I.2})$$

avec $c_k(t) = a_k(t) + jb_k(t)$

La fonction $g(t)$ est une forme d'onde qui est prise en considération dans l'intervalle $[0, T[$ puisque t doit vérifier la relation $t \in [kT, (k+1)T[$. Dans les modulations ASK, PSK et QAM, la modulation transforme ce signal $c(t)$ en un signal modulé $m(t)$ tel que :

$$m(t) = \text{Re} \left[\sum_k c_k(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right] \quad (\text{I.3})$$

Le signal modulé s'écrit aussi plus simplement :

$$m(t) = \sum_k a_k(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \sum_k b_k(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\text{I.4})$$

$$\text{Ou bien } m(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - b(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\text{I.5})$$

Les deux signaux $a(t)$ et $b(t)$ sont aussi appelés "trains modulants" et s'écrivent : $a(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$ et $b(t) = \sum_k b_k g(t - kT)$. Les symboles a_k et b_k prennent respectivement leurs valeurs dans l'alphabet (A_1, A_2, \dots, A_M) et dans l'alphabet (B_1, B_2, \dots, B_M) . Le schéma théorique du modulateur est représenté sur la figure I.1.

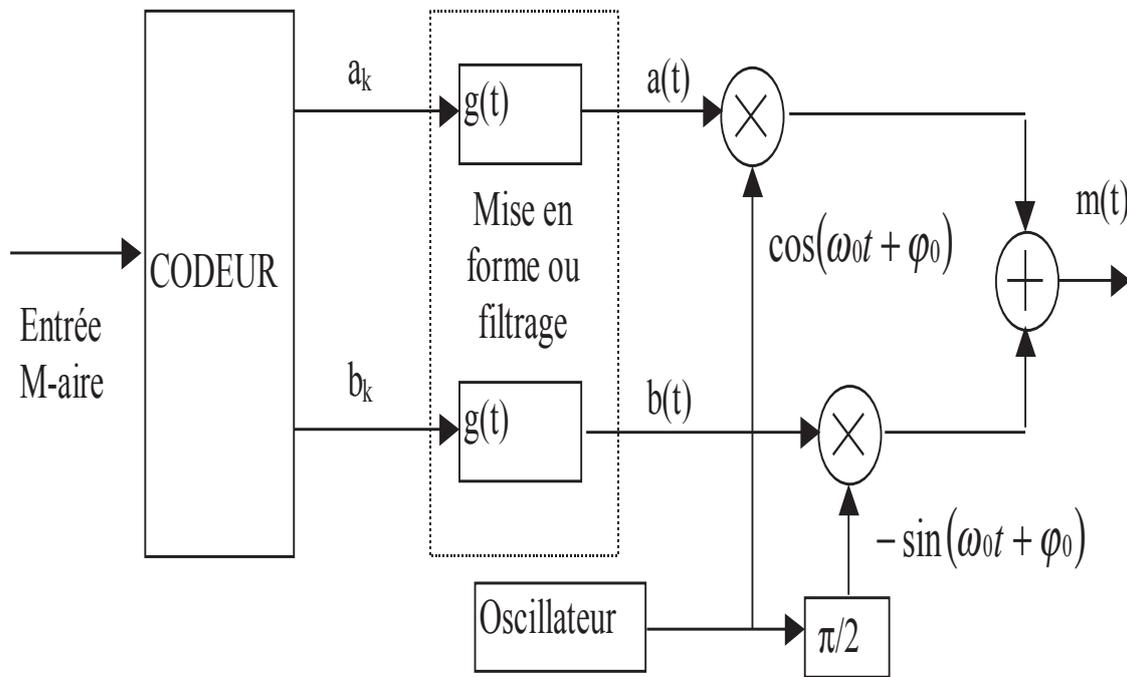


Figure I.1: Forme générale du modulateur.

2.1 La modulation ASK

Pour chaque symbole c_k , on émet le signal $a_k g(t - kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ pendant la durée $t \in [kT, (k + 1)T[$ (Pas de composante en quadrature) :

$$m(t) = \sum_k a_k(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\text{I.6})$$

Exemple 2.1

modulation 4-ASK , séquence de bits : 1 0 1 1 0 0 0 1 , voir la figure I.2

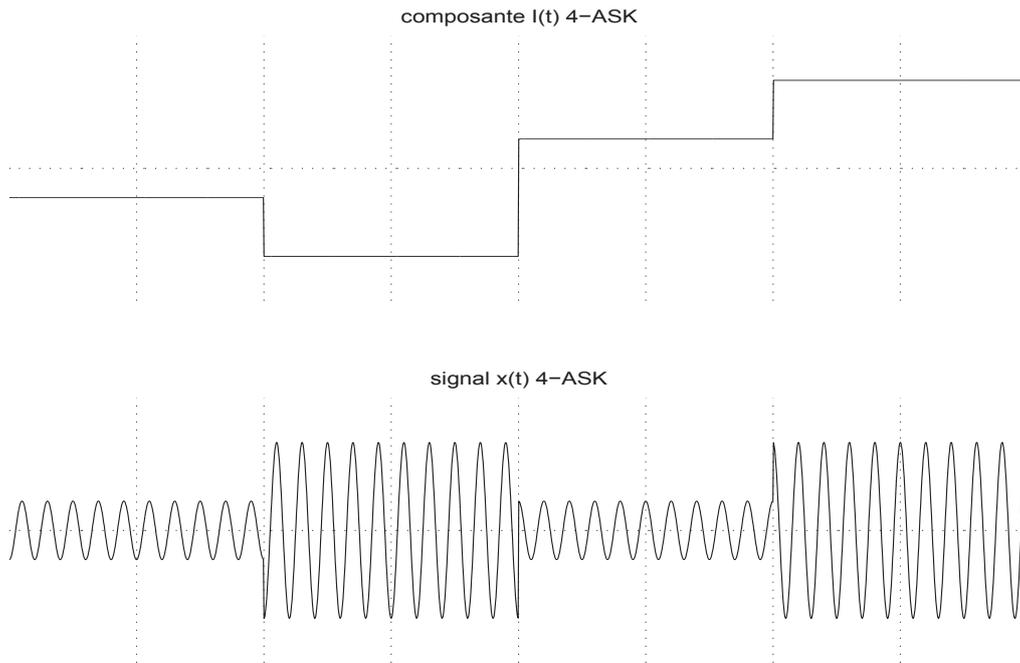


Figure I.2: Exemple d'une modulation 4-ASK.

2.2 La modulation PSK

Pour chaque symbole c_k , on émet le signal $g(t - kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$ pendant la durée $t \in [kT, (k + 1)T[$, où les φ_k sont uniformément réparties sur $[0; 2\pi[$, on pose $\varphi_0 = 0$:

$$m(t) = \sum_k g(t - kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_k) \quad (I.7)$$

$$= I(t) \cos(\omega_0 t) - Q(t) \sin(\omega_0 t)$$

$$I(t) = a(t) = \sum_k g(t - kT) \cos(\varphi_k) \quad (I.8)$$

$$Q(t) = b(t) = \sum_k g(t - kT) \sin(\varphi_k) \quad (I.9)$$

c'est-à-dire $(a_k; b_k) = (\cos(\varphi_k); \sin(\varphi_k))$, et $a(t)$ et $b(t)$ sont des signaux $M/2 - NRZ$ de

niveaux respectifs a_k et b_k .

Exemple 2.2

modulation QPSK séquence de bits : 1 0 1 1 0 0 0 1 , voir la figure I.3

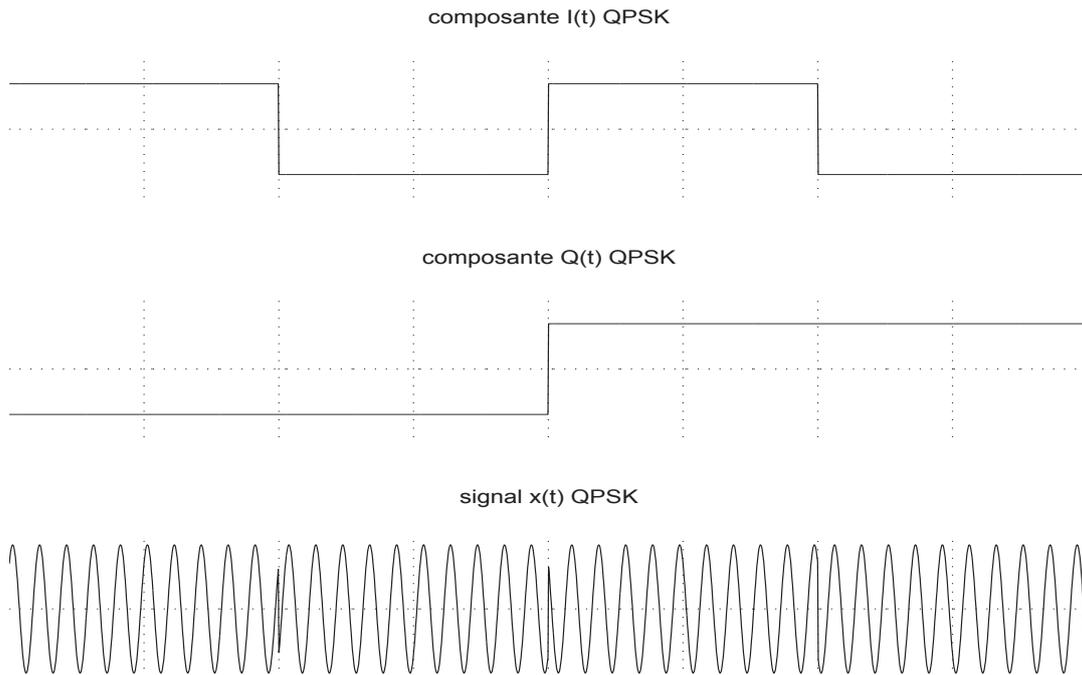


Figure I.3: Exemple d'une modulation QPSK.

2.3 La modulation QAM

Pour chaque symbole c_k , on émet le signal $a_k g(t - kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$ pendant la durée $t \in [kT, (k + 1)T[$, où les φ_k sont uniformément réparties sur $[0; 2\pi[$ on pose $\varphi_0 = 0$:

$$m(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_k) \quad (\text{I.10})$$

$$= I(t) \cos(\omega_0 t) - Q(t) \sin(\omega_0 t)$$

$$I(t) = a(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \cos(\varphi_k) \quad (\text{I.11})$$

$$Q(t) = b(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \sin(\varphi_k) \quad (\text{I.12})$$

c'est-à-dire $(a_k; b_k) = (a_k \cos(\varphi_k); a_k \sin(\varphi_k))$, et $a(t)$ et $b(t)$ sont des signaux $M - NRZ$ de niveaux respectifs a_k et b_k .

Exemple 2.3

modulation 16-QAM séquence de bits : 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0, voir la figure I.4 , avec une constellation 16-QAM rectangulaire voir la figure I.5

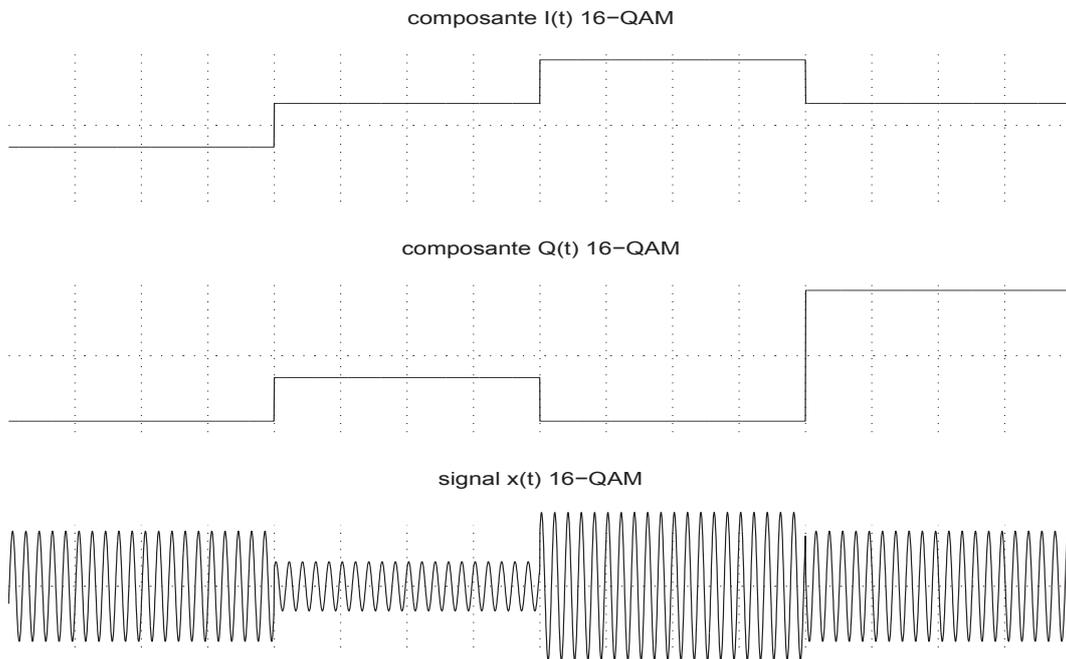


Figure I.4: Exemple d'une modulation 16-QAM.

2.4 La modulation FSK

L'idée est d'émettre les $M = 2^n$ symboles possibles (groupe de n bits) en émettant des signaux de fréquences différentes. La séparation entre les fréquences :

$$\Delta f = \frac{\text{Bande de fréquence}}{M} \tag{I.13}$$

Appelons Δf la différence de la fréquence instantanée correspondant à l'émission de deux symboles adjacents ; Et soit a_k un symbole appartenant à l'ensemble $\{\pm 1, \pm 3, \dots \pm (M -$

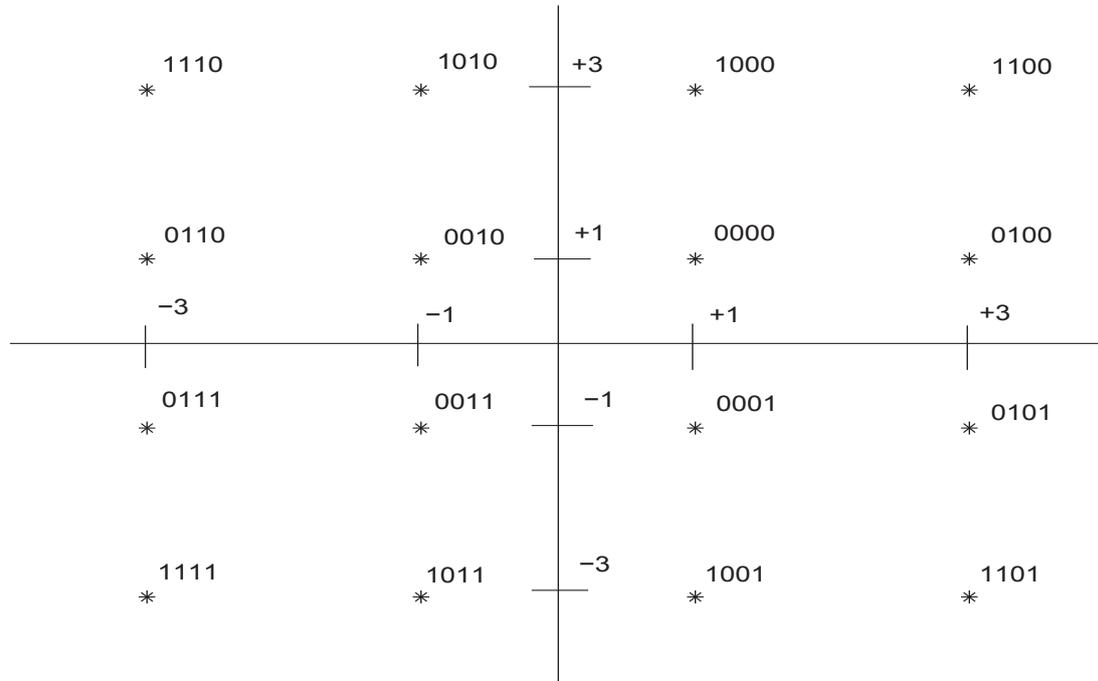


Figure I.5: Constellation 16-QAM rectangulaire.

1)}. L'expression du signal modulé par déplacement de fréquence s'écrit aussi plus simplement, et en prenant $\varphi_0 = 0$, par :

$$m(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

C'est la *dérivée* de la phase $\varphi(t)$ qui est reliée de façon simple (linéaire) à la valeur des symboles, le tout constituant une relation non linéaire. Alors, L'expression du signal modulé est :

$$m(t) = \cos\left(2\pi\left(f_0 \pm a_k \frac{\Delta f}{2}\right)t\right) \quad (\text{I.14})$$

Avec la fréquence instantanée est :

$$f(t) = f_0 \pm a_k \frac{\Delta f}{2} \quad (\text{I.15})$$

Définition 2.2 Indice de modulation

l'indice de modulation $\mu = \Delta f T$ conditionne la forme de la densité spectrale du signal modulé

Exemple 2.4

modulation BFSK séquence de bits : 0 1 1 0 1 0 0 , voir la figure I.6

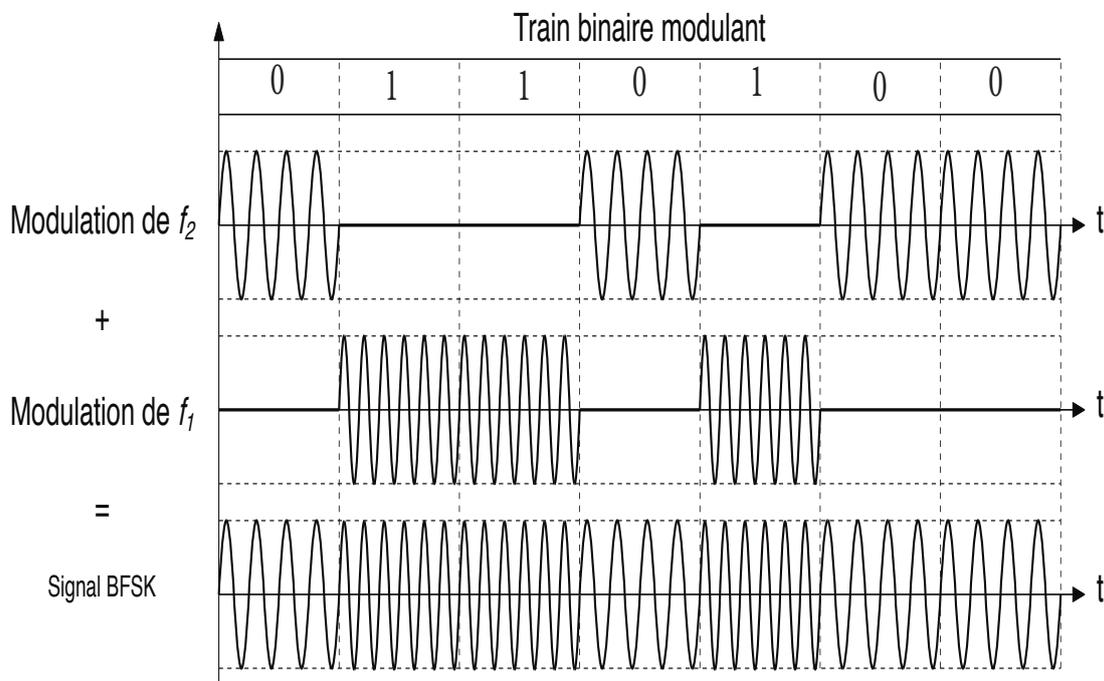


Figure I.6: Exemple d'une modulation FSK.

3 Transmissions numériques en bande limitée

Jusqu'à ici, dans ce chapitre, il était supposé que la bande de fréquences allouée à la transmission était infinie (canal idéal). Ce canal, qui n'a pas de réalité physique, est cependant un bon modèle lorsque la bande passante du canal est suffisamment large pour transmettre sans distorsion le signal modulé. Nous allons maintenant nous placer dans un cas plus réaliste où une bande de fréquences de largeur B est disponible pour transmettre le signal modulé. Dans cette bande B le canal est supposé avoir une réponse plate et une phase linéaire.

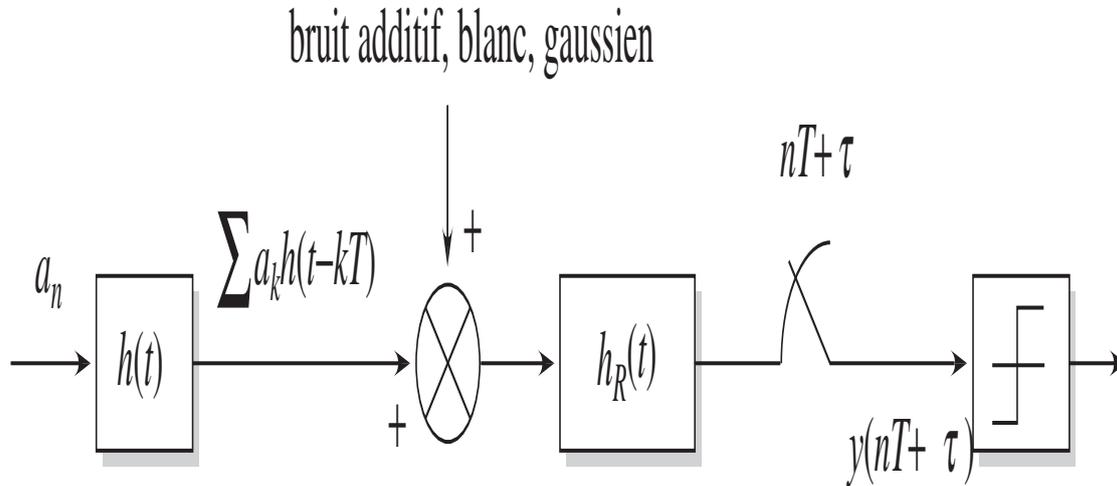


Figure I.7: Chaîne de transmission en bande de base.

3.1 L'interférence entre symboles

Considérons la transmission d'une suite de symboles. M -aires sur un canal à bande limitée. Nous supposons que la limitation de la bande est due à la présence d'un filtre d'émission de réponse impulsionnelle $h(t) = h_e(t) \star h_c(t)$ ¹ combinant le filtre d'émission et le filtre modélisant le canal de transmission (cf. Figure I.7). La transmission se fait à travers un canal non distordant, à bande limitée B , soumis à un bruit $W(t)$ additif, blanc, gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Le signal $x(t)$ reçu par la réception est égale à :

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT) + W(t) \quad (\text{I.16})$$

Le récepteur cohérent utilise un filtre de réception suivi d'un échantillonneur à l'instant $t_0 + nT$ et d'un comparateur à seuils, où t_0 est un instant qui peut être choisi arbitrairement.

1. Si la bande du signal émis est limitée, la forme de l'impulsion élémentaire $h(t)$ est de durée infinie. Alors il faut bien choisir $h(t)$ pour pouvoir reconstituer parfaitement à la réception les échantillons émis à la cadence symbole de $1/T$.

La sortie du filtre de réception de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ a pour expression :

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k p(t_0 + (n - k)T) + w(t_0 + nT) \quad (\text{I.17})$$

où $p(t) = h(t) \star h_r(t)$ et $w(t) = W(t) \star h_r(t)$

On peut décomposer l'échantillon $y(t_0 + nT)$ en une somme de trois termes :

$$y(t_0 + nT) = \underbrace{a_n p(t_0)}_{1^{er} \text{ Terme}} + \underbrace{\sum_{k \neq n} a_k p((n - k)T)}_{2^{eme} \text{ Terme}} + \underbrace{w(t_0 + nT)}_{3^{eme} \text{ Terme}} \quad (\text{I.18})$$

- Le premier est relatif au symbole qui a été émis à l'instant nT ;
- Le second est relatif à tous les autres symboles autres que celui qui a été émis à l'instant nT . Pour cette raison il porte le nom d'Interférences Entre Symboles (en IES, en anglais ISI pour *Inter Symbol Interferences*) ;
- Le troisième est relatif au bruit additif sur le canal.

3.2 Condition d'absence d'IES : critère de Nyquist

Pour garantir l'absence d'interférence intersymbole, on doit avoir la condition suivante sur la forme d'onde $p(t)$:

$$p(t_0 + (n - k)T) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = k \\ 0 & \text{pour } n \neq k \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Condition en fréquences (équivalente) :

$$\sum_k P(f - k/T) e^{2j\pi(f - k/T)t_0} = TP(t_0) \quad (\text{I.20})$$

Pour $t_0 = 0$, les équations (I.19) et (I.20) devient :

$$p((n - k)T) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = k \\ 0 & \text{pour } n \neq k \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

$$\sum_k P(f - k/T) = TP(0) = \text{constante} \quad (\text{I.22})$$

Interprétation du critère de Nyquist pour un canal de largeur B

- $1/T > 2B$: Toujours d'IES
- $1/T \leq 2B$: possibilités de choisir $P(f)$ qui vérifie le critère de Nyquist : $P(f) + P(f - 1/T) = TP(0)$

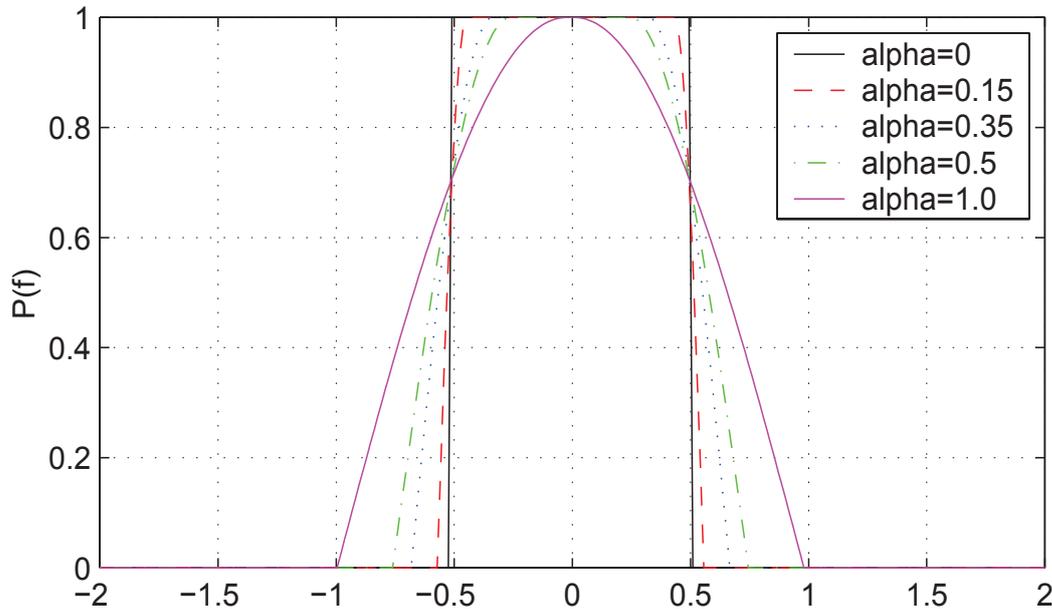


Figure I.8: Fonctions de transfert des filtres en cosinus-surélevé.

Répartition du filtrage : racine carrée de Nyquist

Lorsque le canal de transmission est un canal AWGN (Canal idéal : $H_c(f) = 1$), on a $P(f) = H_e(f)H_r(f)$ afin de maximiser le rapport signal à bruit à la réception on scinde le filtre en

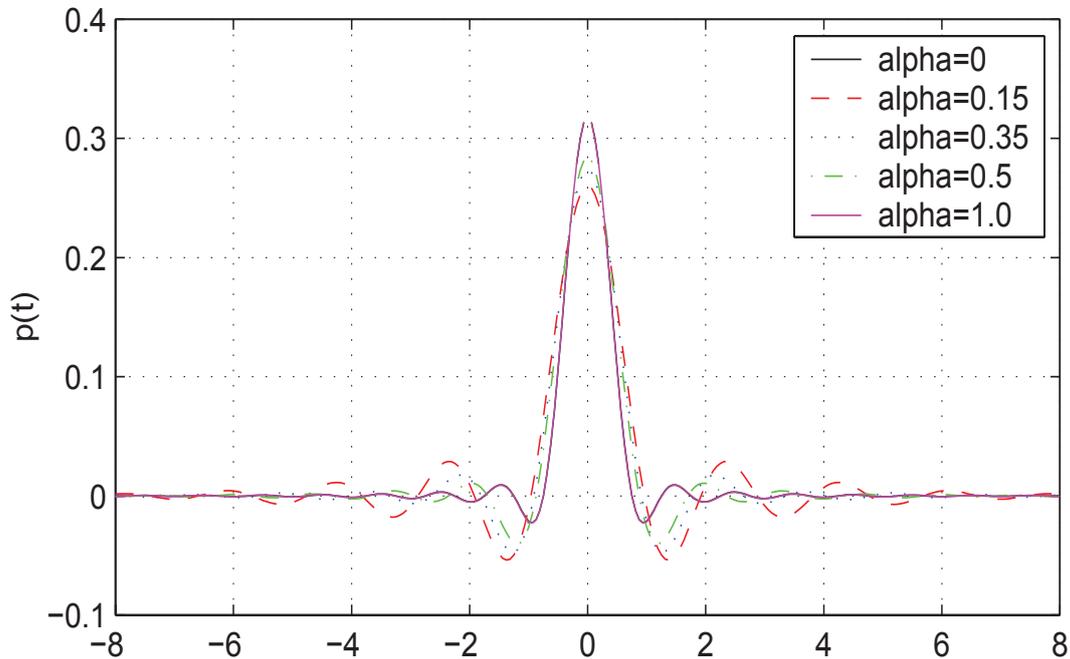


Figure I.9: Réponses impulsionnelles des filtres en cosinus-surélevé.

cosinus surélevé en deux filtres identiques :

$$H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{C_\alpha(f)} = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{pour } |f| = \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi T}{2\alpha} (|f| - (1 - \alpha/2T))\right) & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{pour } |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (I.25)$$

Notons que le critère de non IES n'est pas vérifié par le filtre d'émission $h_e(t)$ mais seulement par le filtre global $p(t)$ dont la fonction de transfert satisfait bien le critère de non IES.

3.3 Diagramme de l'oeil

C'est la superposition sur une seule période (intervalle de temps de longueur T) de toutes les périodes du signal analogique reçu $y(t)$. Le but est de visualiser les chevauchements entre les symboles (IES) et de déterminer l'instant d'échantillonnage optimal (instant de la période où l'oeil est le plus ouvert). L'observation du diagramme de l'oeil fournit les indications suivantes :

- hauteur de l'oeil : immunité au bruit.
- largeur de l'oeil : marge pour le choix de l'instant d'échantillonnage.
- pente de la fermeture : sensibilité à une erreur par rapport à l'instant optimal.

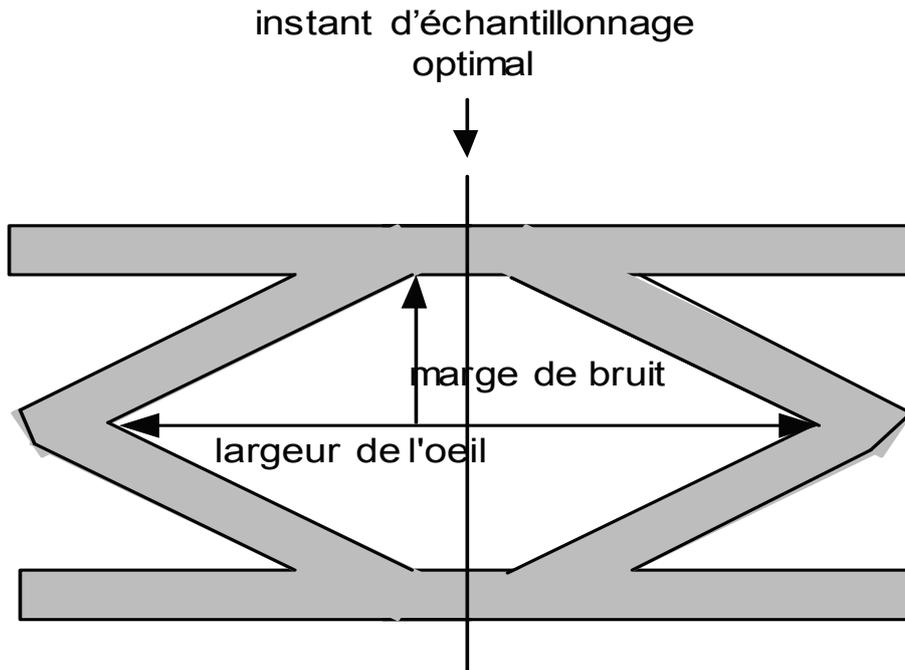


Figure I.10: Diagramme de l'oeil.

Définition 3.1 Distorsion maximale d'IES

cest un moyen quantitatif de juger du niveau d'IES. Lorsque la distorsion maximale :

$$D_{\max} = (M - 1) \frac{\sum_k |p(k)| - |p_{\max}|}{|p_{\max}|} \quad (\text{I.26})$$

où $p_{\max} = \max \{p(k)\}$

Si $D_{\max} \ll 1$, une décision symbole par symbole peut être utilisée, cela correspond à un oeil très ouvert verticalement. Par contre si $D_{\max} \gtrsim 1$, une décision optimale symbole par symbole est impossible.

3.4 Expression de la probabilité d'erreur en présence de filtrage de Nyquist

Les symboles émis prenant leurs valeurs de l'alphabet $a_n \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$. Si la fonction $p(t) = h(t) \star h^*(-t)$ vérifie le critère de Nyquist, les quantités en sortie du filtre adapté ont la forme suivante :

$$y_n = a_n p(0) + w_n \quad (\text{I.27})$$

Où w_n sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes, de même variance :

$$\sigma_{w_n}^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} p(0) \quad (\text{I.28})$$

La probabilité d'erreur par symbole peut être approximée comme :

$$Pe = 2 \left(\frac{M-1}{M} \right) Q \left(\frac{p(0)}{\sigma} \right) \quad (\text{I.29})$$

$$\text{avec } Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (\text{I.30})$$

On peut montrer que $\mathbb{E}\{a_n\} = 0$ et que $\mathbb{E}\{a_n^2\} = \frac{2}{M} (1^2 + 3^2 + \dots + (M-1)^2) = \frac{M^2-1}{3}$. En calculant l'énergie moyenne par symbole :

$$E_s = \mathbb{E} \left\{ a_n^2 \int |h(t)|^2 dt \right\} = \frac{M^2-1}{3} p(0) \quad (\text{I.31})$$

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{3 \log_2 M} p(0) \quad (\text{I.32})$$

En portant (I.28) et (I.32) dans (I.29), on déduit l'expression de la probabilité d'erreur :

$$Pe = 2 \left(\frac{M-1}{M} \right) Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \frac{3}{M^2-1} \log_2 M} \right) \quad (\text{I.33})$$

D'après l'équation (I.33), on peut remarquer trois termes :

- $\frac{2E_b}{N_0}$ directement lié au rapport signal sur bruit.

- $\frac{3}{M^2-1}$ directement lié à la géométrie de la constellation utilisée.
- $\log_2 M$ directement lié à la taille de l'alphabète de modulation.

4 Évaluations des systèmes de transmission numériques

La conception de tout système de communication numérique commence par une description du canal (*puissance reçue, bande passante disponible, statistiques de bruit et autres dégradations telles que l'évanouissement*) et une définition des exigences du système (*débit et performances d'erreur*). Un compromis doit être trouvé en fonction des divers paramètres de système est fondamental. Les objectifs du constructeur peuvent être les suivants :

- Maximiser l'efficacité spectrale (rapport entre le nombre de bits transmis par seconde et la largeur de bande utilisée) ;
- Minimiser le taux d'erreurs par bit ;
- Minimiser la puissance émise ;
- Minimiser la bande passante pour un débit binaire donné ;
- Minimiser la complexité du système en émission et réception,... etc

Avant d'aborder l'analyse et le compromis entre les différents paramètres des systèmes de transmission numériques, il faut rappeler quelques définitions de base concernant ces systèmes.

Définition 4.1 Éfficacité spectrale

exprimée en *bits/s/Hz* est définie par :

$$\eta = \frac{D_b}{B} \text{ (bits/s/Hz)} \quad (\text{I.34})$$

Où D_b désigne le débit binaire et B la bande de fréquence du canal.

On donne aussi :

$$D_b = R_s \times \log_2(M) \quad (\text{I.35})$$

Avec R_s désigne la vitesse de symbole (rapidité de la modulation)

Définition 4.2 Efficacité de puissance $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$

exprimée en *Joules/W/Hz* est définie par :

$$\rho = \frac{E_b}{N_0} \text{ (Joules/W/Hz)} \quad (\text{I.36})$$

où E_b désigne la quantité d'énergie par bit, exprimée en nombre de Joules par bit, et $N_0/2$ la densité spectrale du bruit additif, blanc sur le canal, exprimée en (W/Hz) . On en déduit que la puissance moyenne du signal reçu est donnée par $S = E_b \times D_b$ et que la puissance du bruit dans la bande B est donnée par $N = N_0 \times B$. On en déduit le rapport signal sur bruit (*Signal to Noise Ratio : SNR*)

$$\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0} \times \eta \quad (\text{I.37})$$

Définition 4.3 Taux d'erreur sur les bits (*BER*)

La probabilité d'erreur par symbole définie par $P_s = Prob\{\hat{a}_k \neq a_k\}$ où \hat{a}_k désigne la valeur choisie par le récepteur et a_k le symbole émis. On considère aussi le taux d'erreur binaire (*Bit Error Rate : BER*). Dans le cas où le rapport signal sur bruit est grand, l'expression approchée du BER est :

$$BER \simeq \frac{P_s}{\log_2 M} \quad (\text{I.38})$$

En pratique, BER estimée par la mesure du rapport : $BER = \frac{\text{nombre de bits erronés}}{\text{nombre total de bits transmis}}$.

Théorème 1 Canal gaussien - C.E.Shannon(1948)

Soit un canal de bande en fréquence B soumis à un bruit additif gaussien blanc et soit un rapport signal sur bruit SNR. On appelle capacité du canal gaussien la quantité mesurée en bit/s et définie par :

$$C_{\max} = B \log_2 (1 + SNR) \quad (\text{I.39})$$

D'après le théorème de Shannon, si le débit binaire de la source $D_b < C_{\max}$, il existe un

ensemble (modulateur/démodulateur) asymptotiquement sans erreur.

4.1 Évaluation selon l'efficacité spectrale

L'efficacité spectrale maximale η est maximale lorsque la bande passante est minimale soit $B_{min} = 1/T_s$, on a :

$$\eta_{max} = \frac{1}{T_b B_{min}} = \frac{T_s}{T_b} \quad (I.40)$$

Si le débit binaire est égal à la capacité du canal ($D_b = C_{max}$), et d'après (I.37) et (I.39), l'efficacité spectrale η_{max} devient :

$$\eta_{max} = \frac{C_{max}}{B} = \log_2 \left(1 + \eta_{max} \times \frac{E_b}{N_0} \right) \quad (bit/sec/Hz) \quad (I.41)$$

Cette équation peut s'écrire encore :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\eta_{max}} - 1}{\eta_{max}} \quad (I.42)$$

La courbe $\eta_{max} = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ donne une limite fondamentale aux transmissions sûres. Nous avons représenté figure I.11 la courbe donnant $\frac{E_b}{N_0}$ en dB en fonction de η_{max} en $bit/sec/Hz$. Pour les points situés au dessous de la courbe, il existe un système de communication dont la probabilité d'erreurs peut être rendue aussi faible que l'on veut. À titre d'exemple, les performances des systèmes utilisant une modulation de phase à 2 et 4 états (*BPSK* et *QPSK*) sans codage sont respectivement à $9.5 dB$ et $7.75 dB$ de la limite de Shannon. L'ajout d'un code convolutif (133,171) de rendement $R = 1/2$ à un système utilisant une modulation BPSK apporte un gain de $5.1dB$ par rapport au système sans codage.

Exemple 4.1 Sélection de la modulation suivant l'efficacité spectrale

La figure I.12 illustre l'évolution de l'efficacité spectrale dans le cas de quelques modulations M-aires en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$. À faible rapport $\frac{E_b}{N_0}$ l'efficacité spectrale maximale est quasiment identique pour toutes les modulations. Il est ainsi inutile d'adopter des modulations d'ordre élevé dans cette région même si le processus de codage canal

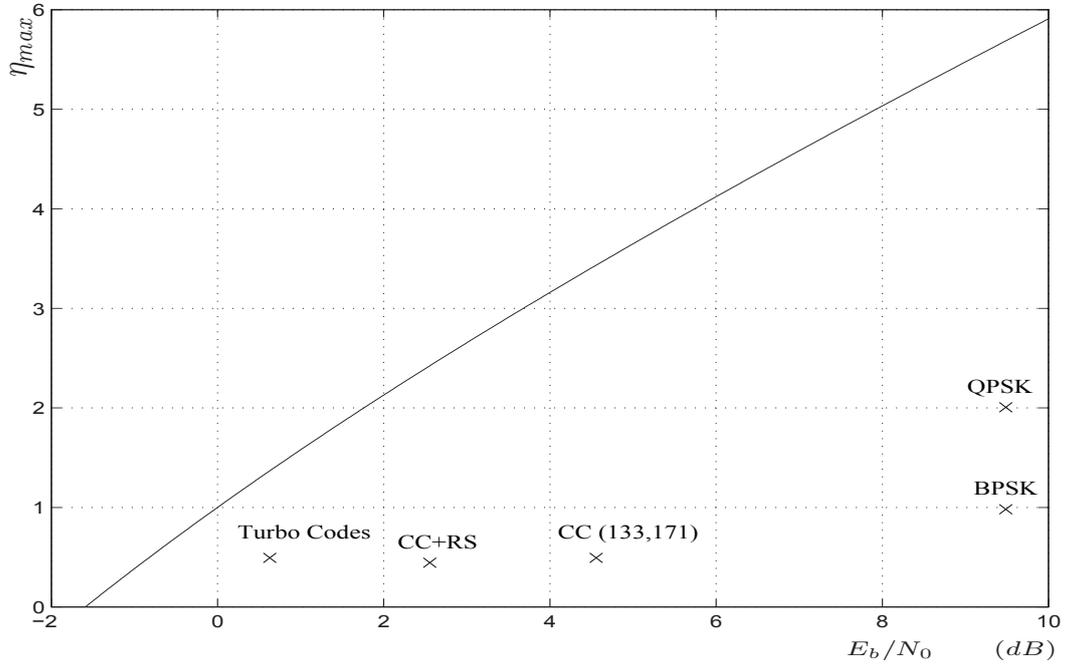


Figure I.11: Limite fondamentale de transmission sur le canal AWGN ($BER = 10^{-5}$).

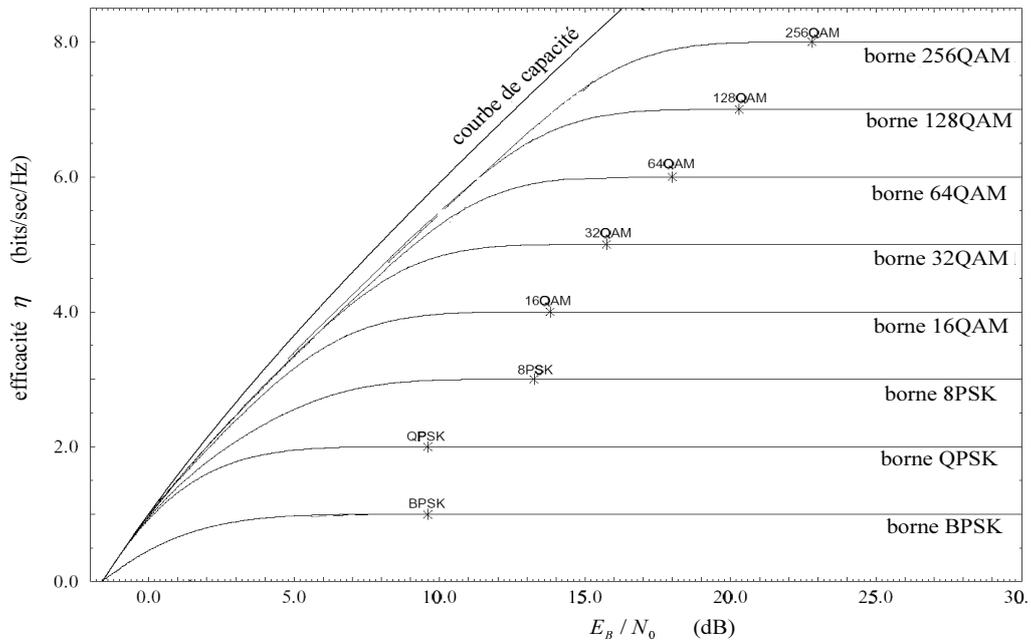


Figure I.12: Efficacité spectrale de modulations M -aires sur le canal AWGN ($BER = 10^{-5}$).

permet d'approcher sa capacité maximale. Par contre, dans le cas d'un fort rapport $\frac{E_b}{N_0}$, les modulations d'ordre élevé sont plus attractives d'un point de vue efficacité spectrale. On peut aussi remarquer que l'efficacité spectrale d'une modulation M -aire, qui est égale à $\log_2(M)$, est théoriquement irréalisable notamment à faible rapport signal sur bruit. Ce fait traduit la nécessité de l'utilisation d'un processus de codage canal pour assurer une communication sans erreurs.

4.2 Évaluation selon l'occupation spectrale

À partir de l'équation (I.40), on peut constater que tout système de communication numérique deviendra plus efficace en bande passante lorsque le produit $T_b B_{min}$ sera réduit. Ainsi, les signaux avec des produits $T_b B_{min}$ petits sont souvent utilisés pour des systèmes à bande limitée. Par exemple, le système mondial de communications mobiles (*GSM*) utilise la modulation GMSK² (*Gaussian Minimum Shift Keying*) ayant un produit $T_b B_{min}$ égal à $0,3 Hz/bit/s$, où B_{min} est la bande passante à $3dB$ d'un filtre Gaussien.

L'objectif des systèmes de transmissions numériques en bande limitée est de maximiser le débit d'information transmis dans la bande passante autorisée, au détriment de $\frac{E_b}{N_0}$ (tout en assurant une valeur spécifiée de BER). Sur la figure I.13 les points de fonctionnement pour la modulation MPSK sont tracés dans le plan de l'efficacité spectrale à $BER = 10^{-5}$. On suppose pour la modulation MPSK un filtrage Nyquist en bande de base, la bande passante minimale est liée à la vitesse de symbole par :

$$B_{min} = \frac{1}{T_s} = R_s \quad (I.43)$$

Où T_s est la durée du symbole et R_s est la vitesse de symbole. L'utilisation du filtrage de Nyquist entraîne une bande passante minimale qui implique une transmission sans IES ; un tel filtrage idéal donne naissance au nom bande passante *minimale* de Nyquist. À partir des équations (I.35) et (I.43), l'efficacité spectrale pour les signaux modulés MPSK utilisant le

2. C'est une modulation de fréquence à phase continue et indice de modulation $\mu = 0.5$.

filtrage de Nyquist peut être exprimé par :

$$\eta_{MPSK} = \frac{D_b}{B_{min}} = \log_2 M \quad \text{bits/s/Hz} \quad (I.44)$$

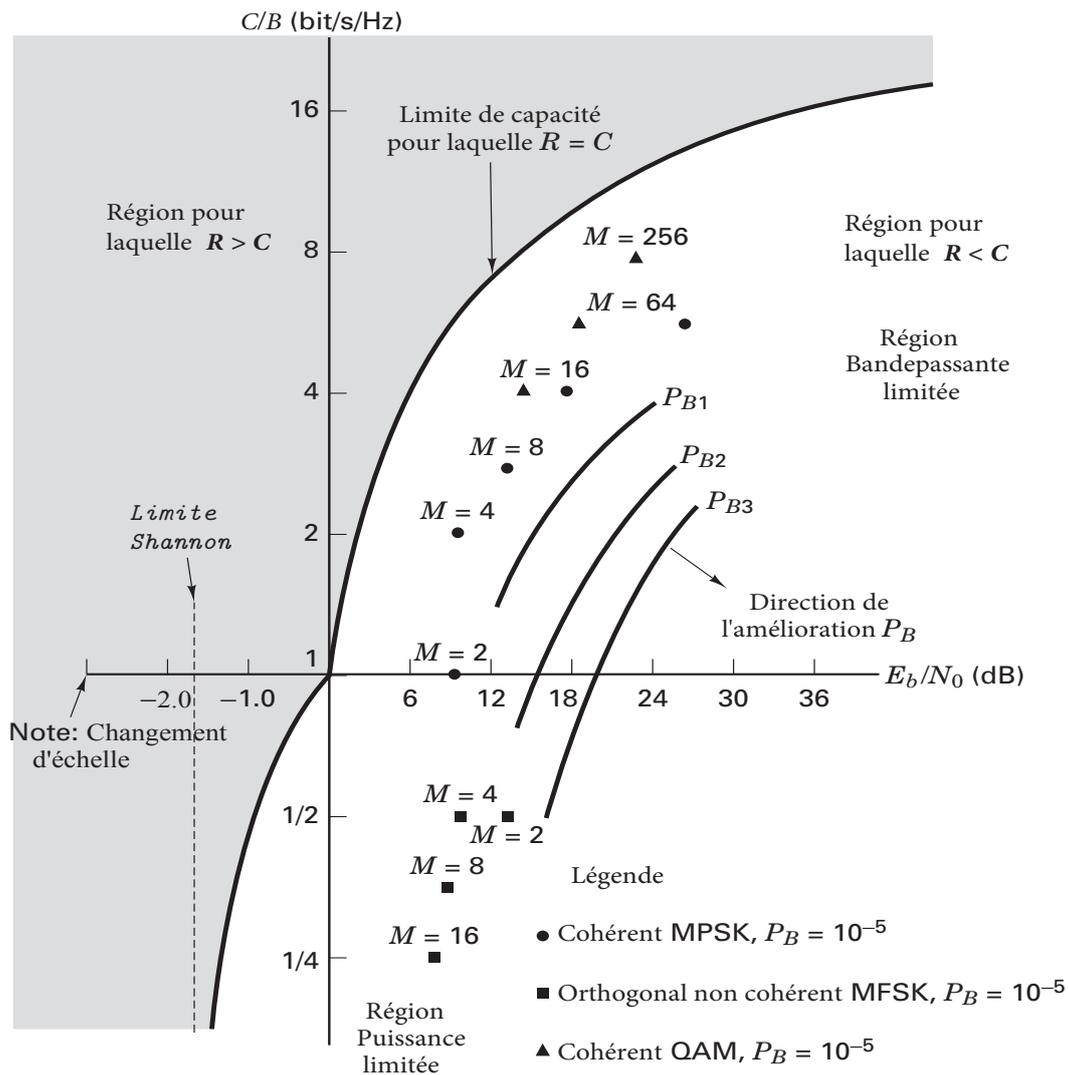


Figure I.13: Plan de l'efficacité spectrale

Les points MPSK représentés sur la figure I.13 confirment la relation représentée dans l'équation (I.44). On note que la modulation MPSK est un schéma à bande passante efficace. En effet, lorsque M augmente, $\frac{D_b}{B_{min}}$ augmente également. D'après la même figure, on peut vérifier que la modulation MPSK peut atteindre une efficacité spectrale améliorée au prix d'une

augmentation de $\frac{E_b}{N_0}$.

4.3 Évaluation selon l'efficacité en puissance

Dans le cas des systèmes à puissance limitée dans lequel la puissance est rare mais la bande passante est disponible (par exemple, lien de communication spatiale), les compromis suivants sont possibles ;

- Amélioré le BER au détriment de la bande passante pour un $\frac{E_b}{N_0}$ fixe.
- Réduction de $\frac{E_b}{N_0}$ au détriment de la bande passante pour un BER fixe.

Un choix de modulation naturel pour un système à puissance limitée est FSK M -aire (MFSK). Sur la figure I.13 les points de fonctionnement pour la modulation MFSK sont tracés dans le plan de l'efficacité spectrale à $BER = 10^{-5}$. On suppose pour la modulation MFSK un filtrage Nyquist en bande de base, la bande passante minimale est liée à la vitesse de symbole par :

$$B_{min} = \frac{M}{T_s} = M \times R_s \quad (I.45)$$

Où T_s est la durée du symbole et R_s est la vitesse de symbole. Avec MFSK, la bande passante de transmission requise est étendue M -fois par rapport à FSK binaire. Donc à partir des équations (I.35) et (I.45), l'efficacité spectrale pour les signaux modulés MFSK utilisant le filtrage de Nyquist peut être exprimé par :

$$\eta_{MFSK} = \frac{D_b}{B_{min}} = \frac{\log_2 M}{M} \quad bits/s/Hz \quad (I.46)$$

Les points MFSK représentés sur la figure I.13 confirment la relation représentée dans l'équation (I.46). On note que la modulation orthogonale MFSK est un schéma à bande passante expansive. En effet, lorsque M augmente, $\frac{D_b}{B_{min}}$ diminue. D'après la même figure, on peut vérifier que la modulation MFSK peut être utilisée pour réaliser une réduction de $\frac{E_b}{N_0}$ au prix de l'augmentation de la bande passante.

4.4 Évaluation selon la simplicité de réalisation

La complexité d'un système dépendra de la sensibilité de la modulation aux imperfections et de la cohérence de la démodulation. Dans le premier cas, la sensibilité augmente le nombre d'états pour la modulation, tandis que dans le deuxième cas, c'est la récupération de la porteuse qui augmente la complexité du système.

4.5 Compromis entre les divers paramètres de système de transmission numériques

Dans cette partie nous nous concentrons sur le compromis entre l'efficacité spectrale $\eta = \frac{D_b}{B}$, la probabilité d'erreurs par bit P_b et la puissance du signal émis. Très souvent, P_b est remplacé par le BER et la puissance du signal émis par le SNR³; c'est équivalent. Le but est de maximiser η et de minimiser le BER et le SNR. Comme il est difficile d'optimiser ses trois paramètres au même temps, nous allons les considérer par paires, en fixant le troisième paramètre.

Éfficacité en puissance – Éfficacité spectrale *Pour une bande passante donnée, comment réaliser le compromis entre le débit à atteindre et la puissance consommée par le système ?* Du point de vue théorique, la relation de Shannon établit le compromis entre l'efficacité de puissance et l'efficacité spectrale pour une transmission point à point. Cette relation est exprimée par l'équation (I.42), les limites de l'efficacité de puissance sont exprimées par :

$$\frac{E_b}{N_0} \longrightarrow \begin{cases} \ln 2 & \eta \rightarrow 0 \\ \infty & \eta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

La valeur minimale de $\frac{E_b}{N_0}$ pour une communication sans erreur s'obtient lorsque l'efficacité spectrale maximale tend vers zéro (la bande passante tend vers l'infini). Une bonne efficacité de puissance dans ce cas est obtenue au prix d'une bande passante infinie et donne une efficacité spectrale faible⁴.

3. Dans un canal type AWGN la puissance du signal émis = la puissance du signal reçu, mais c'est pas le cas dans un canal aux évanouissements.

4. Pour un système de transmission numériques l'efficacité de puissance dépend aussi de la distance, de la fréquence porteuse, des interférences, du fading ect...

Éfficacité en puissance – Occupation spectrale *Pour un débit donné*, comment trouver le compromis entre la bande passante utilisée (B) et la puissance (S) nécessaire pour la transmission ? La bande passante et la puissance représentent des ressources limitées. L'équation de Shannon exprime cette relation pour un débit donné :

$$S = B \times N_0 \times \left(2^{\frac{D_b}{B}} - 1 \right) \quad (\text{I.48})$$

Cette expression montre que la puissance du signal diminue lorsque la bande passante augmente. La puissance minimale nécessaire tend vers $N_0 D_b \ln 2$. On peut en déduire que, pour un débit donné, il est préférable d'augmenter la bande de signal pour réduire la puissance et donc améliorer l'efficacité de puissance. Du point de vue de la durée de transmission d'un bit exprimé par $T_b = \frac{1}{D_b}$, la relation qui lie le temps de transmission d'un bit à la puissance de transmission associée est l'énergie par bit :

$$E_b = S \times T_b = T_b \times B \times N_0 \times \left(2^{\frac{1}{T_b \times B}} - 1 \right) \quad (\text{I.49})$$

L'énergie par bit décroît avec le temps de transmission. Notons aussi que $\frac{1}{T_b \times B} = \frac{D_b}{B}$ peut être interprété comme le niveau de modulation pour un système sans codage (L'ordre de modulation). Ainsi la puissance de transmission diminue lorsque le niveau de modulation diminue. Ainsi les équations (I.48) et (I.49) montrent que la puissance de transmission peut être réduite en étendant la bande passante où en prolongeant la durée de transmission.

5 Récepteurs AWGN : Démodulateur et Détecteur

On considère qu'un des M signaux possibles $s_i(t)$ a été transmis sur un canal à bruit blanc additif gaussien (AWGN) pendant la durée T^5 . En entrée du récepteur, et d'après l'équation (I.16) on a :

$$x(t) = s_i(t) + W(t) \quad i = 1, 2 \quad (\text{I.50})$$

Où $W(t)$ est bruit additif, blanc, gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2$. L'objectif

5. Dans cette section $T = T_s$ c'est la durée du symbole

d'un récepteur optimal est de retrouver la séquence émise en minimisant le taux d'erreurs. Dans le paragraphe suivant, on décrira les principaux blocs d'un récepteur optimal : le démodulateur et le détecteur.

Pour aboutir à un récepteur optimal en bande de base, il faut :

- minimiser l'interférence intersymbole IES,
- maximiser le rapport signal sur bruit S/N .

La détection s'effectue en deux phases. La première consiste à transformer le signal reçu $x(t)$ en une valeur $y(T)$. Cette opération peut s'effectuer au moyen d'un filtre linéaire suivi d'un échantillonneur, ce qui correspond à la section 1 du schéma I.14. Le signal de sortie produit, échantillonné à $t = T$, a pour expression :

$$y(T) = a_i(T) + w(T) \quad i = 1, 2 \quad (\text{I.51})$$

où $a_i(T)$ est la composante signal de $y(T)$ et $w(T)$ en est la composante bruit. Notons que la composante bruit $w(T)$, est une variable aléatoire gaussienne à valeur moyenne nulle, ce qui entraîne que $y(T)$ est une variable gaussienne de valeur moyenne a_1 ou a_2 selon que $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ a été envoyé par le transmetteur. L'échantillon $y(T)$ est parfois appelé *valeur test*. La deuxième phase de la détection consiste à comparer, dans la section 2 de la figure I.14.

5.1 Démodulateur

Deux types de démodulateurs seront décrits : le démodulateur à base de corrélateurs de signaux et le démodulateur à base de filtre adapté.

5.1.1 Filtre adapté

Il s'agit d'un filtre linéaire qui fournit le maximum du rapport en puissance, signal sur bruit S/N , à sa sortie pour une forme d'onde donnée de symboles transmis. A l'entrée du filtre de réception suivi de l'échantillonneur, est appliquée une forme d'onde reçue, composée du signal utile $s_i(t)$ du bruit $W(t)$ de type AWGN.

L'échantillon de sortie consiste donc en une composante a_i du signal et une composante

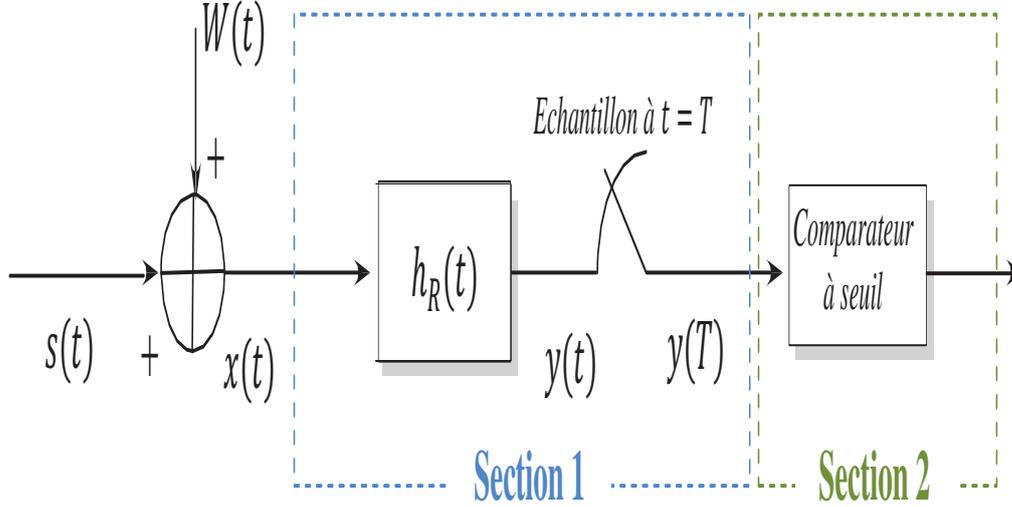


Figure I.14: Récepteur AWGN : Démodulateur et Détecteur.

du bruit de puissance moyenne $\sigma_{w_n}^2$ (variance donné par l'équation (I.28)). Ainsi, à $t = T$, le rapport signal sur bruit est :

$$\frac{S}{N} = \frac{a_i^2}{\sigma_{w_n}^2} \quad (\text{I.52})$$

On cherche la fonction de transfert du filtre $H(f)$ qui maximise ce rapport. Dans le domaine fréquentiel, le signal filtré s'écrit $S(f) \times H(f)$. La transformée de Fourier inverse donne :

$$a_i^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \times H(f) e^{j2\pi fT} df \quad (\text{I.53})$$

Le rapport S/N à $t = T$ devient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \times H(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \quad (\text{I.54})$$

En posant $f_1(x) = H(f)$ et $f_2(x) = S(f) \times e^{j2\pi fT}$, on peut exploiter l'inégalité de Schwarz

valable que si $f_1(x) = kf_2^*(x)$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \times f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^2 dx \quad (\text{I.55})$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \times H(f) e^{j2\pi f} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \times \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (\text{I.56})$$

En substituant l'équation (I.55) dans l'équation (I.54), on obtient :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (\text{I.57})$$

$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0} \quad (\text{I.58})$$

Avec E l'énergie moyenne du signal d'entrée $s(t)$ sur une durée T . Ce S/N maximal n'est atteint que si la fonction de transfert $H(f)$ du filtre optimal est employée, telle que d'après $f_1(x) = kf_2^*(x)$, on a :

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f) e^{-j2\pi fT} \quad (\text{I.59})$$

$$h(t) = TF^{-1} \{ kS^*(f) e^{-j2\pi fT} \} \quad (\text{I.60})$$

$$\begin{aligned} &= k \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f) e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \\ &= k \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f(t-T)} df \right]^* \\ &= k [s(T-t)]^* \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

Soit pour $s(t)$ réelle :

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

Les relations (I.62) et la figure I.15 illustrent bien la propriété de base du filtre adapté : sa réponse temporelle est une version retardée de l'image en miroir du signal auquel on veut l'adapter.

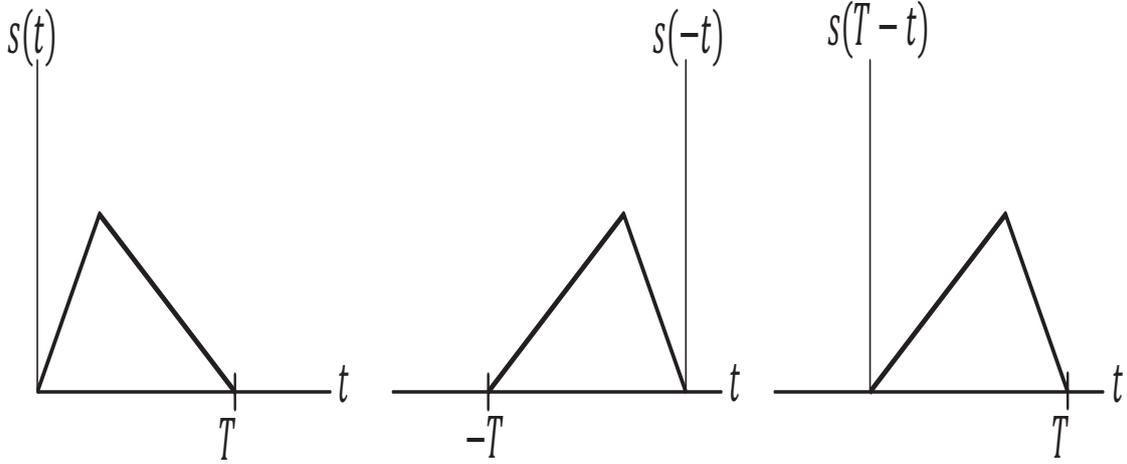


Figure I.15: Fonctions de transfert des filtres en cosinus-surélevé.

Pour un signal $s(t)$ à l'entrée de son filtre adapté, le signal en sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} s(t) * h(t) &= k \int_{-\infty}^{+\infty} s(\mu) s(T - (t - \mu)) d\mu \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} s(\mu) s(T - t + \mu) d\mu \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

On pose $T - t = \tau$:

$$s(t) * h(t) = k \int_{-\infty}^{+\infty} s(\mu) s(\tau + \mu) d\mu = k R_{ss}(\tau) \quad (\text{I.64})$$

5.1.2 Corrélateur

La sortie $y(t)$ d'un filtre pour expression :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^T x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{I.65})$$

En portant l'expression de $h(t)$ de la relation (I.62) dans la relation (I.65), il vient :

$$y(t) = \int_0^T x(\tau) s(T - (t - \tau)) d\tau \quad (\text{I.66})$$

Lorsque $t = T$, on a :

$$y(T) = \int_0^T x(\tau)s(\tau)d\tau \quad (I.67)$$

Opération connue comme étant la corrélation des signaux $x(t)$ et $s(t)$. Comme le signal de sortie du filtre adapté et celui du corrélateur sont identiques lors de l'instant d'échantillonnage $t = T$, on peut utiliser de façon interchangeable le corrélateur et le filtre adapté qu'illustre la figure I.16.

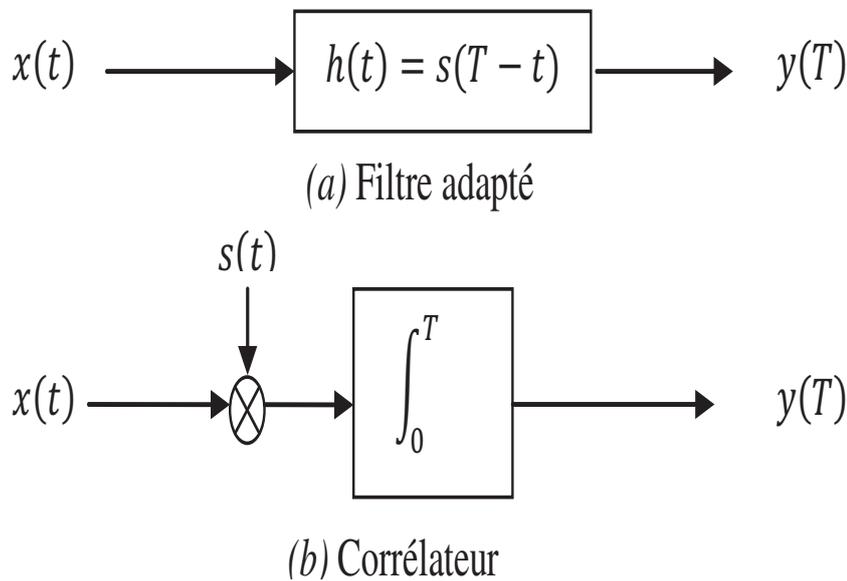


Figure I.16: Équivalence entre (a) filtre adapté, (b) corrélateur.

la sortie de filtre adapté à l'instant $t = T$ est identique à celle de la structure avec corrélateur. L'utilisation de filtre adapté permet de maximiser le rapport signal à bruit et par conséquent de minimiser le taux d'erreurs. Le rapport signal à bruit en sortie d'un filtre adapté ne dépend pas de la forme du signal mais de son énergie. Finalement, il nous restera à décider en faveur du signal le plus probablement émis.

5.2 Détecteur

L'objectif du détecteur optimal est de déterminer le symbole qui a été le plus vraisemblablement émis \hat{s} . Soit le message s envoyé dans un canal discret stationnaire sans mémoire de densité de probabilité conditionnelle $p(y/s)$ et y le vecteur reçu après filtrage adapté. D'une manière générale, un détecteur *maximum a posteriori* (MAP) cherche parmi tous les messages possibles s , le message estimé \hat{s} pour lequel la probabilité conditionnelle $Pr(s|y)$ est la plus grande

$$\hat{s} = \arg \max_s Pr(s|y) \quad (I.68)$$

En utilisant la loi de Bayes, on peut écrire :

$$Pr(s|y) = \frac{Pr(y|s)Pr(s)}{Pr(y)} \quad (I.69)$$

Si tous les messages sont équiprobables, et comme le dénominateur $Pr(y)$ est commun à toutes les messages, le message estimé \hat{s} est le message pour lequel la probabilité conditionnelle $Pr(y|s)$ est la plus grande

$$\hat{s} = \arg \max_s Pr(y|s) \quad (I.70)$$

Un détecteur utilisant ce critère est appelé un détecteur à maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*, ML). La recherche du message le plus probable implique donc que le détecteur **ML** calcule les distances euclidiennes entre l'échantillon reçu et les échantillons correspondant à tous les symboles possibles. Ainsi, lorsque les messages sont équiprobables, les détecteurs **MAP** et **ML** sont identiques.

La détection s'effectue en deux phases. La première consiste à transformer le signal reçu $x(t)$ en une valeur $y(T)$. Cette opération peut s'effectuer au moyen d'un filtre linéaire suivi d'un échantillonneur. La deuxième phase de la détection consiste à comparer la valeur test y à une valeur donnée γ (seuil de décision), au moyen d'un comparateur à seuil. La détection consiste à décider si :

$$y [T] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma \quad (I.71)$$

où H_1 et H_2 sont deux hypothèses mutuellement exclusives. Le choix de H_1 revient à décider

qu'un signal $s_1(t)$ a été transmis, tandis que le choix de H_2 revient à décider que c'est le signal $s_2(t)$ qui a été transmis⁶. La relation (I.71) indique que l'hypothèse H_1 correspond à $y > \gamma$, tandis que H_2 correspond à $y < \gamma$. Dans le cas où $y = \gamma$, la décision peut être arbitraire.

5.2.1 Probabilité d'erreur

Les erreurs de détection sur un signal numérique peuvent se produire de deux façons : lorsque le signal $s_1(t)$ a été transmis alors que l'on a validé H_2 et lorsque le signal $s_2(t)$ a été transmis alors que l'on a validé H_1 . La probabilité d'une erreur de détection a donc pour expression :

$$Pe = Pr(H_2|s_1)Pr(s_1) + Pr(H_1|s_2)Pr(s_2) \quad (I.72)$$

où $Pr(s_1)$, resp. $Pr(s_2)$ est la probabilité a priori que $s_1(t)$, resp. $s_2(t)$ ait été transmis. Lorsque les digits 1 et 0 sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque $Pr(s_1) = Pr(s_2) = 1/2$, on a :

$$Pe = \frac{1}{2} [Pr(H_2|s_1) + Pr(H_1|s_2)] \quad (I.73)$$

La fonction de densité de probabilité du bruit aléatoire gaussien w_n , dans la relation (I.51) a pour expression :

$$f_{w_n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_n}} e^{-\xi^2/(2\sigma_{w_n}^2)} \quad (I.74)$$

où σ_{w_n} , est la variance du bruit. Il résulte des relations (I.51) et (I.74) que :

$$f(y|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_n}} e^{-(y-s_1)^2/(2\sigma_{w_n}^2)} \quad (I.75)$$

$$f(y|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_n}} e^{-(y-s_2)^2/(2\sigma_{w_n}^2)} \quad (I.76)$$

fonctions représentées sur la figure I.17.

6. Considérons deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ quelconques

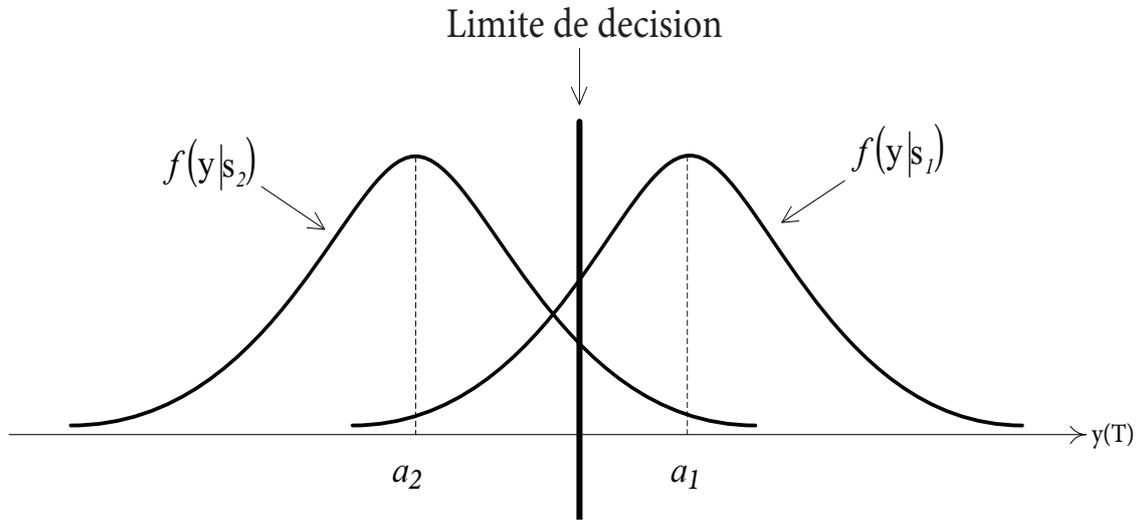


Figure I.17: Fonction de densité de probabilité conditionnelle.

On a donc :

$$Pr(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} f(y|s_1) dy \quad (I.77)$$

$$Pr(H_1|s_2) = \int_{\gamma}^{\infty} f(y|s_2) dy \quad (I.78)$$

En raison de la symétrie de $f(y|s_i)$, la relation (I.73) se réduit à :

$$Pe = Pr(H_2|s_1) = Pr(H_1|s_2) \quad (I.79)$$

La probabilité d'erreur Pe , est donc égale à l'aire sous la courbe du côté «erreur» de l'une ou l'autre des deux fonctions de vraisemblance $f(y|s_1)$ ou $f(y|s_2)$:

$$Pe = \int_{\gamma}^{\infty} f(y|s_2) dy = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_n}} e^{-(y-s_2)^2/(2\sigma_{w_n}^2)} dy \quad (I.80)$$

où $\gamma = (s_1 + s_2)/2$ est le seuil optimal. Posons $z = (y - s_2)/\sigma_{w_n}$,. On a donc $\sigma_{w_n} dz = dy$ et

la relation précédente devient :

$$Pe = \int_{(s_1-s_2)/2\sigma_{w_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z)^2} dz = Q\left(\frac{s_1-s_2}{2\sigma_{w_n}}\right) = Q(\rho) \quad (\text{I.81})$$

$$Pe = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \quad (\text{I.82})$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) \quad (\text{I.83})$$

Avec $\rho = (s_1 - s_2)/2\sigma_{w_n}$. La fonction Q définie par la relation (I.30)⁷. On note que $d = (s_1 - s_2)$ représente la distance euclidienne entre les deux points représentatifs des deux hypothèses. Dans un canal AWGN, la probabilité d'erreur entre deux signaux ne dépend que de la distance entre les signaux. Le calcul des performances est ramené à un calcul de distance entre les signaux. E_d c'est l'énergie du signal différentiel à l'entrée du filtre, à savoir :

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (\text{I.84})$$

Cas d'une transmission sur le canal de Nyquist D'après le critère de Nyquist, les échantillons en sortie du filtre adapté ont pour expression (on pose $t_0 = 0$) :

$$y(t_0 + nT) = a_n p(t_0) + w_n \quad (\text{I.85})$$

en sortie du filtre adapté, est une variable aléatoire gaussienne, de variance :

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} p(0) \quad (\text{I.86})$$

et de moyenne $p(0)$ (respectivement $-p(0)$) si le symbole émis an est $+1$ (respectivement -1). Les lois de l'observation conditionnellement à $a_n = +1$ et $a_n = -1$ ont donc pour densités

7. Une approximation de $Q(x)$, valable pour $x > 3$, est $Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$

respectives :

$$f(y|a_n = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y+p(0))^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{I.87})$$

$$f(y|a_n = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-p(0))^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{I.88})$$

La probabilité d'erreur moyenne (I.81) s'écrit :

$$Pe = \int_{(p(0))/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} dz = Q\left(\frac{p(0)}{\sigma}\right) \quad (\text{I.89})$$

On exprime Pe en fonction de E_b énergie moyenne par bit. Comme les deux symboles sont supposés équiprobables et transportent un bit, $E_b = \mathbb{E}\{a_n^2 \int |h(t)|^2 dt\} = p(0)$. En utilisant l'expression (I.86), on obtient :

$$Pe = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{I.90})$$

Cas d'une transmission M-aire en bande de base sur le canal de Nyquist Les symboles émis prenant leurs valeurs de l'alphabet $a_n \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$. L'énergie moyenne par symbole est égale à :

$$E_s = \mathbb{E}\left\{a_n^2 \int |h(t)|^2 dt\right\} = \frac{M^2 - 1}{3} p(0)$$

Calculons une approximation du Pe en ne tenant compte que des cas où l'erreur symbole provient d'une décision en faveur du symbole adjacent. On a $2(M-1)$ paires de points adjacents et la distance euclidienne entre ces points est égale à $2p(0)$. L'expression de la probabilité d'erreur :

$$Pe = 2 \left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \frac{3}{M^2-1} \log_2 M}\right) \quad (\text{I.91})$$

C'est la meme expression trouvée dans la section 3.4, equation (I.33).

Probabilité d'erreur d'après la borne d'union Probabilité d'erreur dominée par les points les plus proches est :

$$Pe = \frac{2K}{M} Q \left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (I.92)$$

Avec K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale $D_{\min} = \min_{i \neq k} \|s_i - s_k\|$, la distance minimale dans l'espace du signal normalisée $d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$. Pour la modulation $M - QAM$ la conversion de l'espace I/Q vers espace du signal est donnée par :

$$\underbrace{(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q)}_{\text{Coordonnées, Espace du signal}} = \sqrt{\frac{M \times E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} \underbrace{(a_n^I, a_n^Q)}_{\text{Coordonnées, Espace I/Q}} \quad (I.93)$$

5.2.2 Seuil optimal

Le seuil optimal est obtenu en cherchant la valeur de s qui annule la dérivée de la probabilité d'erreur (I.72), soit :

$$\frac{dPe}{ds} = 0 \quad (I.94)$$

ce qui conduit à résoudre l'équation :

$$Pr(s_2)e^{-(y(t_0)-s)^2/(2\sigma^2)} - Pr(s_1)e^{-(y(t_0)+s)^2/(2\sigma^2)} = 0 \quad (I.95)$$

Le seuil optimal, noté S_{opt} est alors égal à :

$$S_{opt} = \frac{\sigma^2}{2y(t_0)} \ln \frac{Pr(s_1)}{Pr(s_2)} \quad (I.96)$$

où $\ln(\cdot)$ désigne le logarithme népérien. Le seuil de décision a tendance de s'éloigner du symbole le plus probable, ce qui augmente sa région de décision, par exemple, si $Pr(s_2) > Pr(s_1)$, le seuil se déplace vers les valeurs négatives, de manière à « favoriser » la décision \hat{s}_2 . Dans les systèmes des communications, nous avons (presque) toujours les probabilités $Pr(s_1) = Pr(s_2) = 1/2$. En

tenant compte pour le cas du bruit gaussien, nous obtenons que le seuil optimal est :

$$\gamma = 0 \quad (I.97)$$

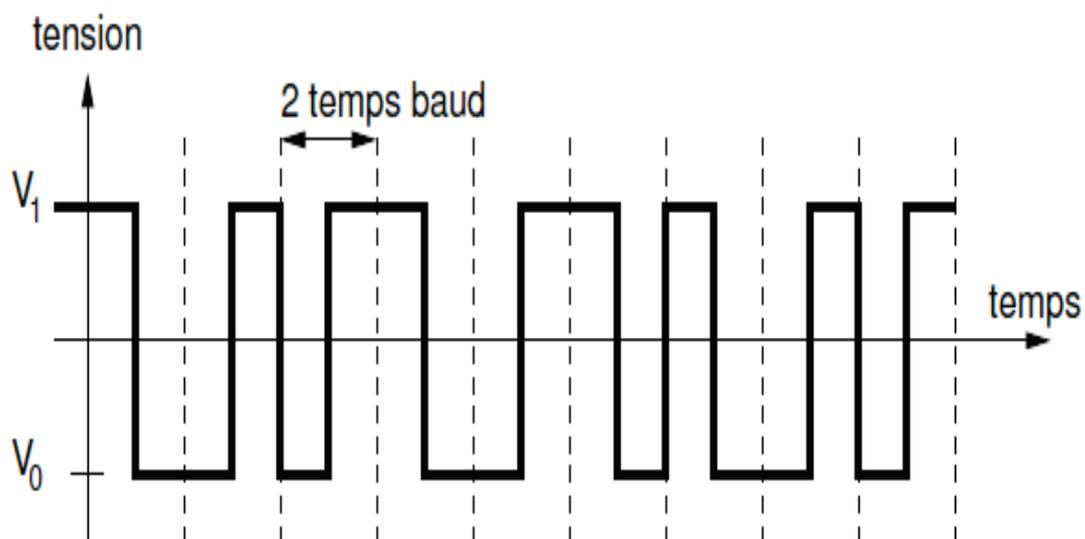
6 Exercices

Exercice

6.1

Soit le signal suivant

1. En supposant qu'il s'agit d'un codage Manchester (normal), quelle séquence de bits représente-t-il ?
2. En supposant que la ligne admet une rapidité de modulation maximale de 8 000 bauds. Quel est le débit binaire maximal obtenu avec le codage Manchester ?
3. Supposons que l'on dispose d'un câble en paire torsadée possédant une plage de fréquences utilisables de $[10kHz, 25kHz]$. Est-il adapté pour fournir un débit de $20kbit/s$ si on utilise le codage Manchester ?

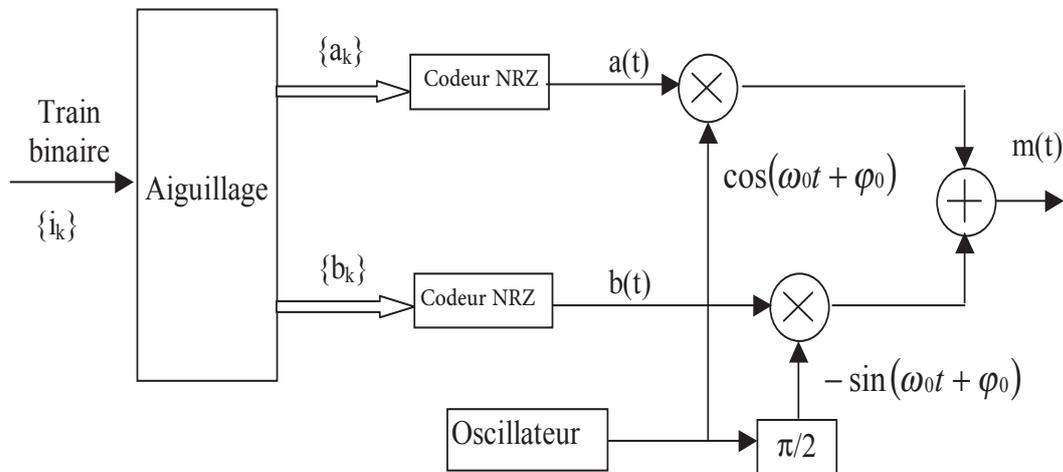


Exercice

6.2

Soit le schéma synoptique du modulateur ci-dessous

1. Quel type de modulateur représente ce schéma ? donner sa constellation
2. Donner $m(t)$ en fonction de $a(t)$ et $b(t)$
3. Que représente a_k , $b_k, \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$



Exercice

6.3

On considère le message binaire suivant que l'on veut transmettre en bande modulée avec un débit binaire $D_b = 2 \text{ bits/s}$ et avec un filtre d'émission NRZ

$$d = 00101101010101110110$$

Tracer les signaux suivants :

1. L'amplitude de la porteuse avec une modulation 4-ASK.
2. La phase de la porteuse avec une modulation 4-PSK.
3. La composante en phase et en quadrature de phase avec une modulation 4-PSK.
4. L'amplitude et la phase de la porteuse avec une modulation 4-QAM.
5. La composante en phase et en quadrature de phase avec une modulation 16-QAM.

Exercice

6.4

On rappelle la formule générale pour la modulation

$$m(t) = \text{Re} \left\{ [(I(t) + jQ(t)) e^{2\pi j f_0 t}] \right\}$$

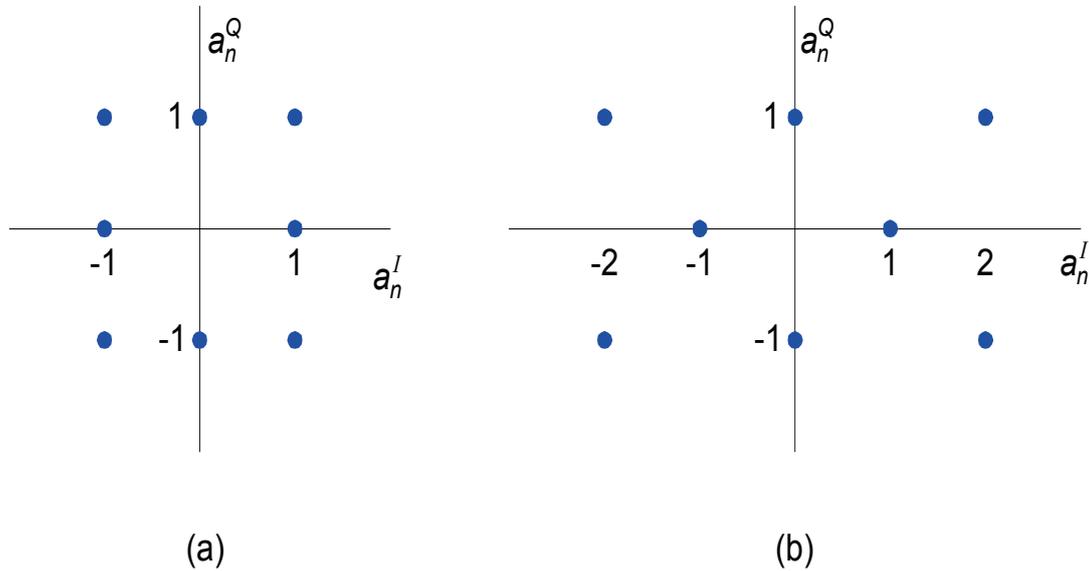
1. Calculer $m(t)$ en fonction de $I(t)$ et $Q(t)$
2. Calculer $2 \cos(2\pi f_0 t)m(t)$ en fonction de $I(t)$ et $Q(t)$
3. Calculer $-2 \sin(2\pi f_0 t)m(t)$ en fonction de $I(t)$ et $Q(t)$
4. On suppose que le canal est sans bruit. En déduire une méthode pour estimer $I(t)$ et $Q(t)$ à partir de $x(t)$

Exercice

6.5

Considérons les deux constellations 8 QAM données dans les figures (a) et (b) ci-dessous.

1. Quelles sont les coordonnées des symboles pour chacune des deux constellations (dans l'espace du signal) quand tous les symboles ont la même probabilité ?
2. Trouvez la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 pour les deux constellations
3. Pour la constellation (a), déterminez et représentez l'évolution temporelle de la phase et de l'amplitude, de signal modulé pour la séquence binaire suivante 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0.
4. Quelle constellation est la plus efficace en puissance ? Pourquoi ?
5. Sachant que la perte asymptotique $L_{asy} = 10 \log_{10} \left(\frac{d_{\min 1}}{d_{\min 2}} \right)$ (en dB) . Calculer cette perte de chaque constellation par rapport au QPSK ? Conclure. ($d_{\min 1}$ = la distance minimale normalisé pour la modulation 1)



Exercice

6.6

On transmet un signal $s(t)$ sous la forme de symbole bivalent **A** et **B**, avec p_A et p_B la distribution de probabilité associée à chacun de ces deux symboles. Le signal $s(t)$ transmis est confronté à un canal AWGN en variance σ^2 . Le signal $y(t)$ résultant est comparé au seuil λ et une décision est prise selon la règle suivante si $y(t) > \lambda$, alors on décide que le symbole transmis était **A**, si $y(t) < \lambda$, alors on décide que le symbole transmis était **B**.

1. Donner l'expression des probabilités d'erreur P_{eA} et P_{eB} (P_{eA} et P_{eB} sont les probabilités d'erreur associées à la transmission des symboles **A** et **B**).
2. Calculer la probabilité d'erreur P_e
3. Calculer la position optimale de λ , minimisant la probabilité d'erreur P_e
4. En déduire la valeur de λ pour $p_A = p_B$

Exercice

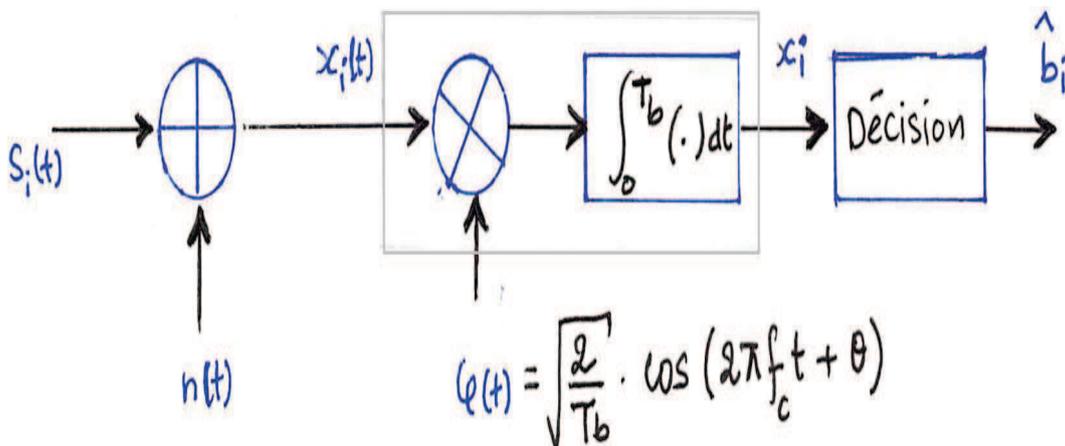
6.7

Soit $x_i(t)$ un signal issu d'une modulation par déplacement de phase binaire (BPSK), qui est appliqué à l'entrée d'un récepteur corrélateur dont l'oscillateur local possède une erreur phase θ qui est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. c-à-d. $\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(\omega_0 t + \theta)$ (voir la figure). Les deux signaux BPSK à transmettre sont donnés par :

$$\begin{cases} s_1(t) = +\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(\omega_0 t) \rightarrow \text{Pour le bit "1"} \\ s_2(t) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(\omega_0 t) \rightarrow \text{Pour le bit "0"} \end{cases}$$

1. Décrire la probabilité d'erreur P_{eBPSK} en fonction de E_b, N_0 , et θ ?
2. Étudier l'effet de la variation de θ sur la P_{eBPSK} .

$$\text{Aide : } \begin{cases} \operatorname{erfc}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ \operatorname{erfc}(0) = 1 \\ \int_0^{T_b} \cos(\omega_0 t)^2 dt = \int_0^{T_b} \sin(\omega_0 t)^2 dt = \frac{T_b}{2} \\ \int_0^{T_b} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) dt = 0 \end{cases}$$

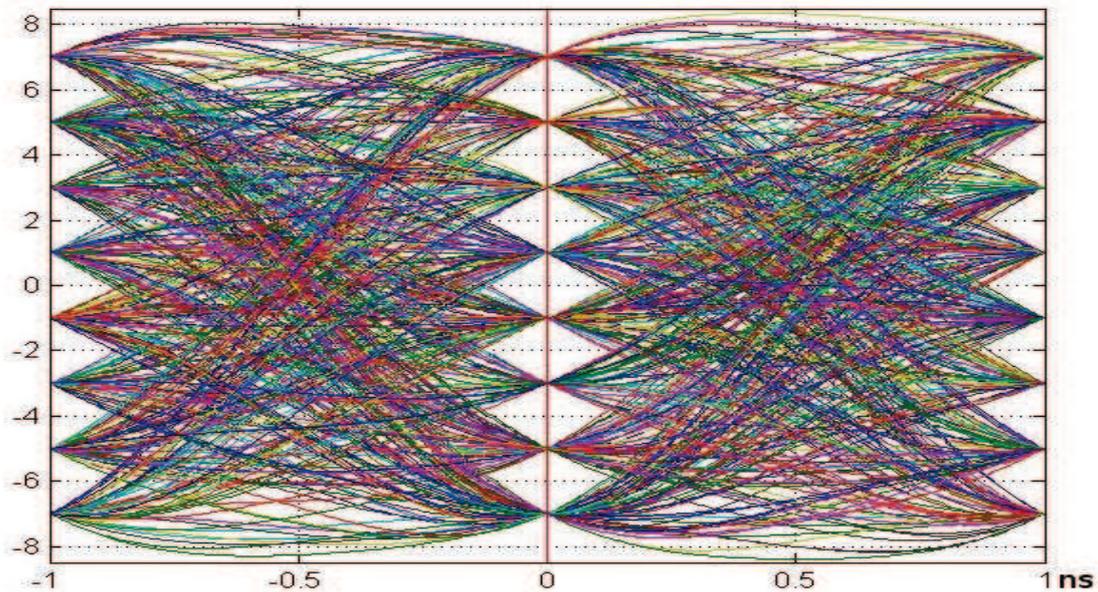


Exercice

6.8

Le diagramme de l'œil de la figure ci-dessous, correspond à une modulation linéaire d'amplitude. Déterminer :

1. l'ordre de modulation,
2. le débit binaire,
3. la rapidité de modulation,
4. s'il s'agit d'une transmission sans IES.



Exercice

6.9

On cherche à comparer les propriétés des modulations BPSK, QPSK et 8-PSK sur une chaîne de transmission modulée utilisant pour l'émission un filtre NRZ.

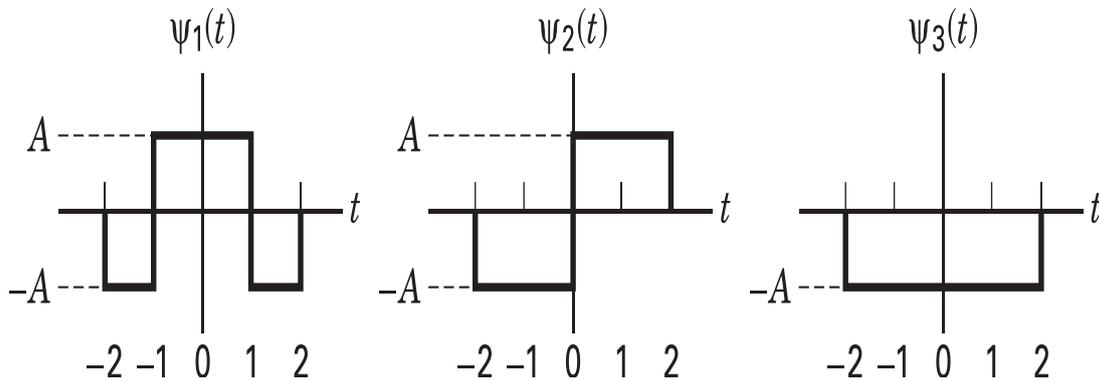
1. Calculer pour chacune des modulations l'efficacité spectrale.
2. Déterminer le rapport signal sur bruit (en décibels) SNR [dB] nécessaire pour obtenir un taux d'erreur binaire de 10^{-6} .
3. A partir de ces deux observations, quel vous semble être le meilleur compromis parmi ces trois modulations ?

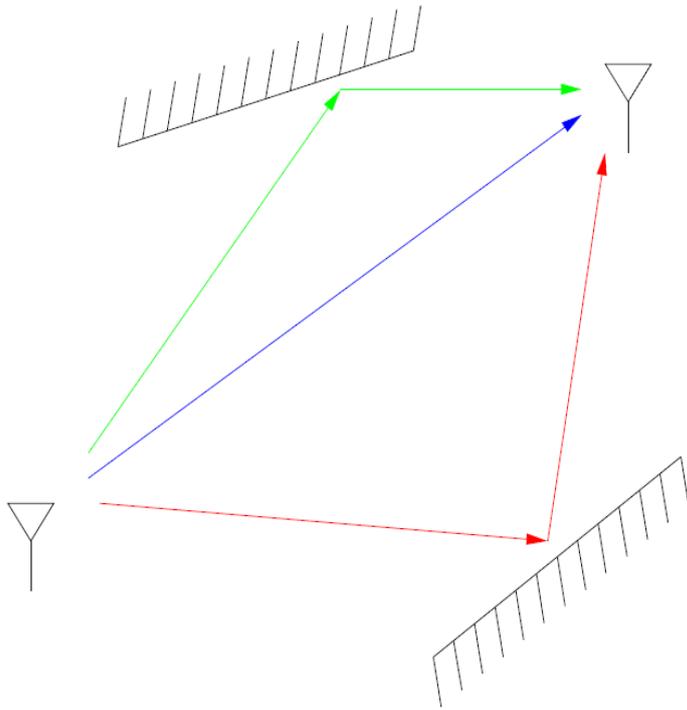
Exercice

6.10

1. Montrer que les trois fonctions illustrées dans la figure ci-dessous sont orthogonales par paires sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Déterminez la valeur de la constante \mathbf{A} , qui rend l'ensemble des fonctions en question **1**. un ensemble orthonormal.
3. Exprimez la forme d'onde suivante $x(t)$, en termes de l'ensemble orthonormal de la question **2**

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \rightarrow 0 \leq t \leq 2 \\ s_2(t) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(w_0 t) & \rightarrow \text{autrement} \end{cases}$$





Canaux non idéaux

- 1. Canaux sans fil**
- 2. Trajets multiples**
- 3. Bruit**
- 4. Interférences**
- 5. Canaux invariants et variants**
- 6. Fading de Rice et de Rayleigh**
- 7. Exercices**

Chapitre II

Canaux non idéaux

1 Canaux sans fil

Le canal de transmission mobile sans fil (canal aux évanouissements) se caractérise par les variations en temps et en fréquence. Les variations se divisent en deux grandes parties :

- Évanouissement à grande échelle : dû à la perte d'amplitude du signal à cause de la distance et des grands obstacles ;
- Évanouissement à petite échelle : dû à l'interférence des multiples trajets entre l'émetteur et le récepteur.

L'évanouissement à grande échelle est à prendre en compte lors de la planification des réseaux mobiles. L'évanouissement à petite échelle est à prendre en compte lors de la construction de l'émetteur et du récepteur. La relation entre l'évanouissement à large échelle et celui à petite échelle est illustrée par la figure [II.1](#).

Les canaux sans fils opèrent par la radiation électromagnétique de l'émetteur au récepteur. On va considérer quelques cas de la propagation de l'onde électromagnétique.

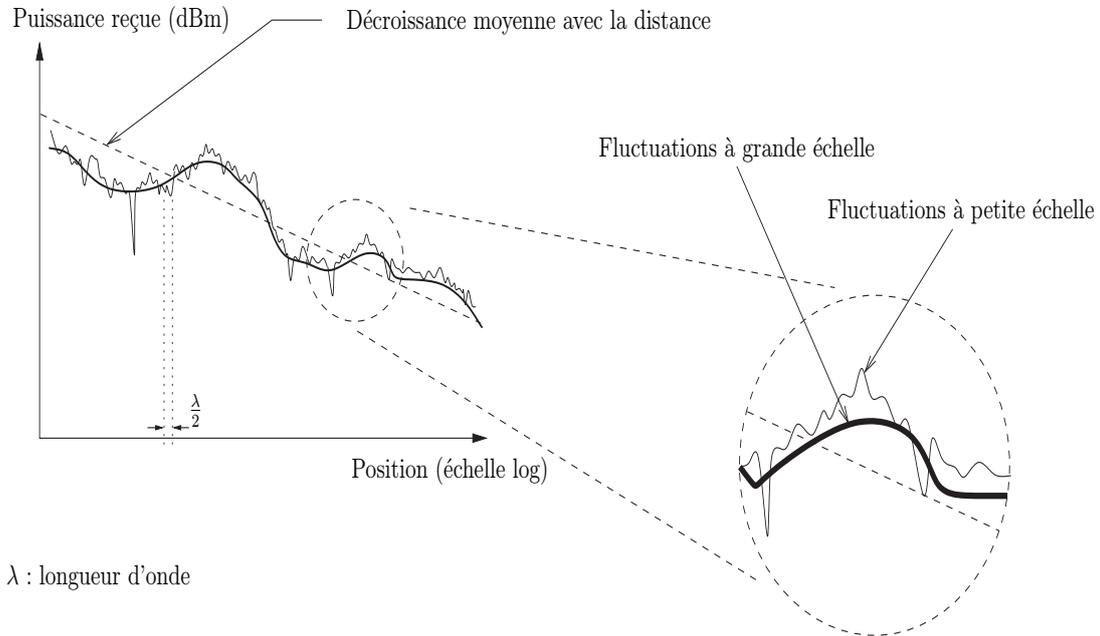


Figure II.1: Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal.

1.1 Espace libre, émetteur et récepteur fixes

Soit le signal $x(t) = \cos 2\pi ft$ est émis. Alors le champ électrique au récepteur situé en $u = (r, \theta, \varphi)$ au temps t est

$$E(f, t, u) = \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f(t - r/c)}{r} \tag{II.1}$$

c : vitesse de lumière,

α_s : pattern de radiation de l'antenne

fr/c : variation de phase à cause du délai de propagation

$1/r$: évanouissement d'amplitude avec la distance.

1.2 Espace libre, récepteur mobile

On suppose que le récepteur bouge avec la vitesse v par rapport à l'émetteur. $r = r_0 + vt$, et

$$E(f, t, u) = \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f (t - (r_0 + vt) / c)}{r} \quad (\text{II.2})$$

On observe le décalage de Doppler de $-fv/c$ à cause du mouvement du récepteur. On note que l'atténuation dépend du temps t .

1.3 Emetteur et récepteur fixes, obstacle fixe

La distance entre l'émetteur et le récepteur étant égale à r , soit il y a un obstacle à réflexion parfaite à distance d de l'émetteur et à distance $d - r$ du récepteur (le récepteur se trouve entre l'émetteur et l'obstacle). Alors on a :

$$E(f, t, u) = \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f (t - r/c)}{r} - \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f (t - (2d - r) / c)}{2d - r} \quad (\text{II.3})$$

Le signal reçu est la superposition de deux ondes, toutes les deux de fréquence f . la différence de phase entre elles

$$\Delta\theta = \left(\frac{2\pi f (2d - r)}{c} + \pi \right) - \frac{2\pi f r}{c} = \frac{4\pi f (d - r)}{c} + \pi \quad (\text{II.4})$$

Si $\Delta\theta$ est multiple de :

- 2π ; alors le signal reçu est fort (pattern d'interférence constructif)
- $k\pi$ avec k impair ; alors le signal reçu est atténué (pattern destructif)

Les patternes d'interférence changent :

- Avec la distance (distance de cohérence) $\Delta r = \frac{c}{4f}$
- Avec la fréquence porteuse $\Delta f = \frac{1}{2} \left(\frac{(2d-r)}{c} - \frac{r}{c} \right)^{-1}$ la quantité $T_d = \frac{(2d-r)}{c} - \frac{r}{c}$ est appelée **l'étalement du délai** (*delay spread*) c'est la différence entre les délais de propagation

de deux ondes. Les patterns d'interférence ne changent pas beaucoup (constantes) si le changement en fréquence est beaucoup plus petit que $1/T_d$. Alors la quantité $1/T_d$ est appelée la **bande passante cohérente** (*the coherent bandwidth*).

1.4 Récepteur mobile, obstacle fixe

Le récepteur se déplace via les patterns d'interférences et la puissance du signal reçu augmente et diminue périodiquement. On a

$$E(f, t, u) = \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f ((1 - v/c)t - r_0/c)}{r_0 + vt} \quad (\text{II.5})$$

$$- \frac{\alpha_s(\theta, \varphi, f) \cos 2\pi f ((1 + v/c)t - (2d - r_0)/c)}{2d - r_0 - vt}$$

Les décalages de Doppler de deux trajets sont : $f_{d_1} = -fv/c$ et $f_{d_2} = +fv/c$. L'étalement de fréquence est :

$$\Delta f_d = f_{d_2} - f_{d_1} = 2fv/c \quad (\text{II.6})$$

2 Trajets multiples

Les trajets multiples sont engendrés par les phénomènes physiques propres aux ondes électromagnétiques tels que la réflexion et la diffraction causées par le milieu de propagation (immeubles, collines, voitures, ...), comme le montre le scénario présenté sur la figure II.2. Les canaux à trajets multiples (ou *dispersifs*) sont habituellement caractérisés par des filtres linéaires avec bruit additif. Cette structure de canal contient plusieurs coefficients (*facteur d'atténuation*), qui sont également étendus dans le temps. La réponse impulsionnelle d'un canal à trajets multiples est donnée par :

$$h_c(\tau; t) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t) e^{j\theta_l(t)} \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad (\text{II.7})$$

Où est $L(t)$ le nombre de trajets et $\alpha_l(t)$ et $\theta_l(t)$ sont respectivement les facteurs d'atté-

uation et la phase sur l' $l^{\text{ème}}$ trajet et $\tau_l(t)$ le retard de propagation du trajet reçu¹.

Un signal qui traverse un canal à trajets multiples subit une convolution avec le filtre linéaire du canal. Ce fait est décrit par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) \otimes h_c(t) + w(t) & \text{(II.8)} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_c(t) x(t - \tau) d\tau + w(t) \\
 &= \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t) x(\tau - \tau_l(t)) e^{j\theta_l(t)} + w(t)
 \end{aligned}$$

où \otimes dénote la convolution. Il devient évident que le canal par trajets multiples introduit l'interférence entre symboles (IES). Un phénomène qui peut rigoureusement dégrader la performance du système de communications. On peut définir alors la réponse fréquentielle du canal qui n'est autre que la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$H_c(f; t) = TF \{h_c(\tau; t)\} \tag{II.9}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_c(\tau; t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\
 &= \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t) e^{-(2\pi f \tau_l(t) + \theta_l(t))}
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

De même que pour la réponse impulsionnelle, la fonction de transfert du canal $H_c(f; t)$ permet de lier le signal transmis $X(f)$ et le signal reçu $Y(f)$ dans le domaine fréquentiel par :

$$Y(f; t) = H_c(f; t)X(f; t) + W(f; t) \tag{II.11}$$

où $W(f; t)$ est le terme de bruit AWGN dans le domaine fréquentiel.

1. Généralement, la variable $\alpha_l(t)$, dite enveloppe du signal reçu, suit une distribution de Rayleigh, de Rice, de Nakagami, lognormale ou une combinaison de ces lois probabilistes (voir la section 6). La phase $\theta_l(t)$ est souvent considérée uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et le délai $\tau_l(t)$ est approximé par un processus de Poisson.

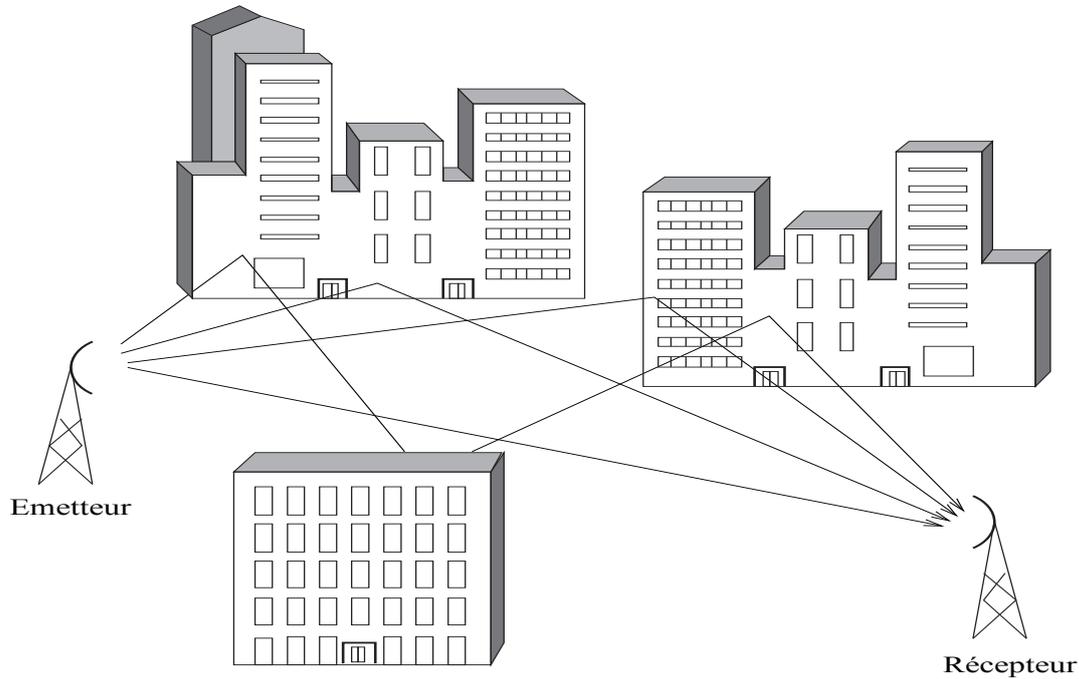


Figure II.2: Scénario d’une transmission radio-mobile sur un canal trajet multiple.

3 Bruit

Le bruit est un signal aléatoire, souvent d’origine thermique, qui définit le seuil de détection de tout récepteur (voir la section 5 de chapitre I, la page 29). C’est un processus aléatoire, alors son comportement temporelle est imprévisible. On peut définir le bruit en terme de **densité spectrale de puissance** donnée par :

$$N_B (f) = \frac{N_0}{2} \tag{II.12}$$

où N_0 est la densité spectrale de bruit en une seule bande et la facteur $1/2$ est là pour indiquer que la moitié de la puissance du bruit vient de la bande des fréquences positives et l’autre moitié de la bande des fréquences négatives.

On peut définir le bruit aussi en terme de **densité de probabilité**. Le modèle de bruit le plus usuel : loi normal ou gaussienne. Il est utilisé en télécommunications pour modéliser l’impact du bruit sur les récepteurs digitaux et estimer leurs performances. Un cas de figure important en pratique est le bruit additif blanc gaussien (AWGN) représentatif du bruit ther-

mique dans les composants électroniques du récepteur. Un bruit gaussien suit une distribution gaussienne caractérisé une moyenne μ et une variance δ^2 , la densité de probabilité est donnée par l'équation :

$$P(x) = N(\mu, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{II.13})$$

L'AWGN est une perturbation qui produit, après filtrage adapté et échantillonnage, des échantillons indépendants dont l'amplitude suit la loi de densité de probabilité (II.13) de moyenne nulle et de variance :

$$\delta^2 = \frac{N_0}{2} \quad (\text{II.14})$$

3.1 Bruit intrinsèque d'un récepteur numérique

Il existe de nombreuses sources de bruit. Les principales sont :

- **Bruit Johnson** : bruit « à vide » d'une résistance. C'est bruit gaussien lié à l'agitation thermique, la densité spectrale de bruit est $DS P_{Johnson} = 4kTR$
- **Bruit de grenaille** : lié au passage des électrons à travers une résistance, une jonction PN. La fluctuation du courant est $I_{grenaille} = \sqrt{2qIB}$
- **Bruit rose ou en 1/f ou de scintillement** : lié aux défauts des dispositifs électroniques
- **Bruit thermique** : dû aux imperfections des composants électroniques du récepteur du système de communication (vient de l'agitation thermique des électrons des dispositifs électroniques). C'est bruit gaussien de puissance $N = N_0B = kTB$ (Watt).
- **Autres sources de bruit**: naturels (rayons cosmiques, aurores boréales) ou humaines (50 Hz secteur)

On denote :

- R =résistance du conducteur (Ohm)
- $k = 1.38 \times 10^{-23}$ Joule/°K, constante de Boltzmann
- T = température du matériau (°K)
- B =largeur de bande (Hz)

- $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C charge d'un électron
- I = amplitude du courant continu (A)

Exemple 3.1

La densité de puissance du bruit généré par une résistance à une température de $27^\circ C$ est : $N_0|_{dB} = k|_{dB} + T|_{dB} = -228.6 + 10 \log(273 + 27) = -203.8 dB/Hz$.

3.2 Modélisation du bruit (AWGN)

Un canal AWGN est nom discret et sans mémoire qui représente *parfaitement* une liaison radio en vue directe dont le bruit est principalement d'origine thermique, le bruit additif est donc ce cas un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance δ^2 , comme il s'agit d'un bruit blanc, la densité spectrale de bruit est constante avec la fréquence, ce qui représente une hypothèse simplificatrice des calculs et mais qui reste valide si on considère des bandes de fréquence étroites, la figure II.3 illustre le modèle général d'un canal AWGN. On a la relation suivante entre l'entrée et la sortie du canal AWGN :

$$x(t) = s(t) + W(t) \tag{II.15}$$

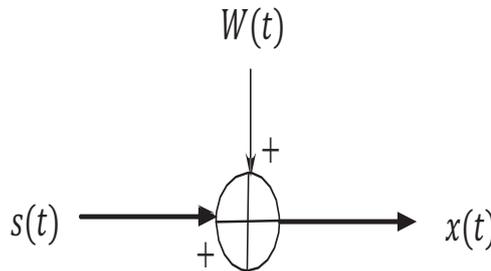


Figure II.3: Modèle pour le signal reçu après un canal AWGN.

Où $W(t)$ est un bruit est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance unilatérale N_0 et la densité de probabilité donnée par l'équation (II.13).

Définition 3.1 Rapport signal à bruit $\left(\frac{S}{N}\right)$

Il est d'usage de caractériser le bruit par sa puissance. De ce fait, l'influence du bruit sur un signal est donné par le rapport signal bruit qui est le rapport de la puissance du signal non bruité S sur la puissance de bruit N (*Signal to Noise Ratio : SNR*). Cette quantité est fréquemment exprimée en décibels ($10 \times \log\left(\frac{S}{N}\right)$). Un SNR élevé correspond un signal peu bruité, un SNR faible correspond un signal très bruité.

4 Interférences

L'interférences signifie qu'un signal parasite de puissance non négligeable émis à la même fréquence que le signal utile peut perturber la transmission sur le canal, en dégradant le rapport signal à bruit ou en introduisant des distorsions. On trouve trois types d'interférences :

- L'interférence due à la présence simultanée d'autres utilisateurs soit sur le même canal de transmission (mauvais duplex, interférences entre utilisateurs), soit sur des canaux adjacents (la largeur de bande du canal adjacent ne respecte pas les contraintes fixées).
- L'interférence intentionnel (activité militaire, volonté de perturber une communication gênante). La technique revient à placer à proximité de l'utilisateur une source haute puissance et de la faire émettre à la fréquence du canal. Seules les communications radio peuvent être brouillées, les communications par fibre optique restent inviolables.
- L'interférence inter-symbole, pendant l'émission d'un signal, les ondes électromagnétiques qui le composent subissent des réflexions plus ou moins nombreuses en fonction de l'environnement. Un symbole peut donc arriver au terminal mobile par plusieurs chemins. Comme ces chemins sont de longueurs différentes, un même symbole est reçu plusieurs fois à des moments différents. Par conséquent, au même moment, le mobile reçoit plusieurs symboles différents (voir la section 3 de chapitre I, la page 13).

Dans les réseaux cellulaires, le brouillage entre cellules adjacentes émettant sur une même sous bande est inévitable. On parle d'**interférence co-canal**. Celui-ci est dû à la réutilisation des fréquences allouées par un opérateur dans des cellules voisines, comme le montre la figure II.4. Des règles de réutilisation de fréquence sont dès lors requises ainsi qu'un dimensionnement judicieux des puissances des émetteurs.

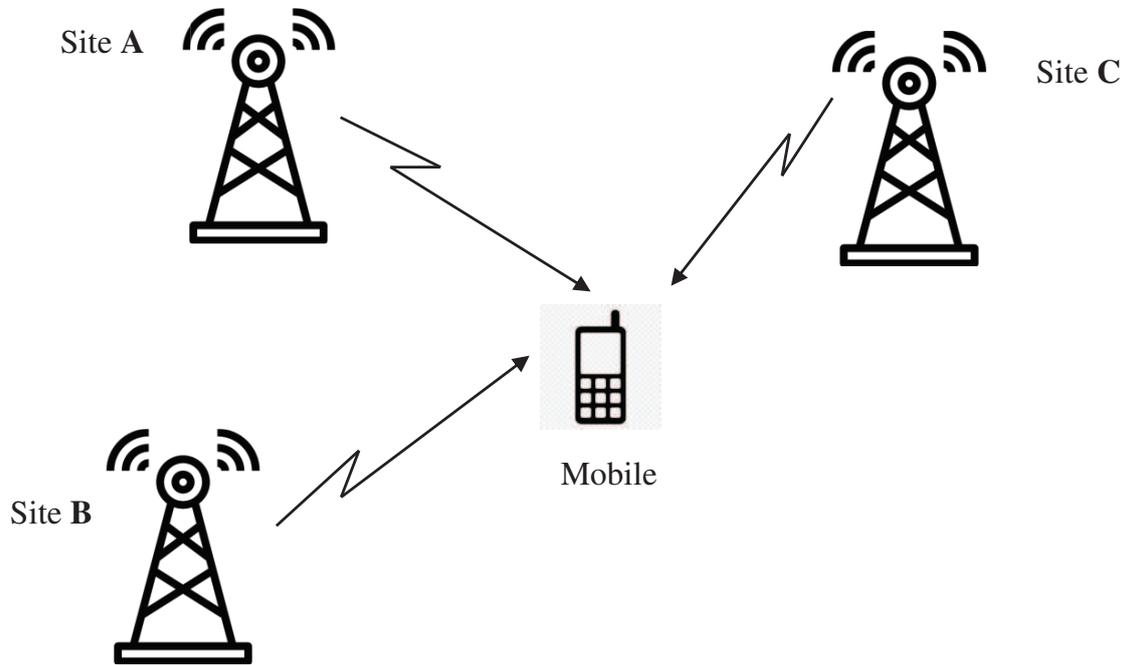


Figure II.4: Interférences co-canal dans un réseau cellulaire.

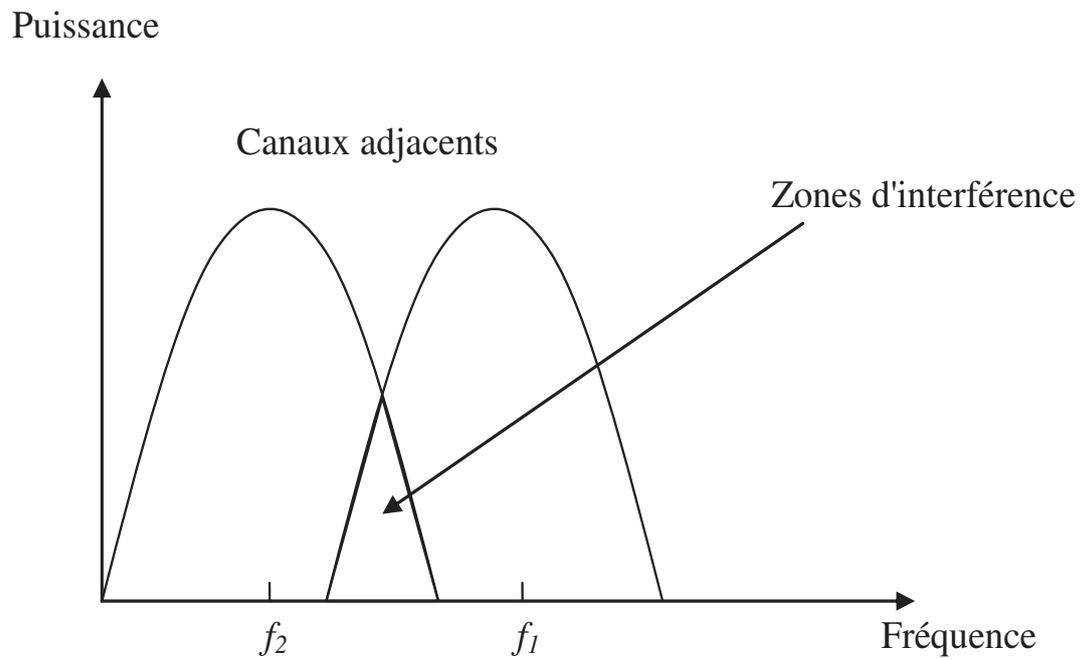


Figure II.5: Interférences sur canal adjacent dans un réseau cellulaire.

Les canaux émettant sur des bandes de fréquences voisines ou adjacentes peuvent aussi se perturber. On parle alors d'**interférences sur canaux adjacents**. En effet, les signaux sont rarement bornés en fréquence, alors que les bandes de fréquence allouées le sont. Un filtrage efficace est nécessaire pour couper toute émission hors bande et éviter des phénomènes de blocage de canaux adjacents. Cependant, les défauts des circuits et des filtres (bruit de phase, distorsions non linéaires, produits d'intermodulation) limitent l'efficacité du filtrage en produisant un grand nombre d'harmoniques hors bande.

Définition 4.1 Rapport signal sur interférences plus bruit $\left(\frac{S}{N+I}\right)$

Si des signaux interférents se superposent au signal utile et qu'ils ont un niveau de puissance non négligeable par rapport au niveau de bruit intrinsèque N , il faudra considérer comme niveau de bruit la somme des puissances du bruit intrinsèque et des signaux interférents $N+I$, I désignant la puissance totale des signaux interférents. De ce fait, l'influence du bruit sur un signal est donné par le rapport signal interférence plus bruit (*Signal to Interference and Noise Ratio : SNIR*). Cette quantité est fréquemment exprimée en décibels ($10 \times \log\left(\frac{S}{N+I}\right)$). Si le récepteur est éloigné de toute source d'interférences, le bruit pourra se limiter au bruit intrinsèque du récepteur N .

5 Canaux invariants et variants

Avant de classer les canaux, nous introduisons deux paramètres caractéristiques.

Définition 5.1 L'étalement temporel (delay spread)

qui n'est autre que le délai maximal de retard des trajets, note τ_{max} , est défini par la différence entre le plus long et le plus court retard ($\tau_{L-1} - \tau_0$). L'étalement moyen au sens des moindres carrés (Root Mean Square : RMS) est souvent utilisé pour quantifier l'étalement temporel du canal. Sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^{\tau_{\max}} (\tau - \bar{\tau})^2 \alpha_l(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_{\max}} \alpha_l(\tau) d\tau}} \quad (\text{II.16})$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{l=0}^{L-1} \tau_l^2 \alpha_l}{\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l} - \bar{\tau}^2} \quad (\text{II.17})$$

Où :

- $\alpha_l(\tau) = \alpha_l = |h_l|^2$, désigne la puissance du $l^{\text{ème}}$ trajet ^a.
- $\bar{\tau}$ est le delai moyen defini par :

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{\tau_{\max}} \tau \alpha_l(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_{\max}} \alpha_l(\tau) d\tau} \quad (\text{II.18})$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{L-1} \tau_l \alpha_l}{\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l} \quad (\text{II.19})$$

Le paramètre τ_{RMS} est un bon indicateur de l"étalement des trajets multiples. Il permet de contrôler l'impact des interférences entre symboles (IES). Les valeurs typiques de τ_{RMS} dans un environnement outdoor pour un système de 4^{ème} génération, sont approximativement de l'ordre de la microseconde , et de 10 à 50 nanosecondes dans un environnement indoor. À partir du paramètre τ_{RMS} , on définit **la bande de cohérence du canal** B_{coh} par :

$$B_{coh} \propto \frac{1}{\tau_{RMS}} \quad (\text{II.20})$$

La bande de cohérence caractérise l'évolution fréquentielle du canal et représente la bande de fréquence pour laquelle les amplitudes des composantes fréquentielles du signal, fortement corrélées, subissent des atténuations semblables (le canal est

considéré invariant dans le domaine fréquentiel). Il est important de noter que la relation entre la dispersion temporelle et la bande de cohérence n'existe pas et que l'équation précédente (II.20) est approximative.

a. c'est le profil en puissance des retards (Power Delay Profile, PDP)

Définition 5.2 L'effet Doppler (shift Doppler)

est un phénomène induit par le déplacement de l'émetteur par rapport au récepteur, ou encore par le déplacement des obstacles entre l'émetteur et le récepteur. Il est généralement modélisé par un décalage constant en fréquence, proportionnel à la fréquence porteuse et à la vitesse de déplacement. La fréquence Doppler peut être exprimée par la relation :

$$f_d = \frac{v f_c \cos(\theta)}{c} \quad (\text{II.21})$$

Où :

- v : est la vitesse du déplacement du terminal
- f_c : est la fréquence porteuse
- c : Vitesse de la lumière (3×10^8 m/s).
- θ : Angle formé entre le sens de déplacement et l'onde transmise.

Le canal varie alors en fonction de la vitesse de déplacement du terminal. Pour caractériser cette variation, l'étalement fréquentiel Bd est défini par la différence entre le plus grand et le plus petit décalage fréquentiel inhérents aux multiples trajets $Bd = 2f_{d\max}$ avec $f_{d\max} = 2\frac{v f_c}{c}$. À partir du paramètre Bd , on définit le **temps de cohérence du canal** T_{coh} par :

$$T_{coh} \propto \frac{1}{Bd} \quad (\text{II.22})$$

Le temps de cohérence caractérise l'évolution temporelle du canal et représente la durée pour laquelle le canal est considéré invariant

5.1 Canal invariant

Dans le cas d'un canal invariant dans le temps, la réponse impulsionnelle du canal ne dépend pas du temps (t) et elle peut être caractérisée par $h_c(\tau)$, alors la réponse impulsionnelle du canal donnée par l'équation (II.7) peut être simplifiée comme suit :

$$h_c(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{j\theta_l} \delta(\tau - \tau_l) \quad (\text{II.23})$$

Lorsque l'étalement Doppler Bd est inférieur à la bande de fréquence du signal Bs , le temps de cohérence du canal T_{coh} est supérieur au temps symbole $Ts = \frac{1}{Bs}$ ($Ts \ll T_{coh} \Leftrightarrow Bs \gg Bd$). Par conséquent, la réponse du canal pour ainsi dire ne varie pas pendant plusieurs symboles. Le canal est dit à **évanouissements lents** (*slow fading*) parcequ'il varie lentement dans le temps. Il est non sélectif en temps (canal invariant dans le temps).

Dans le cas où $Bs \ll B_{coh} \Leftrightarrow Ts \gg \tau_{RMS}$, toutes les fréquences du spectre du signal subissent les mêmes amplifications ou atténuations (canal invariant dans le domaine fréquentiel). Dès lors, le canal est considéré comme non sélectif en fréquence (pas de IES dans le domaine temporel) et donc à **évanouissements plats** (*flat fading*).

5.2 Canal variant

Dans le cas d'un canal variant dans le temps, la réponse impulsionnelle du canal dépend du temps (t) et elle peut être caractérisée par $h_c(\tau, t)$, alors la réponse impulsionnelle du canal donnée par l'équation (II.7) peut être donnée par :

$$h_c(\tau, t) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)) e^{j\theta_l(t)} \quad (\text{II.24})$$

Où est $L(t)$ le nombre de trajets et $\alpha_l(t)$ et $\theta_l(t)$ sont respectivement les facteurs d'atténuation et la phase sur l' $l^{\text{ème}}$ trajet et $\tau_l(t)$ le retard de propagation du trajet reçu.

Si $Ts \gg T_{coh} \Leftrightarrow Bs \ll Bd$ alors le canal est dit à **évanouissements rapides** (*fast fading*). Avec cette condition, la réponse impulsionnelle du canal varie de façon significative pendant la durée d'un symbole. Le canal est alors **sélectif en temps** (canal variant dans le temps).

Dans le cas où $B_s \gg B_{coh} \Leftrightarrow T_s \ll \tau_{RMS}$, alors le canal est dit **selectif en fréquence** (*frequency selective*). Dans ce cas, le spectre du signal reçu sera déformé en dehors de la bande de cohérence (canal invariant dans le domaine fréquentiel). La relation entre les paramètres des canaux et le type de d'évanouissement subi par le signal sont présentés à la figure II.6.

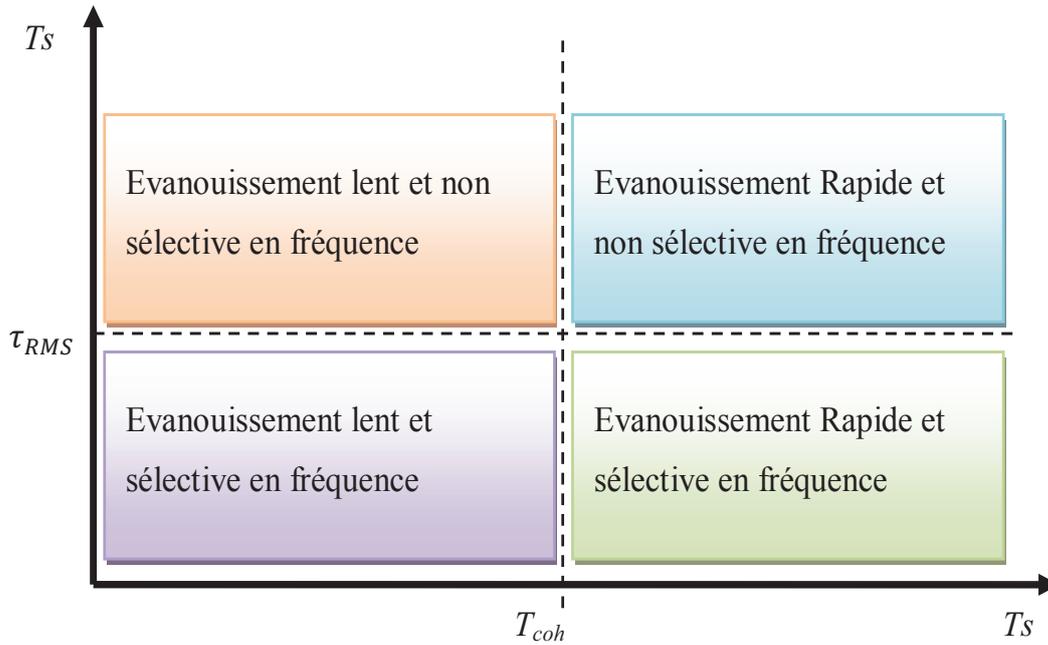


Figure II.6: Classification des canaux.

6 Fading de Rice et de Rayleigh

Comme nous avons mentionné dans la section 2, le signal total reçu n'est que l'interférence entre des trajets multiples qui peut se faire de manière constructive ou bien destructive. Cette dernière donne lieu à des évanouissements profonds dépendant de la phase de chacun de signaux élémentaires. Dans ce cas, comme L'amplitude des évanouissements du signal reçu fluctue très rapidement sur des distances très courtes et elle peut suivre différentes distributions. Voici quelques principales distributions.

6.1 Fading de Rayleigh

Le modèle de Rayleigh est utilisé dans la simulation de systèmes de type indoor car il tient compte des trajets multiples et permet donc de modéliser les phénomènes à petite échelle. Ce modèle présente les trajets multiples comme un unique coefficient complexe (une atténuation et un déphasage), variant dans le temps. Pour ce faire, on construit la variable aléatoire (V.A.) complexe représentant le coefficient complexe du canal comme $h = X + jY$, où X et Y sont deux V.A. Gaussiennes indépendantes $\sim N(0; \sigma^2)$. L'atténuation du canal résultante (c'est la variable $\alpha_l(t)$ dans l'équation II.7) est alors une V.A. de Rayleigh caractérisée par une densité de probabilité (pdf) donnée par l'expression suivante :

$$P(a) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)} \quad \text{avec } a \geq 0 \quad (\text{II.25})$$

avec σ^2 la puissance moyenne du signal reçu de la valeur moyenne $E\{\alpha\} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et la variance $Var\{a\} = \sigma^2\left(\frac{4-\pi}{2}\right)$. La distribution de Rayleigh est représentée à la figure II.7. Cette distribution est utilisée pour représenter, en communications, le niveau d'atténuation d'un signal transmis dans les situations où une station mobile n'a pas de ligne de vue directe avec la station de base (*Non-line-of-sight : NLOS*).

6.2 Fading de Rice

Dans d'autres situations, un canal de propagation est caractérisé par plusieurs trajets indirects et un trajet direct (*Line-of-sight : LOS*)². De ce fait, la densité de probabilité de l'enveloppe du signal complexe reçu obéit à la distribution de Rice définie telle que :

$$P(a) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\left(\frac{\alpha^2 + \alpha_d^2}{2\sigma^2}\right)} I_0\left(\frac{\alpha \times \alpha_d}{\sigma^2}\right) \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \alpha_d \geq 0 \quad (\text{II.26})$$

Où α_d est l'amplitude du trajet direct et I_0 représente la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro. Lorsque α_d tend vers 0, la composante forte est éliminée. Par conséquent, la distribution de Rice tend vers la distribution de Rayleigh ce qui en fait un cas

2. La plupart du temps, il n'existe pas de ligne de vue entre l'émetteur et le récepteur et les trajets multiples ont des puissances voisines (aucun trajet dominant).

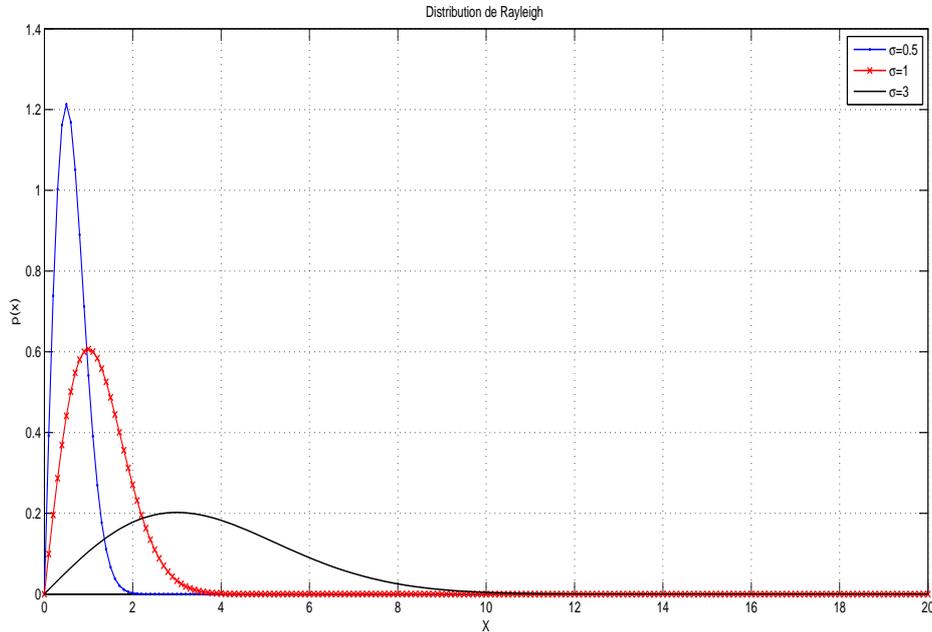


Figure II.7: La distribution de Rayleigh.

particulier. Le paramètre K_r est souvent utilisé pour décrire la distribution de Rice, ce facteur peut s'interpréter comme le rapport entre la puissance du signal dominant et la puissance des multi trajets :

$$K_r|_{dB} = 10 \log \left(\frac{\alpha_d^2}{E\{x^2\}} \right) \quad (\text{II.27})$$

$$K_r|_{dB} = 10 \log \left(\frac{\alpha_d^2}{2\sigma^2} \right)$$

On remarque que la distribution de Rice tend vers celle de Rayleigh pour $K_r = 0$ ($\approx -30dB$ en pratique), et de Gaussienne (avec une moyenne de 1) lorsque $K_r \rightarrow \infty$ ($\approx 15dB$ en pratique). La distribution de Rice est représentée à la figure II.8.

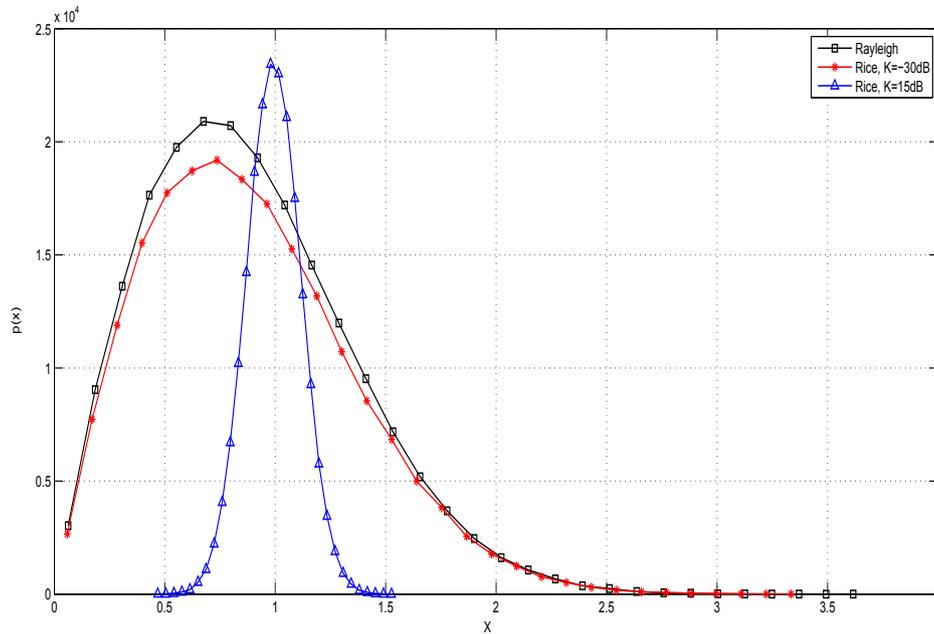


Figure II.8: Distribution de Rayleigh vs Rice.

7 Exercices

Exercice

7.1

On transmet un débit de 1Gbit/s par un multiplex OFDM de 100 porteuses modulées 4-PSK. Le canal est non stationnaire et dispersif, tel que le temps de dispersion est de 100ns

1. Que peut-on dire de la sélectivité du canal ?
2. Comment peut-on faire de la diversité sur ce canal ?
3. On mesure, maintenant, un étalement Doppler de 100Hz , comment peut-on faire de la diversité dans le temps ?

Exercice

7.2

On considère des voies de données, au débit de 100kbit/s , à transmettre sur un canal dispersif. Ce canal présente un temps de dispersion $T_{disp} = 1\mu\text{s}$ et un temps de cohérence $T_{coh} = 10\text{ms}$. On réalise un multiplex OFDM de N porteuses orthogonales, de fréquences $f = f_0 + n\Delta f$ pour $n = 1, 2, \dots, N$ et $f_0 = 1\text{GHz}$. Les porteuses sont modulées MAQ-4.

1. Quelles sont les conditions d'orthogonalités des porteuses ?
2. Quel est l'étalement Doppler du canal ? Quelle est la largeur de sa bande de cohérence ?
On décide de prendre des symboles d'une durée $T_s = 10 \times T_{disp}$ et un écartement en fréquence $\Delta f = 1/T_s$ pour un multiplex de 50 porteuses en cosinus.
3. Quel est le nombre maximal de voies de données qu'on peut transmettre avec ce système ?
4. Quelle est la largeur de bande utile ?
5. Si l'on veut faire de la diversité en fréquence quel est l'espacement minimal entre deux porteuses transportant la même information ?

Exercice 7.3

On transmet des données à 1Gbit/s sur un canal dispersif. On les transmet en les répartissant sur 100 porteuses orthogonales espacées deux à deux de 2.5MHz . Chaque porteuse est modulée par une MAQ-16. La transmission se fait sur un canal dispersif non stationnaire où la fonction de diffusion fait apparaître un étalement Doppler moyen $B_d = 50\text{Hz}$ et une dispersion moyenne des impulsions de $T_d = 50\text{ns}$.

1. Quel sont les débits binaire et symbole sur chaque porteuse ?
2. On veut faire de la diversité en fréquence, quel est l'ordre de diversité maximal envisageable ?

Exercice 7.4

On veut transmettre une source binaire, au débit $D_b = 160\text{Mbit/s}$, à l'aide d'une modulation MAQ-16 filtrée en cosinus surélevé de facteur de roll-off $\alpha = 0.5$. La porteuse est à $f_0 = 3\text{GHz}$. La transmission se fait sur un canal mobile dispersif. Le mobile peut atteindre une vitesse maximum de 360km/h

1. Quel est l'étalement doppler maximum ?
2. Quelles sont les conditions pour considérer que la transmission suit un modèle de Rayleigh ?
3. On a aussi observé que l'étalement moyen des impulsions ne dépasse pas le cinquième de la durée T_s d'un symbole transmis. Ceci permet

d'envisager la transmission avec un intervalle de garde. Peut on transmettre la source binaire sur ce canal de Rayleigh ?

4. Quel est alors le récepteur optimal de la modulation $MAQ - 16$?

Exercice

7.5

Un canal à évanouissement montre une réponse impulsionnelle avec des pics de puissance et des temps relatifs ayant les valeurs suivantes : $-15dB$ à $1\mu s$, $0dB$ à $10\mu s$, $-25dB$ à $18\mu s$, $-10dB$ à $25\mu s$. Déterminer les quantités suivantes :

1. Le retard excessif moyen
2. Le deuxième moment du retard excessif
3. La valeur efficace de l'étalement temporel des symboles (Delay spread)
4. La largeur de bande de cohérence en supposant que la corrélation se produise au moins à 0.5.

Exercice

7.6

Un signal dans un système sans fil mobile se propage en temps. Le taux de symbole $R_s = 20kbauds$. Les mesures de canal indiquent que le retard excessif moyen est de $10\mu s$, alors que le second moment du retard excessif est de $1.8 \times 10^{-10} s^2$.

1. Calculez la largeur de bande de cohérence, B_0 , si elle est définie comme l'intervalle de fréquence sur laquelle la fonction de transfert de fréquence complexe du canal a une corrélation d'au moins 0.9.
2. Répéter la partie 1) si B_0 est défini pour un intervalle de bande passante ayant une corrélation d'au moins 0.5.

Exercice

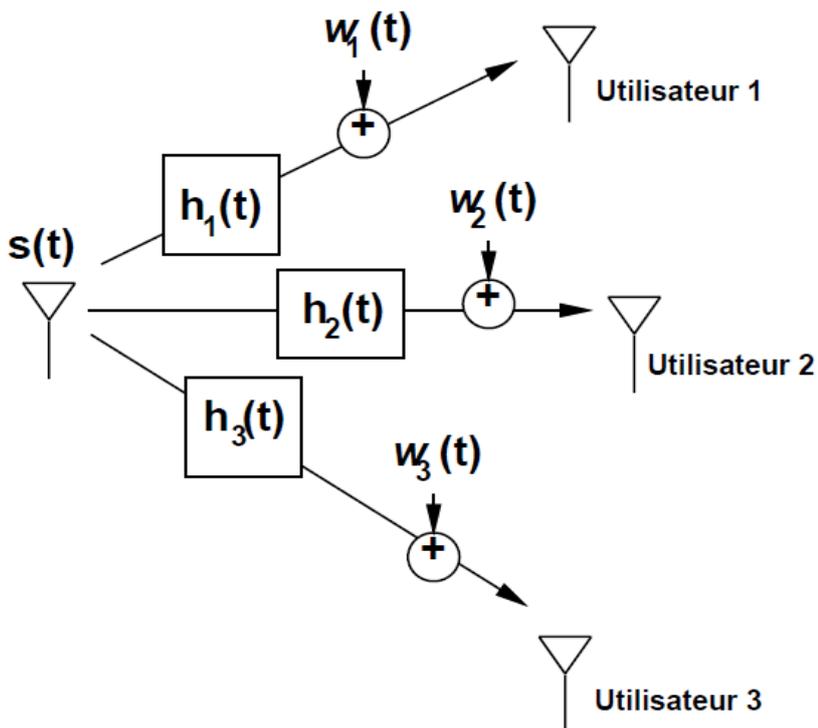
7.7

Considérons un canal à large bande avec un profil d'intensité de trajets multiples

$$A(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau/0.00001} & 0 \leq \tau \leq 20\mu sec \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1. Trouver le retard excessif moyen et le deuxième moment du retard excessif

2. Trouver la rapidité de modulation maximal pour que le signal transmis par ce canal ne subisse pas l'IES.



Techniques d'accès multiple

1. Time Division Multiple Access (TDMA)
2. Frequency Division Multiple Access (FDMA)
3. Code Division Multiple Access (CDMA)
4. Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)
5. Exercices

Chapitre III

Techniques d'accès multiple

LES systèmes de communications sans fil doivent profiter de la largeur des bandes de fréquences disponibles d'une manière optimale. Il s'agit de transmettre un maximum de données utiles par unités de temps entre l'émetteur et le récepteur. De plus, établir les règles permettant à tous les émetteurs de communiquer de façon optimale. Il sera donc nécessaire de définir les principes de communication à l'intérieur du médium pour que les utilisateurs puissent se partager le canal. Ces principes basés sur le partage de la ressource sont appelés techniques de méthode d'accès. Ces techniques sont divisées en :

- Accès Multiple à Répartition dans le Temps AMRT (Time Division Multiple Access : TDMA)
- Accès Multiple à Répartition en Fréquence AMRF (Frequency Division Multiple Access : FDMA)
- Accès Multiple à Répartition de Code AMRC (Code Division Multiple Access : CDMA)
- Accès Multiple à Répartition Orthogonale de la Fréquence AMOF (Orthogonal Frequency Division Multiplexing : OFDM)

Dans ce chapitre, nous allons présenter les particularités ces techniques d'accès, la théorie qui se cache derrière ainsi que les caractéristiques qui mettent en évidence ses avantages.

1 Time Division Multiple Access (TDMA)

La technique d'accès multiple TDMA permet le partage du spectre radio entre les utilisateurs grâce à une division de la bande de fréquences. Elle se base sur le principe de l'allocation temporelle de cette ressource radio. En effet, l'information de chaque utilisateur est acheminée durant un intervalle de temps appelé slot, de durée T_s , chacune de ces durées correspondant à un temps pendant lequel un utilisateur peut transmettre ses données tel qu'illustré à la figure III.1.

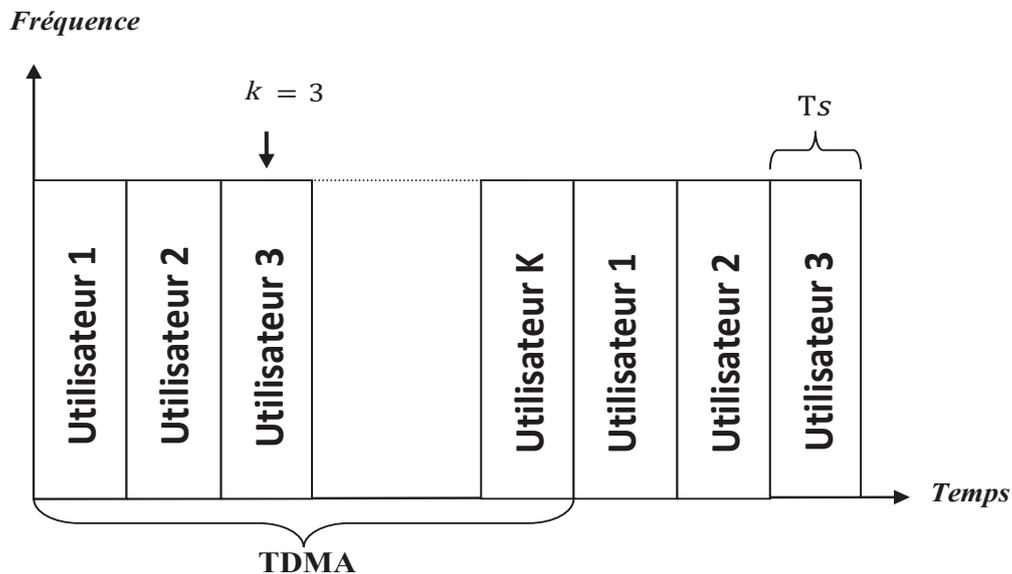


Figure III.1: Schéma d'un multiplexage temporel (TDMA).

Une trame de messages est alors composée d'un nombre de slots. Chaque slot comporte un préambule servant de d'élimateur et d'identificateur de la trame, ce qui permettra une meilleure synchronisation lors de la réception, en plus d'une suite de bits qui représente le message à transmettre. Un temps de garde est requis entre les utilisateurs. Il en résulte que les données émises peuvent être transmises à la même fréquence sans entraîner d'Interférences d'Accès Multiple (Multiple Access Interference : MAI).

Le nombre de canaux temporels = le nombre de slots multiplié par les canaux fréquentiels

disponibles

$$\mathcal{N} = \frac{K (B_{tot} - 2B_{guard})}{B_c} \quad (\text{III.1})$$

K : le nombre d'utilisateurs TDMA maximal dans chaque canal fréquentiel

B_{tot} : La bande passante totale du système

B_{guard} : bande de garde dans chaque coté de la bande passante

B_c : bande passante de chaque canal.

Exemple 1.1

Le GSM qui est un système TDMA qui utilise $25MHz$ pour la connexion montante (uplink) divisée en canaux fréquentiels de $200KHz$. On assume qu'il n'y a pas de bandes de garde. Si 8 canaux de paroles sont supportés dans chaque canal fréquentiel, Le nombre de canaux temporels $\mathcal{N} = \frac{8 \times 25 \times 10^6}{200 \times 10^3} = 1000$. Un étalement temporel de $10\mu secs$ correspond à une largeur de bande de cohérence du canal de $B_{coh} \approx 100KHz$ qui est inférieure à la bande passante du canal TDMA de $200KHz$. Par conséquent, l'atténuation IES est nécessaire. La spécification GSM comprend un égaliseur afin de compenser l'IES.

Un émetteur / récepteur, tel qu'un téléphone cellulaire peut émettre et recevoir dans un intervalle de temps spécifique et rester inactif jusqu'à ce qu'il soit autorisé à intervenir de nouveau. En d'autres termes, chaque intervalle de temps accueille une partie du signal radio-fréquence associé à un utilisateur donné. Cette technique d'accès présente de nombreux avantages :

- L'offre d'une certaine flexibilité quant aux débits supportés, non seulement à travers l'allocation multiple des canaux, mais aussi par rapport aux utilisateurs qui sollicitent le système ;
- La distinction des bandes étroites grâce à la synchronisation temporelle qui évite d'augmenter le coût des terminaux mobiles ;
- Le découpage du message en trames, ce qui offre à la fois une meilleure gestion et un meilleur contrôle de débit et d'erreur ;
- L'utilisation optimisée et efficace du spectre radio : plus besoin de bandes de garde entre les sous-canaux ;
- La transmission de chaque signal avec un temps de garde approprié pour garantir la synchronisation.

La technologie TDMA présente toutefois certaines limites :

- Elle exige un pic en puissance lors de la transmission sur le lien montant, ce qui réduit considérablement son autonomie ;
- Elle nécessite la synchronisation du signal à la réception pour d'éliminer les trames et extraire les messages.

Chacun des K utilisateurs émet pendant une fraction $1/K$ du temps avec une puissance moyenne KP dans une bande B_{tot} (on pose $B_k = B_c/K$). La capacité théorique de chaque utilisateur est donc :

$$C_K^{TDMA} = \frac{B_c}{K} \log_2 \left(1 + \frac{K \times P}{B_c \times N_0} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$= \frac{B_c}{K} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\left(\frac{B_c}{K}\right) N_0} \right) \quad (\text{III.3})$$

$$= B_k \log_2 \left(1 + \frac{P}{B_k N_0} \right) \quad (\text{III.4})$$

Il est important de souligner que d'un point de vue pratique, la puissance supportée par les émetteurs ne peut être augmentée au-delà d'un certain seuil, ce qui pose problème lorsque K augmente. Cette méthode requiert de plus une synchronisation entre utilisateurs. Par contre, le TDMA a la flexibilité requise pour allouer différents débits à différents utilisateurs (en donnant plus de time slots à ceux qui veulent plus de débit).

2 Frequency Division Multiple Access (FDMA)

La technique d'accès multiple FDMA consiste à transmettre les signaux provenant de K utilisateurs différents sur des bandes de fréquences distinctes. La figure III.2 donne un exemple de la manière dont ce multiplexage peut s'effectuer. Au niveau de l'émetteur un filtre passe bas est utilisé afin de s'assurer que la bande passante du message à transmettre est limitée à une largeur définie au préalable. Chaque signal module une porteuse différente dont la fréquence est fixée par le synthétiseur. Les signaux issus des K modulateurs sont superposés et transmis par

le canal. En réception, les porteuses sont séparées par des filtres passe-bande placés en parallèle et centrés sur les fréquences porteuses des messages à détecter. La largeur de ces filtres est déterminée afin de ne pas tronquer le spectre du signal. À la sortie du filtre passe-bande, le signal est démodulé et traverse un filtre passe-bas permettant d'écartier les composantes indésirables et de récupérer le message en bande de base.

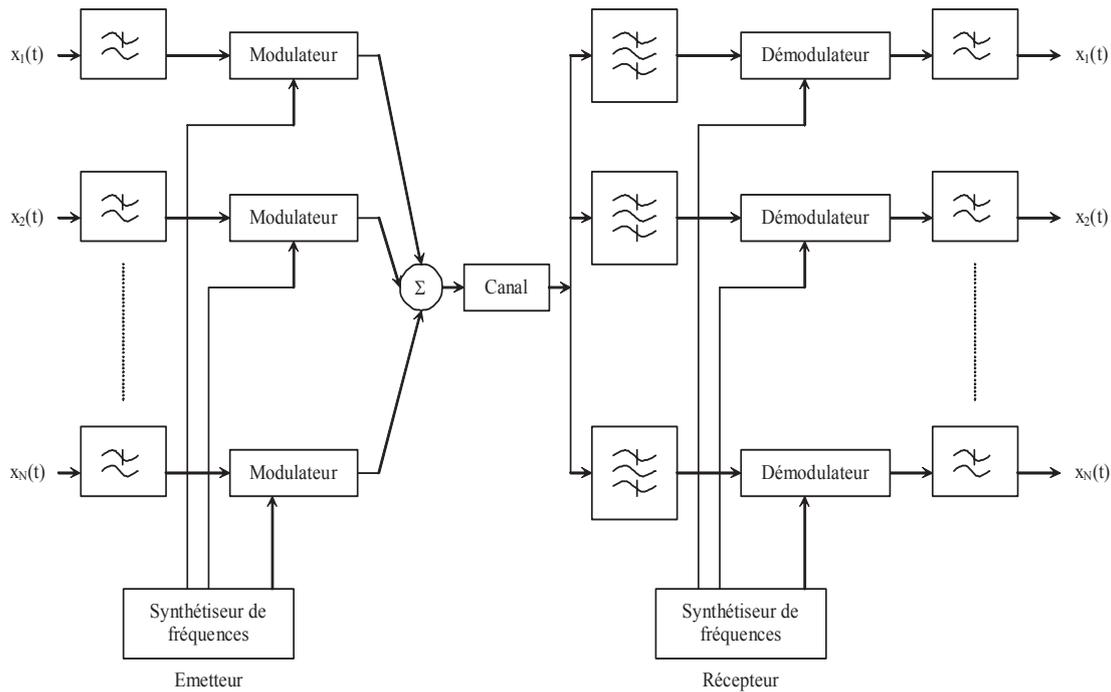


Figure III.2: Principe du multiplexage en fréquence.

Le nombre de canaux fréquentiels

$$\mathcal{N} = K \frac{(B_{tot} - 2B_{guard})}{B_c} \quad (III.5)$$

K : le nombre d'utilisateurs FDMA maximal dans chaque canal fréquentiel

B_{tot} : La bande passante totale du système

B_{guard} : bande de garde dans chaque coté de la bande passante

B_c : bande passante de chaque canal.

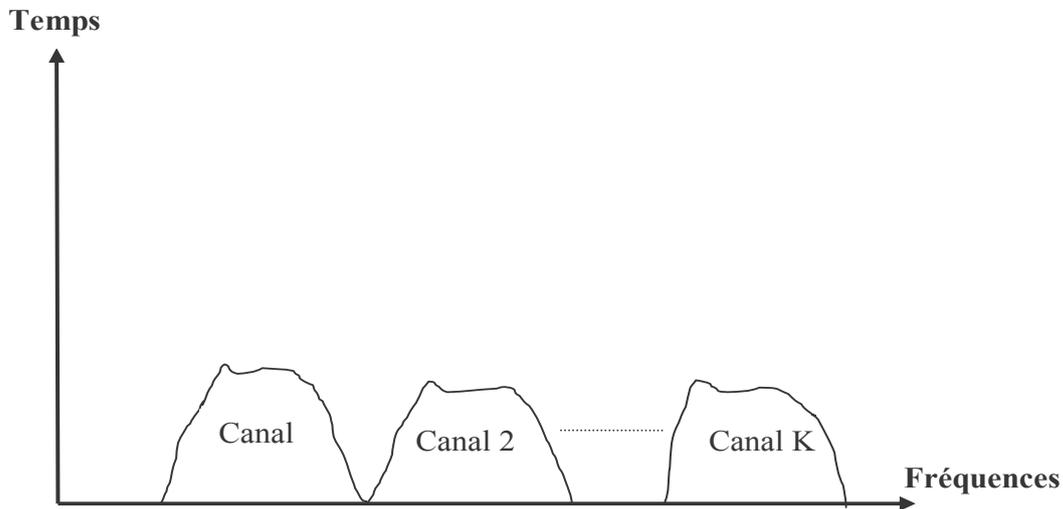


Figure III.3: Schéma d'un multiplexage en fréquence (FDMA).

Exemple 2.1

Les systèmes analogiques de première génération (*AMPS* : Advanced Mobile Phone System) ont attribué une largeur de bande totale de $B_{tot} = 25MHz$ pour les canaux de la liaison montante et une autre $B_{tot} = 25MHz$ pour les canaux de la liaison descendante. Cette répartition de la bande passante a été partagée entre deux opérateurs dans chaque région, chaque opérateur disposait donc $12,5MHz$ pour ses canaux de liaison montante et de liaison descendante. Un spectre de signal de $B_c = 30KHz$ est attribué à chaque utilisateur. correspondant à $24KHz$ pour le signal modulé FM et à $3kHz$ de bandes de garde de chaque côté. Les largeurs de bande totales des liaisons montante et descendante exigent également des bandes de garde de $B_{guard} = 10KHz$ de chaque côté afin de limiter les interférences causés par systèmes adjacents. Ainsi, le nombre total des utilisateurs peuvent être supportés dans la liaison montante ou la liaison descendante de la largeur de bande totale de $B_{tot} = 25kHz$ est $K = \frac{25 \times 10^6 - 2 \times 10 \times 10^3}{30 \times 10^3} = 832$ ou 416 par opérateur.

La bande totale du signal est la somme des bandes des signaux des utilisateurs augmentée de bandes de garde destinée à supprimer les interférences d'accès multiple (voir la figure III.3).

Cette technologie d'accès multiple présente plusieurs avantages :

- L'augmentation de la capacité offerte peut être assurée grâce à la réduction du débit supporté et à l'utilisation des techniques de codage efficaces ;
- La conception technologique AMRF est relativement simple. Son implémentation peut être pensée autour d'une gestion de la ressource pour satisfaire les exigences de la qualité de service de la voix.

Toutefois, la technologie AMRF présente certaines limites :

- La technologie AMRF ne présente pas de différence significative par rapport aux systèmes analogiques, puisque l'augmentation de la capacité est tributaire de la réduction des facteurs signal/interférence et signal/bruit ;
- Le débit maximum supporté par un canal est fixe et limité, ce qui restreint les perspectives des services qui peuvent être offerts en adoptant cette technologie d'accès, particulièrement ceux des futurs systèmes mobiles qui sont exigeants en débit binaire.

Si la largeur de bande B_c est partagée entre K utilisateurs, chacun d'eux émet avec une puissance moyenne P dans une bande $B_k = B_c/K$, et la capacité C_K de chaque utilisateur est donnée par (en supposant qu'il n'y a ni interférences entre utilisateurs ni bandes de garde) :

$$C_K^{FDMA} = \frac{B_c}{K} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\left(\frac{B_c}{K}\right) N_0} \right) \quad (\text{III.6})$$

$$= B_k \log_2 \left(1 + \frac{P}{B_k N_0} \right) \quad (\text{III.7})$$

$$= C_K^{TDMA} \quad (\text{III.8})$$

La capacité totale théorique des K utilisateurs est donnée par la somme des capacités des différents utilisateurs :

$$C_{tot}^{FDMA} = K \times C_K^{FDMA} = B_c \log_2 \left(1 + \frac{P}{B_k N_0} \right) \quad (\text{III.9})$$

L'expression (III.9) montre que la capacité totale augmente avec le nombre d'utilisateurs. Toutefois, puisque chaque utilisateur émet avec une puissance P , la puissance totale P_{tot} croît

linéairement avec le nombre d'utilisateurs : $P_{tot} = P \times K$. Ainsi, à puissance totale fixée P_{tot} , la puissance par utilisateur est $P = P_{tot}/K$ et, par conséquent, la capacité totale ne dépend pas du nombre d'utilisateurs K . En pratique, la capacité n'augmente donc pas avec le nombre d'utilisateurs sur le canal.

La Figure III.4 illustre la capacité C_K par utilisateur ; normalisée par la largeur de bande du canal B_c c-à-d $\frac{C_K}{B_c}$, en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$, avec K comme paramètre. Cette expression est donnée comme

$$\frac{C_K^{FDMA}}{B_c} = \frac{1}{K} \log_2 \left(1 + K \frac{C_K^{FDMA}}{B_c} \left(\frac{E_b}{N_0} \right) \right) \quad (\text{III.10})$$

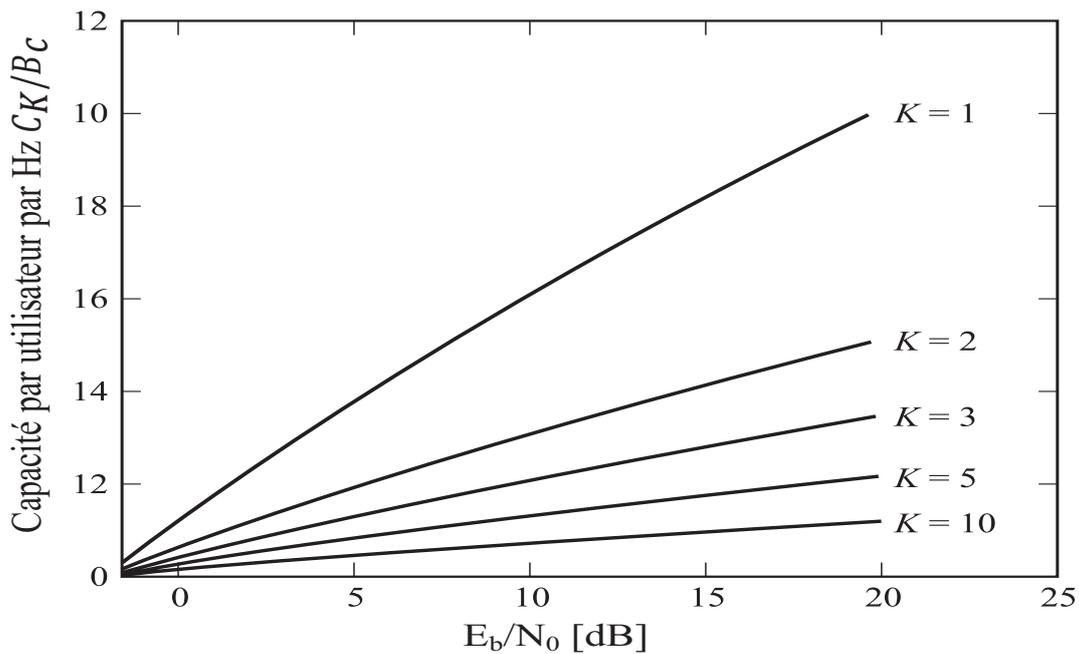


Figure III.4: Capacité normalisée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour FDMA.

Une forme plus compacte de l'équation (III.10) est obtenue en définissant la capacité totale normalisée $C_n = KC_K/B_c$, qui correspond au débit total pour tous les K utilisateurs par unité de bande passante. Ainsi, l'équation III.10 peut être exprimée comme suit :

$$C_n = \log_2 \left(1 + C_n \left(\frac{E_b}{N_0} \right) \right) \quad (\text{III.11})$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C_n} - 1}{C_n} \quad (\text{III.12})$$

La courbe $C_n = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ est similaire de à celle de la courbe de l'efficacité spectrale $\eta_{\max} = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ tracée dans la figure I.11 de chapitre I. Nous remarquons que C_n augmente à mesure que $\frac{E_b}{N_0}$ augmente au-delà de la valeur minimale de $\ln 2$. Nous pouvons généraliser ce raisonnement pour la technique TDMA car $C_K^{FDMA} = C_K^{TDMA}$.

3 Code Division Multiple Access (CDMA)

Les techniques d'étalement de spectre ont tout d'abord été utilisées par les militaires dans les années 40. Cette technique est issue des travaux réalisés par Wiener et Shannon. Le principe de base de l'étalement de spectre peut être expliqué par la relation de Shannon. Cette dernière montre que pour transmettre sans erreur une quantité d'information C_{\max} avec un rapport signal sur bruit S/N , il faut disposer une largeur de band B suffisante. Cette relation est exprimée par l'équation (I.39) de chapitre I. L'étalement du spectre peut être classé en deux grandes catégories. La première est le CDMA direct qui regroupe :

- L'étalement par saut de fréquence, ou FH – SS (*Frequency Hopping Spread Spectrum*), qui consiste en une variation de la fréquence de transmission par sauts pseudo – aléatoires discrets.
- L'étalement par saut dans le temps, ou TH – SS (*Time Hopping Spread Spectrum*), qui est une modulation d'impulsions par tout ou rien où le signal est transmis dans des intervalles temporelles choisies conformément à un mot de code pseudo – aléatoire.
- L'étalement par séquence directe, ou DS – SS (*Direct Sequence Spread Spectrum*).

La seconde catégorie est le CDMA hybride qui fait associer le multiplexage par code aux autres techniques de multiplexage de manière plus hiérarchisée ; comme le montre la figure III.5. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser · seulement sur la technique DS – CDMA, car c'est la plus utilisée dans les transmissions de type CDMA. Une courte description de cette technique est présentée dans le sous – paragraphe suivant.

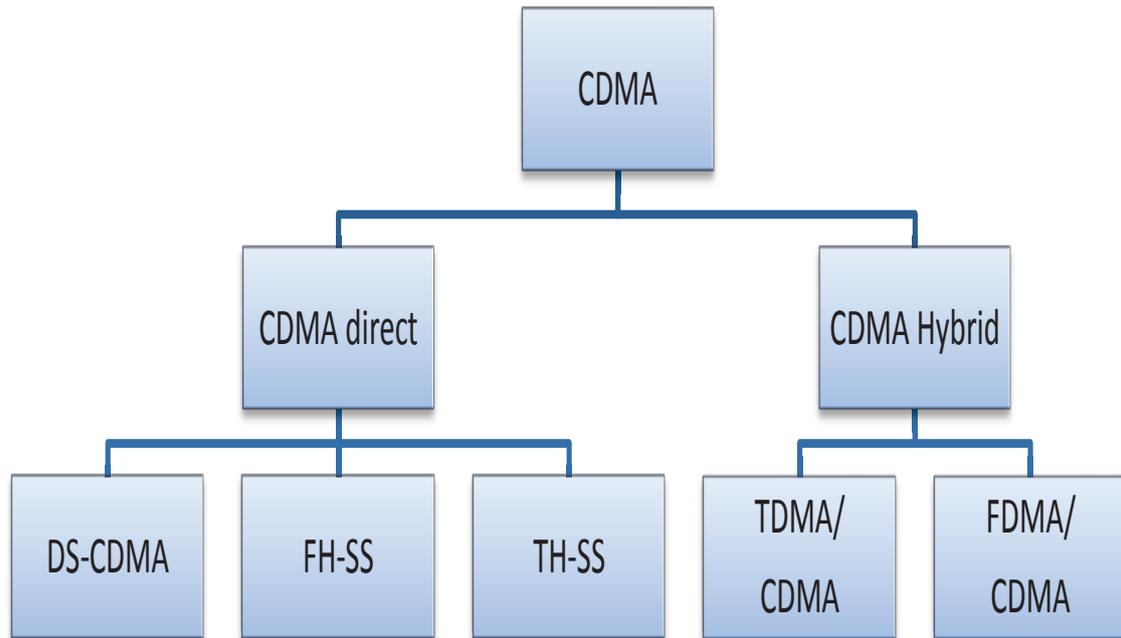


Figure III.5: Différentes techniques CDMA.

3.1 Étalement de spectre par séquence directe

Le CDMA est aussi connu sous le nom d'accès multiple par étalement de spectre. En effet, Le CDMA utilise le principe de l'étalement de spectre et qui permet à plusieurs utilisateurs d'être présents simultanément sur une même bande de fréquence. Cette technique permet de transmettre un signal d'information sur une largeur de bande plusieurs fois supérieure à la largeur de bande nécessaire pour transmettre le signal. Dans un système à étalement de spectre, le signal transmis est "étalé" à partir d'un code indépendant du message d'information. Après d'être synchronisé avec l'émetteur, le récepteur doit utiliser ce même code pour "désétaler" le signal et pouvoir par la suite récupérer le message d'information.

La figure III.6 montre le principe de l'étalement par séquence directe. Il consiste à multiplier chaque symbole informatif de période symbole T_s par une séquence pseudo – aléatoire entière, dont les éléments ou *chips* ont une période T_c (période chip) qui sont beaucoup plus faible que T_s .

Le code d'étalement d'un utilisateur k est représenté par la séquence de chips c^k . Cette séquence est formée de SF chips c_j^k ($j \in [1, SF]$) chacun d'eux de durée T_c , où SF est le facteur

d'étalement (*Spreading Factor*). C'est une propriété importante de l'étalement de spectre qui s'exprime par la relation suivante :

$$SF = \frac{B_{spr}}{B_s} = \frac{\frac{1}{T_c}}{\frac{1}{T_s}} = \frac{T_s}{T_c} \quad (\text{III.13})$$

$\frac{B_{spr}}{B_s}$ représente le rapport entre le débit du signal étalé et le débit du signal non étalé.

Exemple 3.1

Considérons à l'émission un rapport signal sur bruit égal à un ($SNR = 0dB$), c'est – à – dire que la puissance du bruit est la même que celle du signal émis. Après l'étalement, la bande passante du signal utile devient plus large et l'amplitude du signal diminue. Le bruit étant un signal indésirable qui s'ajoute à l'information lors de son trajet de l'émetteur vers le récepteur, il reste inaffecté par cette opération. Le niveau du signal devient tellement faible devant le bruit que l'information captée au niveau du canal de transmission sera considérée comme du bruit. A la réception, l'opération de désétalement permet de récupérer l'information utile, tandis que le bruit subit un étalement. Ce qui engendre une diminution du niveau de bruit devant le signal informatif (augmentation du SNR) et la détection devient alors d'une très bonne qualité.

Considérons un système CDMA avec K utilisateurs actifs. Chaque utilisateur possède un code pseudo-aléatoire (une signature) $c_k(t)$ de durée T_s . T_s est également la durée d'un symbole transmis. la signature peut être exprimée par :

$$c_k(t) = \sum_{j=1}^{SF} c_j^k g(t - jT_c) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (\text{III.14})$$

où c_j^k est une séquence pseudo-aléatoire formée par SF chips qui prennent des valeurs dans $\{-1/\sqrt{SF}, +1/\sqrt{SF}\}$, $g(t)$ est une forme d'onde de durée T_c supposée rectangulaire, T_c est la durée d'un chip. Notons que les signatures possèdent une énergie unitaire $\int_0^{T_s} c_k^2(t) dt = 1$. L'inter-corrélation entre une paire de signatures joue un rôle important dans les performances d'un

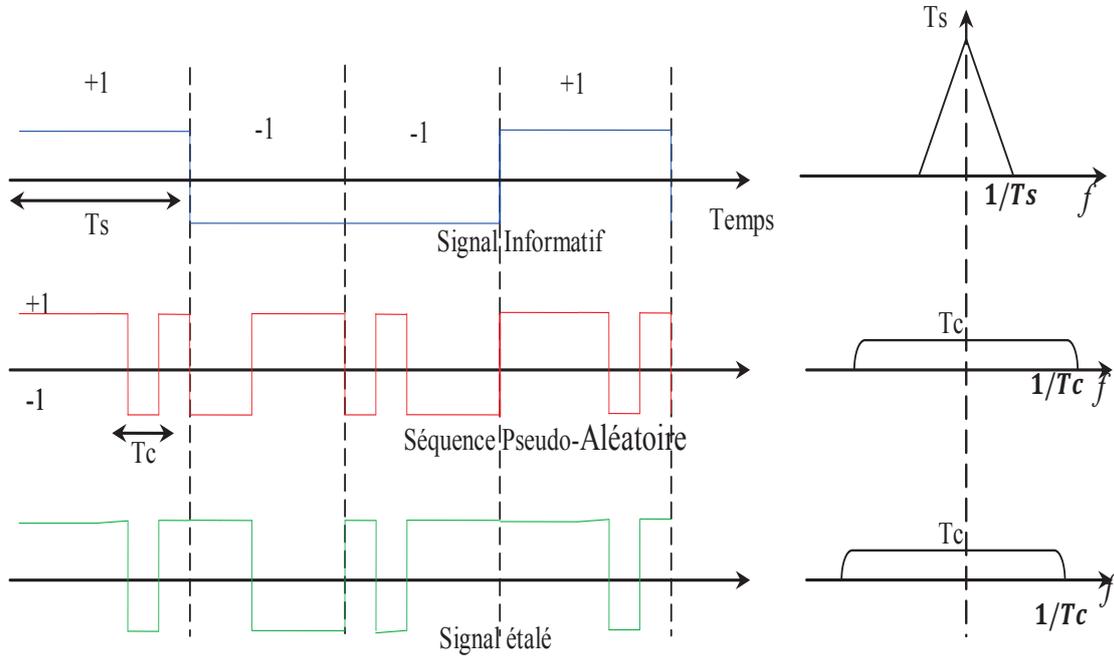


Figure III.6: Principe de l'étalement de spectre par séquence directe.

récepteur CDMA. Pour une durée symbole T_s on définit l'inter-corrélation comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,m} &= \int_0^{T_s} c_k(t)c_m(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^{SF} c_j^k c_j^m \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

On définit ainsi la matrice d'inter-corrélation \mathbf{R} :

$$[\mathbf{R}] = \Gamma_{k,m} \quad 0 \leq k, m \leq K \quad (\text{III.16})$$

La séquence d'information du $k^{\text{ème}}$ utilisateur ($k = 1, \dots, K$) est $(b_{(i)}^k)_{i=0, Nb-1}$, où Nb désigne la longueur de la séquence. Chaque symbole d'information prend une valeur dans $\{-1, +1\}$. Après étalement, le signal en bande de base correspondant s'écrit alors :

$$e_k(t) = A_k \sum_{i=1}^{Nb} b_{(i)}^k c_k(t - iT_s) \quad (\text{III.17})$$

où A_k est l'amplitude du signal reçu provenant du $k^{\text{ème}}$ utilisateur. Le signal CDMA de K utilisateurs présents dans le système ainsi construit est :

$$e(t) = \sum_{k=1}^K e_k(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{Nb} A_k b_{(i)}^k c_k(t - iTs) \quad (\text{III.18})$$

3.2 Désétalement

Le principe de désétalement (*despreading*) est expliqué dans la figure III.7. En réception, la corrélation entre le signal étalé et une réplique de séquences utilisée à l'émission permet de ramener la puissance du signal utile dans la bande d'origine. Les brouilleurs sont alors étalés et un filtrage passe – bas permet de supprimer leur puissance en dehors de la bande utile. L'opération de corrélation, qui correspond au filtrage adapté, permet de définir une capacité de résolution temporelle associée au code. Cette propriété est utilisée pour sélectionner les trajets multiples du canal de propagation . Alors que l'égalisation permet au récepteur de compenser les distorsions apportées par le canal, en essayant de les annuler, l'étalement de spectre utilise la diversité apportée par le canal pour améliorer les performances du système de communication.

Pour réaliser une réception correcte, il faut que la séquences pseudo – aléatoire possède de bonnes propriétés d'autocorrélation. De façon idéale, la fonction d'autocorrélation doit être maximale en zéro et minimale ailleurs. Soit le code d'étalement d'un utilisateur k est représenté par la séquence de chips c^k possède les deux propriétés suivantes :

- Une moyenne approximativement nulle :

$$\sum_{j=1}^{SF} c_j^k \approx 0 \quad (\text{III.19})$$

- Une autocorrélation donnée par :

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^{SF} c_j^k c_{j+t}^k \approx \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

avec $c_j^k = 0$ si $j > SF$.

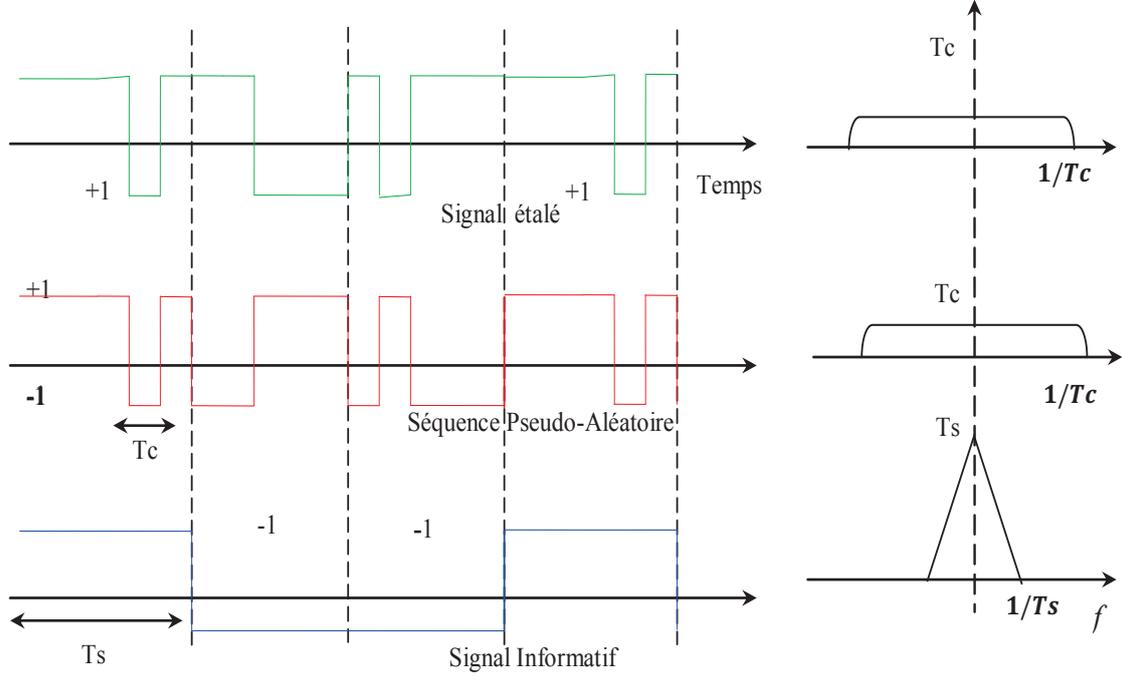


Figure III.7: Principe de désétalement de spectre par séquence directe.

Dans le cas d'une transmission sur un canal Gaussien, le signal reçu est :

$$r(t) = e(t) + w(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{Nb} A_k b_{(i)}^k c_k(t - iTs) + w(t) \quad (\text{III.21})$$

où $w(t)$ est un Bruit Blanc Additif Gaussien (AWGN) de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = N_0/2$. Dans l'intervalle de temps $[iT_s, (i+1)T_s[$, d'après les équations (III.21) et (III.18), nous pouvons représenter le signal reçu sous la forme d'un vecteur colonne $\bar{r}_{(i)}$:

$$\bar{r}_{(i)} = \sum_{k=1}^K A_k b_{(i)}^k \bar{c}_k + \bar{w} \quad (\text{III.22})$$

où $\bar{c}_k = [c_{k,0}, \dots, c_{k,j}, \dots, c_{k,SF}]^T$ est le vecteur colonne représentant la signature du $k^{\text{ème}}$ utilisateur et \bar{w} est le vecteur colonne représentant les SF échantillons du bruit $w(t)$.

3.2.1 Détecteur conventionnel

Pour un système CDMA synchrone, le détecteur le plus simple, appelé détecteur conventionnel (Matched Filter : MF), est celui qui fonctionne comme si chaque utilisateur était seul sur le canal, ne tenant pas compte des émissions des autres utilisateurs . Il fait une détection symbole par symbole, en utilisant à la sortie du récepteur un banc de filtres à la signature de chaque utilisateur. Ainsi la décision sur le symbole i de l'utilisateur k est obtenue à la sortie du filtre adapté associé au $k^{\text{ème}}$ utilisateur à l'instant iTs :

$$y_{(i)}^k = \int_{iT_s}^{(i+1)Ts} r(t)c_k(t - iT_s)dt \quad (\text{III.23})$$

D'après les équations (III.16) et (III.21), nous pouvons exprimer la sortie du $k^{\text{ème}}$ filtre adapté par :

$$\begin{aligned} y_{(i)}^k &= A_k b_{(i)}^k + \sum_{m \neq k}^K A_m b_{(i)}^m \Gamma_{k,m} + \int_{iT_s}^{(i+1)Ts} w(t)c_k(t - iT_s)dt \\ &= A_k b_{(i)}^k + MAI_{(i)}^k + \hat{w}_{(i)}^k \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Le terme $MAI_{(i)}^k$ représente l'interférence d'accès multiple pour le $i^{\text{ème}}$ symbole, il exprime la corrélation avec les autres utilisateurs, et $\hat{w}_{(i)}^k$ représente le terme de bruit relatif au $k^{\text{ème}}$ utilisateur, variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 \mathbf{R}$.

Pour un système synchrone le terme $MAI_{(i)}^k$ est égal à zéro. Il apparaît ainsi que l'orthogonalité des codes d'étalement permet de masquer la présence d'un autre utilisateur, cependant cette orthogonalité n'existe que pour un signal parfaitement synchronisé. Ceci suppose donc une synchronisation parfaite à la réception des retards de propagations introduits par le canal, ainsi que des instants de transmissions de chaque utilisateur. Ce qui n'est pas le cas en pratique.

Une représentation matricielle de l'expression (III.24), s'écrit :

$$y = \mathbf{R}Ab + \hat{w} \quad (\text{III.25})$$

Où :

- $\mathbf{R} = c^T c$ telque $c = [c^1, c^2, \dots, c^k, \dots, c^K]$, est la matrice d'intercorrélation normalisée définie par (III.16).
- $A = \text{diag} \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_K\}$ ou A_k est l'amplitude du signal reçu de l'utilisateur k .
- b est le vecteur des symboles émis.
- \hat{w} est un vecteur de bruit Gaussien suivant la loi $N(0; \sigma^2 \mathbf{R})$.

L'estimation de chaque bit d'information est alors assurée par :

$$\hat{b}^k = \text{sign}(y^k) \quad (\text{III.26})$$

Ainsi des nouvelles structures de détecteurs sont développées afin d'améliorer les performances du détecteur conventionnel .

3.2.2 Détecteur décorrélateur

Ce détecteur vise à éliminer totalement les MAI en les forçant à zéro appelé ZF (Zero-Forcing). Il se repose sur l'application de l'inversion de la matrice d'inter-corrélation \mathbf{R} . L'estimation de chaque bit s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{b}^k &= \text{sign}(\mathbf{R}^{-1}y) \\ &= \text{sign}(\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}Ab + \hat{w})) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Même si les contributions des différents utilisateurs sont séparées sur les composantes de $\mathbf{R}^{-1}y$, les bruits sont corrélés à cause de la multiplication par \mathbf{R}^{-1} . L'inconvénient majeur de ce détecteur est la difficulté de calculer l'inverse de la matrice \mathbf{R} en pratique, à cause de la variation de plusieurs facteurs au cours du temps (nombres des utilisateurs, retard temporel,...).

3.2.3 Détecteur à erreur quadratique moyenne

Le détecteur MMSE (Minimum Mean Square Error) est un détecteur très similaire au ZF. Contrairement à la détection ZF, la détection MMSE tient compte de la variance du bruit de

fond de la matrice de corrélation. Conséquent, cela permet d'améliorer les performances à la réception de façon significative par rapport au ZF lorsqu'il y a présence de bruit. L'estimation de chaque bit d'information est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{b}^k &= \text{sign} \left[\left(\mathbf{R} + \sigma^2 A^{-2} \right)^{-1} y \right] \\ &= \text{sign} \left[\left(\mathbf{R} + \sigma^2 A^{-2} \right)^{-1} (\mathbf{R} A b + \hat{w}) \right]\end{aligned}\tag{III.28}$$

3.3 Capacité de la méthode d'accès multiple CDMA

Dans un système CDMA non-coopératif où chaque utilisateur ignore le code d'étalement des autres utilisateurs. Par conséquent, les signaux des autres utilisateurs apparaissent comme une interférences au niveau de la réception de chaque utilisateur (Détection conventionnelle ou *Détection mono-utilisateur*). Si nous assumons que les interférences entre utilisateurs sont Gaussiennes, alors chaque signal d'utilisateur est corrompu par une interférence gaussienne de puissance $(K - 1)P$ et plus un bruit AWGN de puissance $B_c N_0$, donc la capacité par utilisateur pour une détection mono-utilisateur est :

$$C_K = B_c \log_2 \left[1 + \frac{P}{B_c N_0 + (K - 1)P} \right]\tag{III.29}$$

Où d'une manière équivalente :

$$\frac{C_K}{B_c} = \log_2 \left[1 + \frac{C_K \frac{E_b}{N_0}}{B_c 1 + (K - 1) \left(\frac{C_K}{B_c} \right) \left(\frac{E_b}{N_0} \right)} \right]\tag{III.30}$$

La figure III.8 montre la courbe de $\frac{C_K}{B_c} = f \left(\frac{E_b}{N_0} \right)$ pour les différents valeurs de K . Pour un très grand nombre d'utilisateurs, nous pouvons utiliser l'approximation $\ln(1 + x) \leq x$, Alors :

$$\frac{C_K}{B_c} \leq \frac{C_K}{B_c} \frac{\frac{E_b}{N_0}}{1 + (K - 1) \left(\frac{C_K}{B_c} \right) \left(\frac{E_b}{N_0} \right)} \log_2 e\tag{III.31}$$

D'où la capacité totale normalisée $C_n = K \frac{C_K}{B_c}$ est donnée par :

$$C_n \leq \log_2 e - \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \quad (\text{III.32})$$

$$C_n \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} < \frac{1}{\ln 2} \quad (\text{III.33})$$

Dans ce cas, nous remarquons que la capacité totale normalisée n'augmente pas avec K contrairement pour TDMA et FDMA.

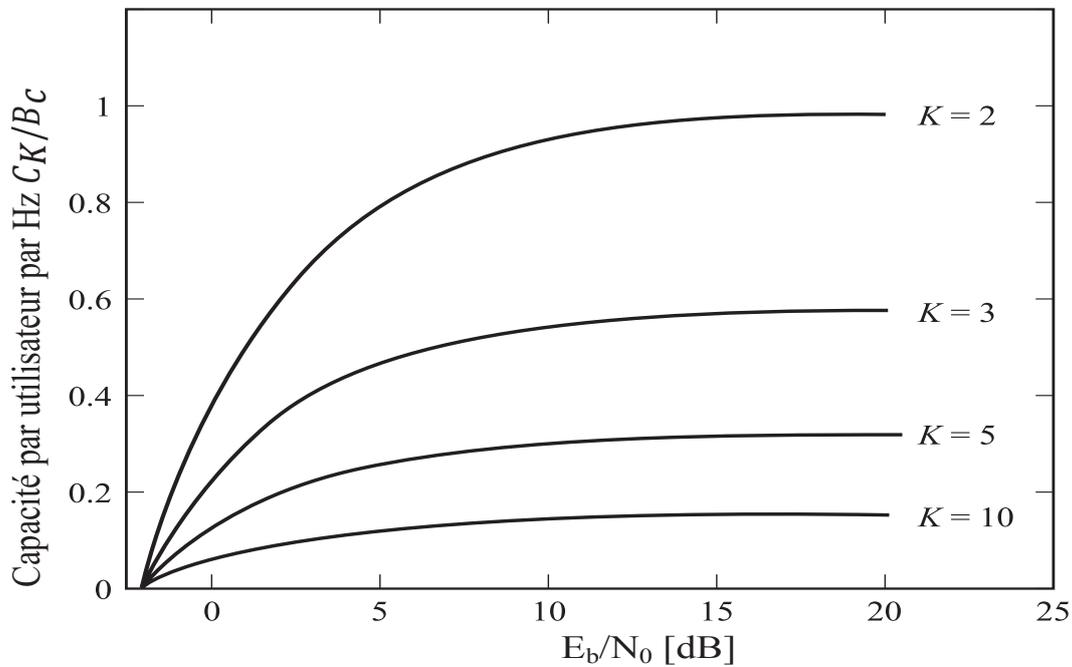


Figure III.8: Capacité normalisée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour CDMA.

Nous supposons que P est la puissance de chaque utilisateur. La région de débit (rapidité) de dimension K pouvant être atteinte pour les utilisateurs K dans un canal AWGN est :

$$R_i < B_c \log_2 \left[1 + \frac{P}{B_c N_0} \right], \quad 1 \leq i \leq K \quad (\text{III.34})$$

$$R_i + R_j < B_c \log_2 \left[1 + \frac{2P}{B_c N_0} \right], \quad 1 \leq i, j \leq K \quad (\text{III.35})$$

$$\vdots$$

$$R_{SUM} = \sum_{i=1}^K R_i < B_c \log_2 \left[1 + \frac{KP}{B_c N_0} \right] \quad (\text{III.36})$$

Où R_{SUM} est le débit total (somme) atteint par les K utilisateurs en utilisant la détection multi-utilisateurs. D'après l'équation (III.36), nous concluons que la somme des débits de K utilisateurs R_{SUM} tend vers l'infini avec K . Par conséquent, la capacité de CDMA a une forme similaire à celle de FDMA et TDMA. Noter que si tous les débits du système CDMA sont identiques à R , l'équation (III.36) se réduit à :

$$R < \frac{B_c}{K} \log_2 \left[1 + \frac{KP}{B_c N_0} \right] \quad (\text{III.37})$$

Où R est le débit le plus élevé atteignable (possible) et est identique à la contrainte de taux dans FDMA et TDMA. Dans ce cas, CDMA ne produit pas un débit plus élevé que TDMA et FDMA. Cependant, si les débits des K utilisateurs sont sélectionnés pour être inégaux de sorte que les inégalités (III.34) à (III.36) sont satisfaits, **alors il est possible** de trouver les points dans la région de débits atteignables de telle sorte que la somme des débits pour les K utilisateurs dans CDMA dépasse la capacité de FDMA et TDMA.

Exemple 3.2

Prenons le cas de deux utilisateurs dans un système CDMA. Les débits des deux utilisateurs doivent satisfaire les inégalités :

$$R_1 < B_c \log_2 \left[1 + \frac{P}{B_c N_0} \right] \quad (\text{III.38})$$

$$R_2 < B_c \log_2 \left[1 + \frac{P}{B_c N_0} \right] \quad (\text{III.39})$$

$$R_1 + R_2 < B_c \log_2 \left[1 + \frac{2P}{B_c N_0} \right] \quad (\text{III.40})$$

La région de débits atteignables pour les deux utilisateurs est illustrée à la figure III.9, avec

$$C_i < B_c \log_2 \left[1 + \frac{P_i}{B_c N_0} \right], \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (\text{III.41})$$

sont les capacités correspondant aux deux utilisateurs avec $P_1 = P_2 = P$. Nous notons que si l'utilisateur 1 émet à la capacité C_1 , l'utilisateur 2 peut émettre jusqu'à un débit maximal :

$$\begin{aligned} R_{2m} &= B_c \log_2 \left[1 + \frac{2P}{B_c N_0} \right] - C_1 \\ &= B_c \log_2 \left[1 + \frac{P}{P + B_c N_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

ce qui est illustré à la figure III.9 sous le point **A** c'est – à – dire l'utilisateur 1 peut atteindre sa limite mono-utilisateur tout en même temps l'utilisateur 2 peut obtenir un débit différent de zéro. Nous remarquons que le débit R_{2m} correspond au cas où le signal de l'utilisateur 1 est considéré comme un bruit additif équivalent dans la détection du signal de l'utilisateur 2. En raison de la symétrie, Une situation analogue existe si l'utilisateur 2 émet à la capacité C_2 . Ensuite, l'utilisateur 1 peut transmettre jusqu'à un débit maximal $R_{1m} = R_{2m}$, ce qui est illustré à la Figure III.9 sous le point **B**. Dans ce cas, nous avons une interprétation similaire à celle décrite ci-dessus, avec un échange entre les rôles d'utilisateur 1 et d'utilisateur 2. Les points **A** et **B** sont reliés par une ligne droite définie par l'équation (III.40). On voit facilement que cette droite est la limite de la région de débit atteignable, puisqu'un point quelconque sur la ligne correspond au débit maximal $B_c \log_2 \left[1 + \frac{2P}{B_c N_0} \right]$, qui peut être obtenu simplement en partageant le temps des canaux de transmission.

Le récepteur détecte les informations des deux utilisateurs en deux étapes. Dans un premier temps, il détecte les données de l'utilisateur 2, en traitant le signal de l'utilisateur 1 comme interférence gaussienne. Le débit maximum que l'utilisateur 2 atteignable est donné par (III.42). Une fois que le récepteur a détecté les données de l'utilisateur 2, il peut reconstruire le signal de l'utilisateur 2 et le soustraire du signal reçu global. Le récepteur peut alors détecter les données de l'utilisateur 1. Puisqu'il ne reste plus que le bruit gaussien dans le système, le débit maximal que l'utilisateur 1 peut transmettre peut atteindre sa limite mono-utilisateur¹.

1. Ce détecteur est appelé le détecteur à annulation successive des interférences (Successive Interference

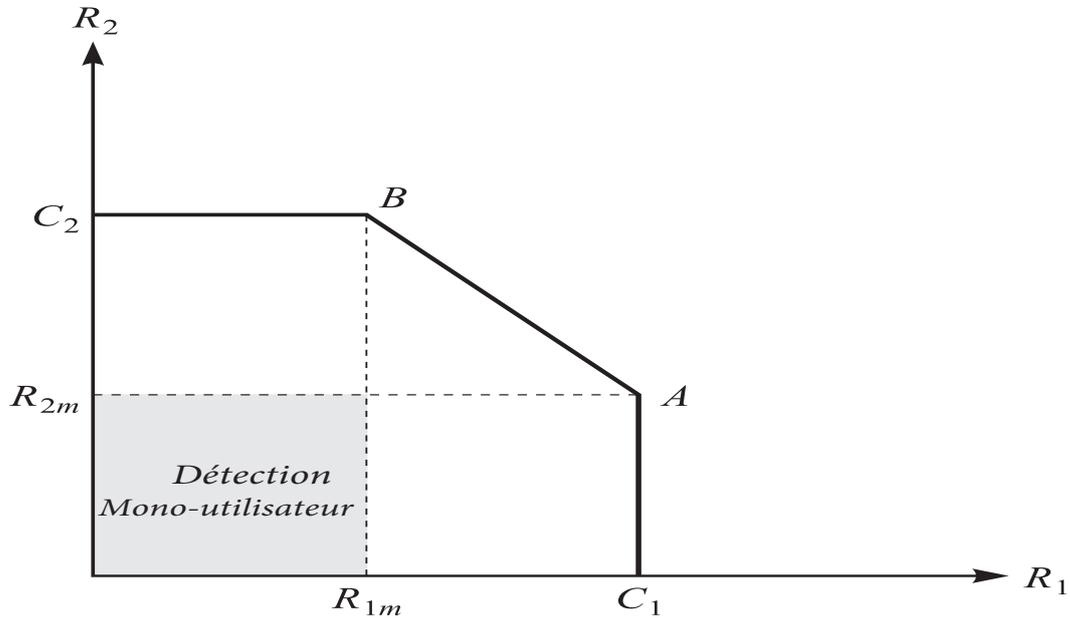


Figure III.9: Région de capacité du canal gaussien à accès multiple CDMA (deux utilisateurs).

3.4 Codes d'étalement

L'utilisation de CDMA comme technique d'accès multiple pose simultanément la question du choix des séquences de code à utiliser pour distinguer les signaux associés aux différents utilisateurs. La capacité de multiplexage, la taille des séquences de code, leur poids, la complexité des systèmes de détection associés et les performances des codes en termes de fonction d'auto et d'intercorrélacion déterminent le choix des codes appropriés à la réalisation d'un système d'accès multiple par répartition de codes.

Par exemple si la fonction d'intercorrélacion entre deux codes différents c_j et c_i satisfait $\rho_{c_j c_i}(0) = 0$, on dit que les deux codes sont orthogonaux. Dans le cas où les codes ne sont pas complètement orthogonaux, un « résidu » d'intercorrélacion apparaît entre le code de l'utilisateur qui nous intéresse et celui des autres utilisateurs dans la cellule. Ce résidu donne lieu à une forme d'interférence, très peu appréciée par les concepteurs des réseaux à base de CDMA qu'on appelle « interférence d'accès multiple » MAI (*Multiple Access Interference*).

Cancellation : SIC)

Afin, entre autres, d'avoir de faibles corrélations croisées entre séquences de code $c(t)$, ceux – ci doivent ressembler le plus possible à des séquences aléatoires. Ces séquences périodiques sont appelées codes pseudo – aléatoires ou codes de pseudo – bruit (*Pseudo Noise (PN) code*).

A part les codes pseudo – aléatoires, d'autres séquences codes sont aussi utilisées dans la plupart des systèmes de réseaux mobiles fondés sur le DS – CDMA. Nous pouvons citer par exemples :

- Les codes d'étalement utilisés dans cette modulation sont des codes orthogonaux à facteur d'étalement variable (*OVSF : Orthogonal Variable Spreading Factor*). Ils sont utilisés pour séparer les différents canaux physiques d'un utilisateur. L'utilisation de ces codes OVSF permet de modifier le facteur d'étalement, même si ces derniers sont de longueurs différentes. Les codes OVSF ont les propriétés suivantes :
 - Les séquences sont parfaitement orthogonales (c'est – à – dire que l'intercorrélacion entre deux séquences de code est nulle).
 - Les séquences ne sont pas toutes de même longueur, et par conséquent le traitement est différent en fonction du débit des données à transmettre. Les codes OVSF sont appelés codes de Walsh puisqu'ils sont générés en appliquant la transformée de Walsh – Hadamard définie par :

$$H : \begin{cases} H_1 = 1 \\ H_{2N} = \begin{pmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{pmatrix} \end{cases}$$

où N est une puissance de 2. Les codes usagers c^k seront les lignes ou les colonnes de la matrice H .

Exemple 3.3

si nous voulons obtenir quatre codes orthogonaux, c^1, c^2, c^3, c^4 , il faudra générer

une matrice d'Hadamard d'ordre quatre :

$$H_1 = +1 \rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow H_4 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow c^1 \\ \rightarrow c^2 \\ \rightarrow c^3 \\ \rightarrow c^4 \end{matrix}$$

- Les séquences pseudo-aléatoires sont générées par des registres à décalage avec une certaine rétroaction. Ces séquences sont appelées *séquences- m* , (avec m égal au nombre de bascules du registre à décalage). La combinaison de plusieurs séquences- m donne lieu à d'autres types de séquences telles que les séquences de *Gold*². La longueur de la séquence pseudo-aléatoire selon ce générateur est : $2^m - 1$ et le nombre d'états est idéalement $2^m - 1$ parce que on ne veut pas passer par l'état "0". Pour pouvoir récupérer le signal au récepteur, il faut bien synchroniser la séquence pseudo-aléatoire au signal reçu, d'où l'acquisition et la poursuite de la séquence pseudo-aléatoire.

Généralement en liaison descendante (downlink), on utilise des codes orthogonaux puisque la synchronisation est facilement réalisable. Par contre, En liaison montante (uplink) la synchronisation est complexe, on utilise des codes non-orthogonaux qui sont les codes Gold.

4 Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Dans le cas d'un canal à trajets multiples, les techniques de modulation classiques sont très sensibles à l'IES. Cette interférence est plus considérable si la durée du symbole est négligeable par rapport au retard du canal. En outre, une démodulation simple est douée si la durée des symboles utiles est grande par rapport au retard du canal.

La modulation multi – porteuses (Multi – Carrier Modulation : MCM) permet de simplifier le problème de l'égalisation dans le cas d'un canal sélectif en fréquence. Le principe est de transmettre simultanément plusieurs symboles en parallèle sur différentes porteuses. En modulant sur N porteuses, il est possible d'utiliser des symboles N fois plus longs tout en

2. Étant donné les propriétés d'intercorrélacion assez médiocres entre deux séquences- m , le code Gold a été proposé afin d'améliorer les propriétés d'intercorrélacion, tout en étant capable de générer un nombre plus important de codes avec les mêmes propriétés pseudo-aléatoires.

conservant le même débit qu'avec une modulation mono – porteuse. En choisissant une valeur assez grande pour N , la durée des symboles devient grande devant l'étalement des retards et les perturbations liées aux échos deviennent négligeables.

Exemple 4.1

La bande spectrale allouée à la transmission $B_N = \Delta f$ est partagée entre les différentes porteuses. Ainsi, chaque porteuse peut occuper une bande de fréquence inférieure à la bande de cohérence B_{coh} du canal ($\Delta f \ll B_{coh}$), qui assure un évanouissement relativement plat sur chaque sous-canal. Ceci est également visible dans le domaine temporel : le temps symbole T_N du signal modulé dans chaque sous-canal est proportionnel à la largeur de bande du sous-canal $1/B_N$. Donc, $B_N \ll B_{coh}$ implique que $T_N \approx 1/B_N \gg 1/B_{coh} \approx \tau_{RMS}$, où τ_{RMS} désigne l'étalement du retard du canal. Ainsi, si N est suffisamment grand, le temps symbole est beaucoup plus grand que la propagation du retard, de sorte que chaque sous-canal subit une faible dégradation IES.

Nous définissons l'efficacité spectrale comme étant le débit binaire par unité de fréquence. Plus l'efficacité spectrale est importante, plus il sera possible de transmettre un débit important sur un canal donné. Le choix des porteuses et de leur écartement va influencer sur cette efficacité spectrale. Pour garder la même efficacité qu'avec la modulation mono porteuse équivalente, il faut choisir soigneusement les fréquences des porteuses utilisées. La méthode la plus répandue est basée sur l'utilisation des porteuses orthogonales.

4.1 Principe

Le principe de base des transmissions multi-porteuses est de construire un signal utile à partir de la somme de plusieurs autres signaux, appelés sous-porteuses. L'information sera ensuite multiplexée sur chacune d'elles, formant alors autant de canaux de communication. Pour répartir les données à transmettre sur les N porteuses, nous groupons les symboles C_K par paquets de N . Les C_K sont des nombres complexes définis à partir des éléments binaires par une constellation souvent de modulation QAM ou PSK à 4, 16, 64, 2^q états.

La séquence de N symboles C_0, C_1, \dots, C_{N-1} constitue un symbole OFDM, T_N la durée d'un symbole OFDM. Le $k^{ième}$ train de symboles parmi les N trains module un signal de

fréquence f_k (cf. Figure III.10). Ainsi, si Rs désigne le débit symbole par unité de temps pour une transmission à porteuse unique ($Rs = \frac{1}{Ts}$, Ts étant la période d'un symbole), le débit d'émission pour chaque sous-porteuse est alors $\frac{Rs}{N}$ et $T_N = N \times Ts$. L'expression du signal OFDM sur l'intervalle temporel $[0, T_N[$ peut s'exprimer comme :

$$S(t) = e^{2j\pi f_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{kt}{T_N}}, \quad 0 \leq t \leq T_N \quad (\text{III.43})$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi f_k t}, \quad f_k = f_0 + \frac{k}{T_N} \quad (\text{III.44})$$

Ce signal $S(t)$ peut être interprété comme la somme des éléments d'information C_0, C_1, \dots, C_{N-1} émis respectivement sur les porteuses de fréquences f_0, f_1, \dots, f_{N-1} . Cela correspond donc effectivement à un multiplexage en fréquence sur les sous-porteuses où l'espacement minimal entre les sous-porteuses est de $\Delta f = \frac{1}{T_N}$. En discrétisant ce signal et en le ramenant en bande de base pour l'étude numérique, on obtient une sortie $S(n)$ sous la forme :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{III.45})$$

La séquence $\{S(n)\}_{n=0}^{N-1}$ représente le symbole OFDM. Les $S(n)$ sont donc obtenus par une Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI ou IDFT, *Inverse Discret Fourier Transform*) des C_k . En choisissant le nombre de porteuses N tel que $N = 2^n$, le calcul de la transformée de Fourier inverse se simplifie et peut se calculer par une simple IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*).

4.2 Notion d'orthogonalité

La différence fondamentale entre les différentes techniques classiques de modulation multi-porteuses et l'OFDM est que cette dernière autorise un fort recouvrement spectral entre les porteuses, ce qui permet d'augmenter sensiblement leur nombre ou d'amoinrir l'encombrement spectral. Cependant, pour que ce recouvrement n'ait pas d'effet, les porteuses doivent respecter une contrainte d'orthogonalité, à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. l'écart entre

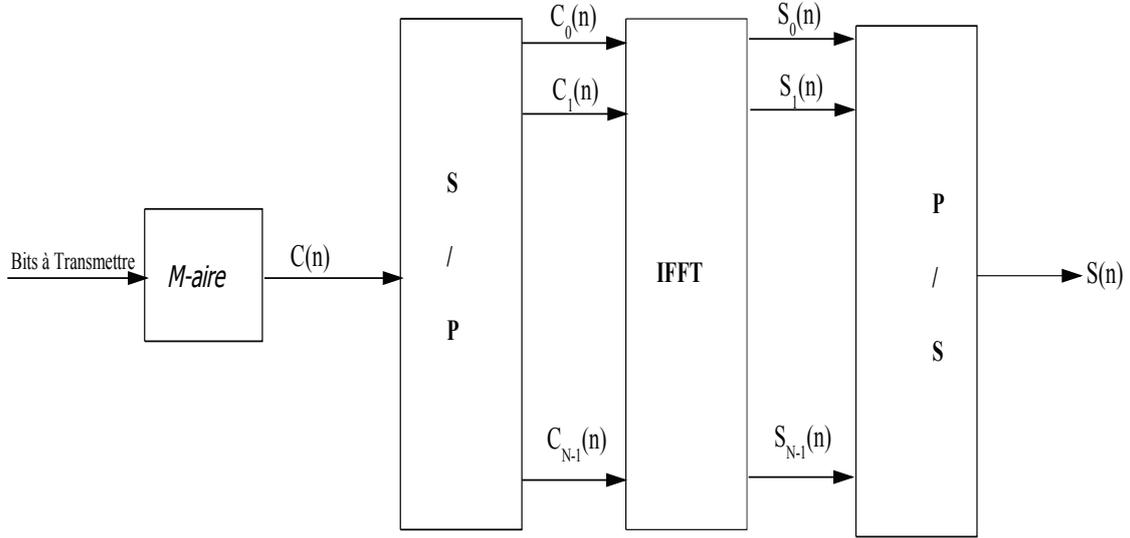


Figure III.10: Schéma de principe du modulateur OFDM numérique.

sous porteuse est donné par : $\Delta f = \frac{1}{T_N}$ (cf. Figure III.11).

En considérant tout d'abord le signal OFDM comme un simple multiplexage en fréquence, on peut l'écrire sous la forme :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi f_k t} g(t - nT_N) \quad (\text{III.46})$$

Où $g(t)$ la forme d'onde de la modulation et pour simplifier l'expression (III.46) on pose tout d'abord :

$$\psi_{n,k}(t) = g(t - nT_N) e^{2j\pi f_k t} \quad (\text{III.47})$$

Afin de discriminer les porteuses à la fois en temps et en fréquence, on impose la contrainte suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,k}(t) \psi_{m,l}^*(t) dt = E_\psi \delta_{m,n} \delta_{k,l} \quad (\text{III.48})$$

Où $E\psi$ est l'énergie de la fonction ψ et $\delta_{m,n}$ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Cette contrainte est une condition d'orthogonalité pour les fonctions $\psi_{n,k}(t)$. En choisissant judicieusement $g(t)$ et Δf , les fonctions $\psi_{n,k}(t)$ forment une base orthogonale de l'espace temps-fréquence, ce qui permet de retrouver facilement les symboles et autorise donc un recouvrement spectral sans perte de l'information.

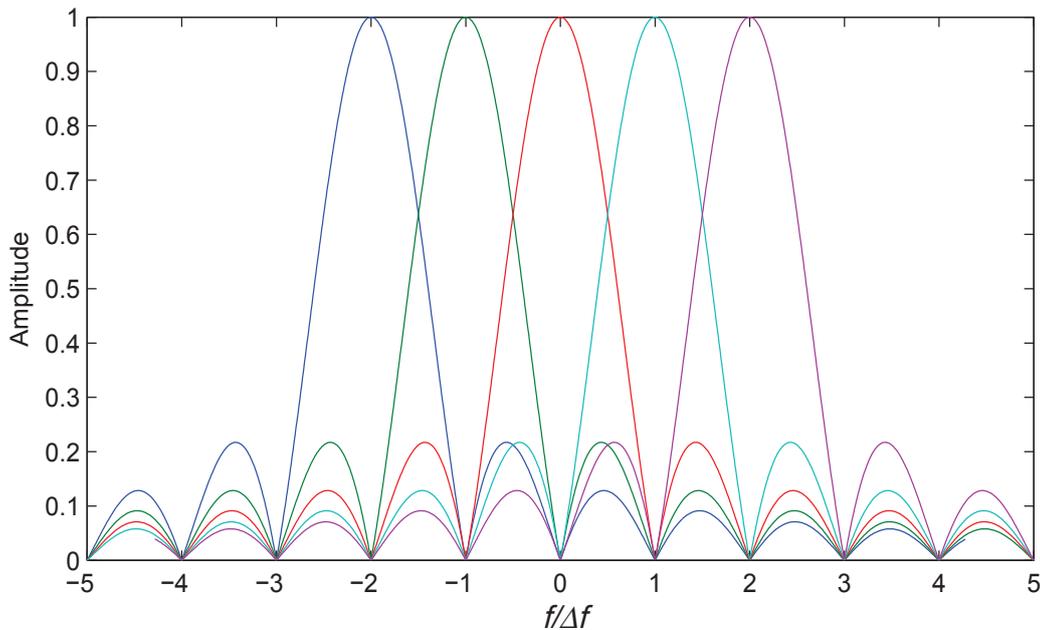


Figure III.11: Spectre en fréquence d'une trame OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes $N = 4$.

La démodulation consiste donc à effectuer une Transformée de Fourier Discrète directe (*TFD*). Le nombre de porteuses ayant été choisi tel que $N = 2^n$, on peut réaliser ce calcul à l'aide d'une FFT (*Fast Fourier Transform*). L'ensemble des fréquences f_0, f_1, \dots, f_{N-1} utilisé est dit orthogonal, car la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{T_N} \int_t^{t+T_N} e^{2j\pi f_k t} e^{-2j\pi f_p t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Cette relation garantit que chacune des sous-porteuses pourra être demodulée sans risque d'interférence avec les sous-porteuses adjacentes. La demodulation OFDM est l'opération duale de la modulation OFDM. A partir de la relation d'orthogonalité donnée par l'équation (III.50) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_N} \int_t^{t+T_N} S(u) e^{-2j\pi f_p t} dt &= \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(C_k \int_t^{t+T_N} e^{2j\pi f_k t} e^{-2j\pi f_p t} du \right) \\ &= C_p, \quad 0 \leq p \leq N-1 \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Ainsi, pour démoduler séparément la sous-porteuse d'indice p , il suffit de multiplier le signal reçu par l'exponentiel complexe $e^{-2j\pi f_p t}$ et d'intégrer le résultat sur une durée T_N . La répétition du procédé pour chacune des sous-porteuses de fréquence f_0, f_1, \dots, f_{N-1} permet de retrouver les éléments d'information initiaux C_0, C_1, \dots, C_{N-1} . Une transformée de Fourier rapide est utilisée pour récupérer les symboles d'information correspondant aux données utiles.

4.3 L'interférence entre symboles (IES)

Les signaux OFDM sont transmis à des intervalles égaux, et ils doivent parcourir un certain trajet pour atteindre le récepteur. Dans le cas d'un canal multi-trajets, un symbole transmis prend différents retards pour arriver au récepteur à cause des différents chemins de propagation, ce qui cause des étalements temporels. La prolongation de la durée des symboles fait chevaucher les symboles entre eux, ce qui donne naissance à l'interférence entre symboles (*IES*).

4.4 L'interférence entre porteuses (IEP)

L'orthogonalité dans un système OFDM signifie qu'au maximum de chaque spectre d'une sous-porteuse, tous les spectres des autres sous-porteuses sont nuls, et les spectres des sous-porteuses se recouvrent mais demeurent orthogonaux entre eux. L'interférence entre porteuses (*IEP*) est causée par la perte de l'orthogonalité et donc par la présence des symboles de données d'une sous-porteuse sur les sous-porteuses adjacentes.

4.5 L'intervalle de garde

Dans le but d'éviter l'utilisation d'égalisateurs de canaux et d'éviter la présence des interférences, il suffit d'ajouter un intervalle de garde entre deux symboles OFDM transmis successivement. Pour que cet intervalle de garde soit efficace, sa durée doit être au moins égale à la durée de l'étalement des retards non négligeable du canal. Ainsi, les derniers échos du premier symbole OFDM auront lieu durant cet intervalle, et le symbole OFDM suivant ne sera plus perturbé. Généralement l'intervalle de garde évite l'IES et il conserve l'orthogonalité des sous-porteuses seulement dans le cas où il est composé selon des derniers symboles de la trame OFDM. Dans ce cas, l'intervalle est appelé préfixe cyclique (*PC*). Par conséquent, l'égalisation au récepteur devient très simple. A partir de la figure III.12, la relation entre la durée de symbole (la durée utile) et l'intervalle de garde est donnée par la relation suivante :

$$T_{tot} = T_N + T_g \quad (\text{III.52})$$

Eviter IES et minimiser l'utilisation d'égalisation a un prix. Ce prix est l'exigence de transmettre plus d'énergie, puisque on doit envoyer N_S symbole au lieu de N . Mais il suffit de rendre la durée de symbole T_u beaucoup plus longue que la durée du préfixe cyclique T_g pour minimiser l'ajout d'énergie pour la transmission.

4.6 Avantages et inconvénients de l'OFDM

L'OFDM présente donc des avantages conséquents. Leur robustesse, leur efficacité et leur facilité d'égalisation en font une forme d'onde particulièrement utilisée aujourd'hui. Néanmoins, l'emploi de sous-porteuses multiples apporte également quelques inconvénients. En effet, la modulation est particulièrement sensible aux défauts de synchronisation ainsi qu'aux décalages en fréquence des sous-porteuses tout comme aux interférences entre symboles. Les forts niveaux en amplitude de l'enveloppe des signaux OFDM viennent également compliquer leur amplification linéaire ; et nécessite un recul important à l'entrée de l'amplificateur de puissance, à la défaveur de son rendement. Cette dynamique est souvent définie comme le rapport entre la puissance maximum et la puissance moyenne du signal (*PAPR : Peak to Average Power Ratio*). Tous ces

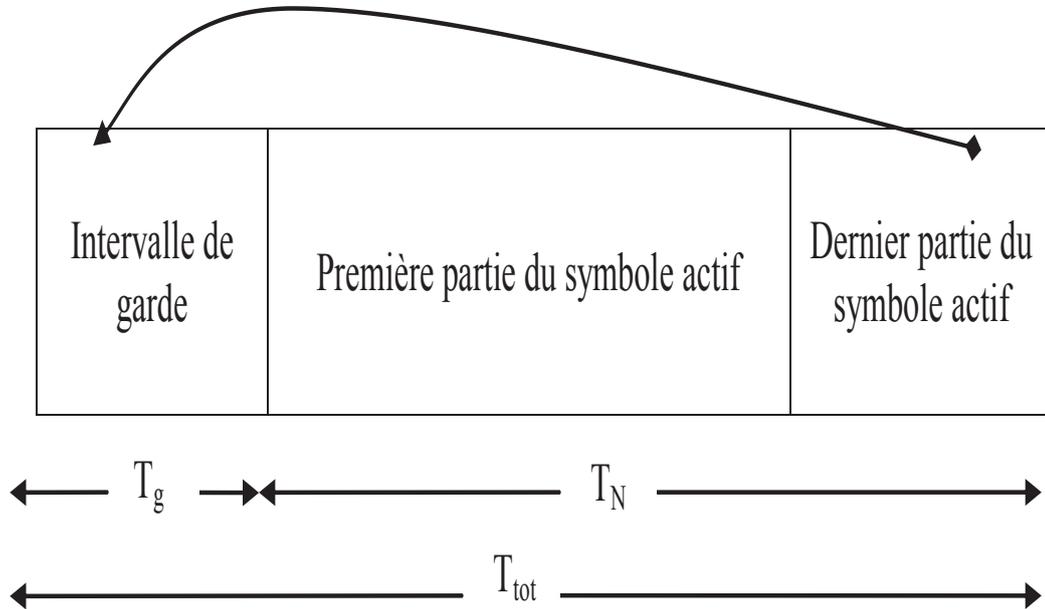


Figure III.12: Intervalle de garde pour un système OFDM.

paramètres tendent à diminuer la performance de la transmission.

4.7 Accès multiple OFDMA

Dans la technique OFDMA (Orthogonal Frequency-Division Multiple Access), chaque utilisateur alloue une partie des sous-porteuses à chaque symbole OFDM³, éliminant de ce fait les Interférences Intra Cellulaires (*ICI*). Cela a pour conséquence directe un décodage facile de l'OFDMA par l'utilisateur. Une telle simplicité est particulièrement intéressante pour les opérations descendantes, lorsque la puissance de traitement est limitée par les terminaux utilisateurs par exemple. Nous pouvons aussi associer à l'utilisateur un intervalle de temps durant lequel toutes les sous-porteuses lui sont allouées⁴. Nous supposons que la durée de chaque intervalle de temps est égale à la durée d'un symbole OFDM. La modulation porte sur toutes les sous-porteuses suivant les conditions du canal. Si on résume l'OFDMA est une technique hybride entre l'OFDM, le TDMA et le FDMA. Dans un même symbole OFDM, plusieurs utilisateurs

3. On parle de la technique OFDM – FDMA

4. On parle de la technique OFDM – TDMA

reçoivent des parties distinctes de la bande fréquentielle.

5 Exercices

Exercice

5.1

Considérons un système FDMA pour les utilisateurs de données multimédia. Le format de modulation nécessite $10MHz$ de spectre, et des bandes de garde de $1MHz$ sont requises de chaque côté du spectre attribué pour minimiser les perturbations hors bande.

- Quelle est la bande passante totale nécessaire pour prendre en charge 100 utilisateurs simultanés dans ce système ?

Exercice

5.2

Dans un système type GSM, une trame est composée de huit intervalles de temps ITs, chaque IT contient 156,25 bits, et les données sont transmises à $270,833kbit/s$.

1. Calculer la durée d'un bit.
2. Calculer la durée d'un time slot.
3. Calculer la durée d'une Multitrames₂₆ TDMA.

Exercice

5.3

On considère un système UMTS (liaison WCDMA montante), les utilisateurs transmettent l'information avec un débit de $15kbit/s$. Le E_b/I_0 (l'énergie de bit / l'énergie d'interférence) requis afin d'atteindre une performance suffisante est de $5dB$.

1. Quel est le gain d'étalement (G-étalement) ?
2. Donner l'expression d'énergie de bit E_b en fonction de S et W , sachant que S c'est la puissance minimale à la réception de chaque utilisateur et W c'est la largeur de signal en bande de base.
3. Donner l'expression d'énergie d'interférence I_0 en fonction de I et B , sachant que I c'est la puissance d'interférences à la réception et B c'est la largeur de signal en large de bande.
4. Donner la relation entre I et S en fonction du nombre d'utilisateurs K ? et on déduit le nombre d'utilisateurs qui peuvent être reçu avec

des performances suffisantes ?

**Exercice
5.4**

Soit la liaison montante d'un système CDMA avec deux utilisateurs synchrones reçus :

- L'utilisateur User 1 étale son signal bipolaire $d_1 = \{-1, +1\}$ par la séquence d'étalement

$$C_1 = [-1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1]$$

- L'utilisateur User 2 étale son signal bipolaire $d_2 = \{-1, +1\}$ par la séquence d'étalement

$$C_2 = [+1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1]$$

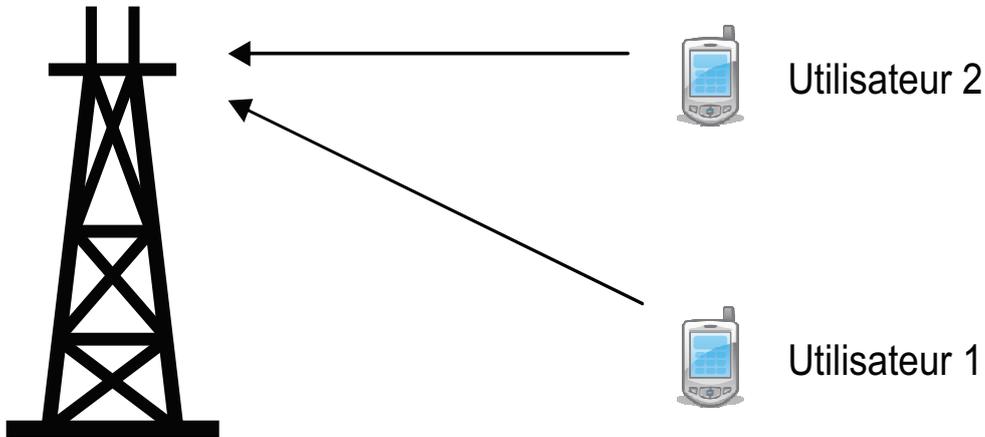
- Les valeurs reçues pour le premier bit est : $y = [0 \ 0 \ -2 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

1. Donner le facteur d'étalement, et le gain d'étalement en dB ?
2. Les codes sont mutuellement orthogonaux ?
3. Effectuer l'opération désétalement pour le premier bit de l'utilisateur
 1. Quel est le bitestimé ?
4. Effectuer l'opération désétalement pour le premier bit de l'utilisateur
 2. Quel est le bitestimé ?
5. Quel serait le SNR si la distorsion subite par l'utilisateur 1 est un bruit thermique (au lieu l'utilisateur de 2 avec la même puissance ?
6. Pourquoi on trouve une différence entre les valeurs de SNR et de SIR ? quel sera l'intervalle possible pour les valeurs de SIR

**Exercice
5.5**

On considère un système UMTS (liaison WCDMA montante), 15 utilisateurs transmettent l'information avec un débit de $12,2\text{kbps}$. Le E_b/N_0 requis afin d'atteindre une performance suffisante est de 6dB . Tous les utilisateurs sont reçus avec une puissance de 1mW . Le bruit additif gaussien à la réception est 5mW

1. Déterminer le rapport de signal sur l'interférence à la réception SIR



2. Quel est-le gain d'étalement (G-étalement) ?
3. Es-ce-que La valeur d' E_b/N_0 est suffisante, pour une bonne transmission ?
4. Quelle est la puissance minimale à la réception de chaque utilisateur pour que l' E_b/N_0 requis soit garanti ?
5. Quel est le nombre maximum d'utilisateurs qui peuvent être reçu avec des performances suffisantes ?

Exercice

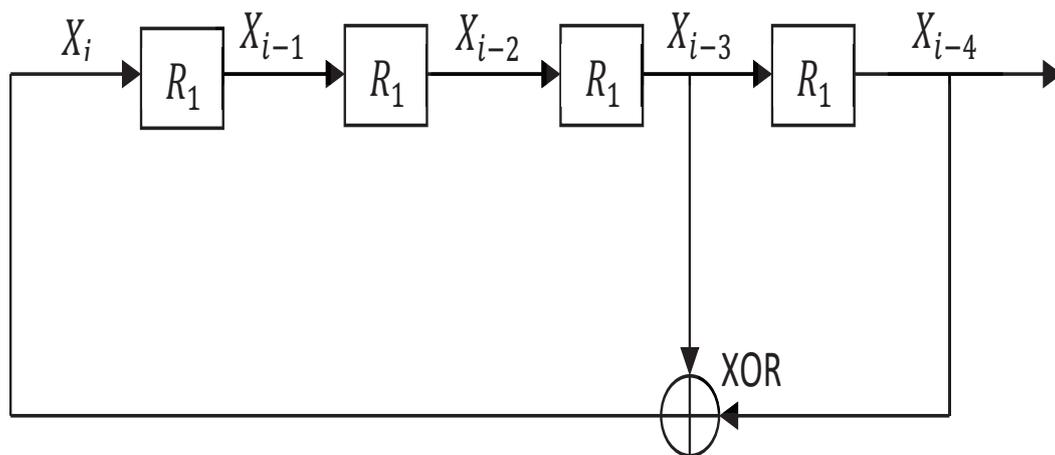
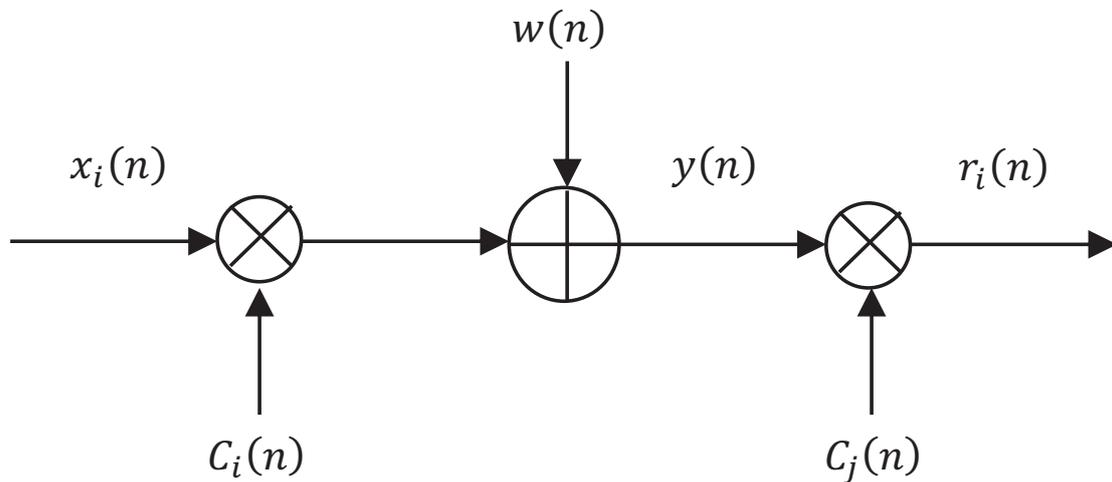
5.6

Soit le système CDMA de figure suivante avec $x_i(n)$ le signal émis, $y(n)$ le signal reçu, $C_i(n)$ la séquence d'étalement à l'émission, $C_j(n)$ est la séquence d'étalement à la réception et $w(n)$ le bruit additif AWGN.

Donner le rôle de registre LFSR de la figure ci-dessous dans les systèmes CDMA.

1. Développer l'expression de $r_i(n)$ avec N la longueur de la séquence.
2. Identifier la partie signal, la partie bruit et la partie interférence (MUI) dans l'expression de $r_i(n)$.
3. Trouver le nombre de codes générés par ce registre
4. Tracer le tableau correspondant ^a.
5. Dédire les différents codes.

a. Pour le tableau, on commence par l'état tous 1



Exercice

5.7

On considère un signal binaire $x(t)$ à transmettre par étalement de spectre. Ses deux niveaux sont codés sur $+1V$ pour 0 et sur $-1V$ pour 1. On mesure $x(t)$ pendant un certain temps et on trouve $+1V$ pour $t \in [0, T]$ et $-1V$ pour $t \in]T, 2T]$.

On veut utiliser la séquence $g(t) = 01011$ alliée à une constellation BPSK pour la transmission afin d'effectuer un étalement de spectre par séquençage direct de $x(t)$. On appelle $b(t)$ la séquence binaire obtenue après séquençage, $p(t)$ la phase résultante de la porteuse, $d(t)$ le saut de phase déduit du code $g(t)$ au

récepteur, $\hat{p}(t)$ la phase après déséquencage, et $\hat{x}(t)$ les données démodulées.

1. Quelle sera la durée T_c d'un chip ?
2. Représenter sur un même schéma $x(t)$, $g(t)$, $b(t)$, $p(t)$, $d(t)$, $\hat{p}(t)$ et $\hat{x}(t)$.
3. Quel est le gain du DS (étalement du spectre) dans ce cas ?

Exercice

5.8

Considérons un système DS-CDMA occupant 10 MHz de spectre. Supposons un système à interférences limitées avec un gain d'étalement de $G = 100$ et une inter-corrélation de codes $1/G$.

1. Pour le MAC, trouver une formule pour le *SIR* du signal reçu en fonction de G et du nombre des utilisateurs K . Supposons que tous les utilisateurs transmettent à la même puissance et qu'il existe un contrôle parfait de la puissance.
2. Basant sur la formule de SIR, rechercher le nombre maximal d'utilisateurs K pouvant être pris en charge. dans le système, en supposant une modulation BPSK avec un BER de 10^{-3} . Dans votre calcul de BER, vous pouvez traiter les interférences MAI comme un bruit AWGN. Comparer ce nombre K avec le nombre maximum d'utilisateurs dans un système FDMA avec la même largeur de bande totale et la même largeur de bande de signal d'information ?
3. Modifier la formule SIR dans la question (1) afin d'inclure l'effet de l'activité vocale, défini comme le pourcentage de temps que les utilisateurs parlent, de sorte que les interférences sont multipliées par ce pourcentage. Trouver également le facteur d'activité vocale tel que le système CDMA accepte le même nombre d'utilisateurs qu'un système FDMA. Est-ce une valeur raisonnable pour l'activité vocale ?

Exercice

5.9

Considérons un système DS-CDMA à 3 utilisateurs avec des séquences d'étalement courtes données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= [1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1]^T \\ \mathbf{c}_2 &= [1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]^T \\ \mathbf{c}_3 &= [1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1]^T \end{aligned}$$

où \mathbf{c}_k désigne la séquence d'étalement de l'utilisateur k

1. En supposant un système synchrone, calculer la résistance proche-lointaine (near/far) pour chaque utilisateur, en supposant un détecteur décorrélateur au niveau du récepteur. Exprimer l'amélioration du bruit dans chaque cas en dB .
2. En supposant que tous les utilisateurs soient reçus à puissance égale, trouver la probabilité d'erreur pour l'utilisateur **1** avec une réception de filtre conventionnel en supposant une modulation BPSK avec E_b/N_0 de $15dB$. Comparer avec la probabilité d'erreur lorsque un détecteur décorrélateur est implémenté au niveau du récepteur
3. Répéter (2), cette fois en supposant que les utilisateurs **2** et **3** sont $10dB$ plus puissant que l'utilisateur **1**.
4. Répéter (1), considérons maintenant un système asynchrone sur un symbole, dans lequel l'utilisateur **2** est retardé par rapport à l'utilisateur **1** par **2** chips, alors que l'utilisateur **3** reste synchronisé avec l'utilisateur **1**.

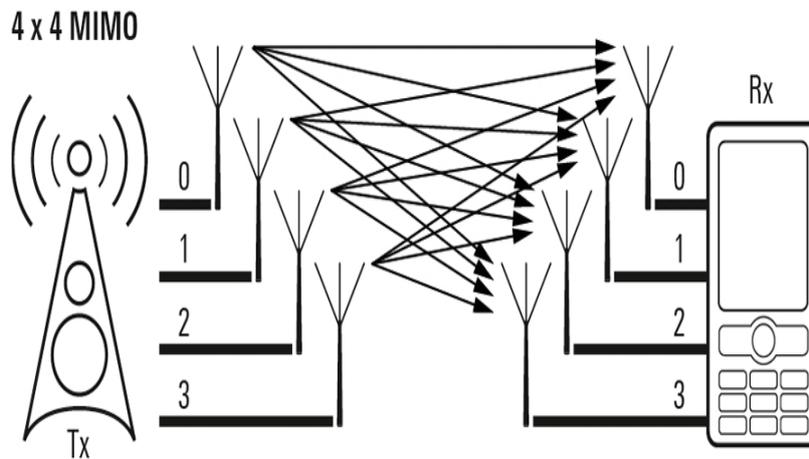
Exercice
5.10

On multiplexe maintenant $N = 512 = 2^9$ sous-porteuses par la technique OFDM, avec un écart entre sous-porteuses $\Delta f = 20kHz$ (inverse de $50\mu sec$), et un préfixe cyclique de durée $T_g = T_N/8$, la durée globale du symbole OFDM étant $T_{tot} = T_N + T_g = (9/8) \times T_N$.

1. Calculer les valeurs (exactes en μsec) de T_{tot} , T_g et T_N ?
2. Le système est-il affecté d'IES ? d'IEP (interférence entre porteuses) ? (justifier)
3. Quelle est la valeur de la bande B totale (en MHz) ?
4. Rappeler de combien d'échantillons discrets (pas $T_c = 1/B$) sera

constitué un symbole OFDM(durée T_{tot}), et préciser le nombre d'échantillons du Préfixe Cyclique.

5. Donner l'expression numérique exacte (produit de nombres) puis un ordre de grandeur du Débitsymbole global véhiculé par le système OFDM (ensemble des sous-porteuses).
6. Préciser l'expression du coefficient multiplicatif $H_k[m]$ qui pondère le symbole utile $\hat{s}_k[m]$ ensortie de la sous-porteuses numéro k de la Transformée de Fourier Discrète à la réception.
7. Préciser la loi de probabilité (ainsi que sa moyenne) du coefficient $H_k[m]$.
8. Les coefficients $H_k[m]$ et $H_j[m]$ de deux sous-porteuses d'indices respectifs k et j sont-ils corrélés (préciser éventuellement selon la valeur de la différence $k - j$) ?



Systèmes MIMO

1. Diversité à l'émission et à la réception
2. Diversité à la réception
3. Diversité à l'émission
4. Codage spatio-temporel
5. Multiplexage spatial
6. Démodulation conjointe
7. Multi-utilisateurs MIMO
8. Exercices

Chapitre IV

Systèmes MIMO

DANS un système mono–antenne, l’augmentation de la taille de la modulation ou de la bande de fréquence utilisée sont les seules solutions pour augmenter le débit de données, avec tous les problèmes de complexité ou d’encombrement que cela entraîne. Partant du point de vue de la théorie de l’information, deux membres des laboratoires de recherche Bell, Telatar et Foschini , ont parallèlement et indépendamment montré que la capacité des systèmes d’antennes multiples en émission et en réception (Multiple Input Multiple Output :MIMO) augmentait linéairement avec le nombre d’antennes émettrices, dépassant de manière significative la limite théorique de Shannon. La capacité des systèmes multi–antennes à résister aux évanouissements et aux interférences constitue par ailleurs un avantage supplémentaire garanti.

Les systèmes d’antennes multiples, dont un exemple est présenté en figure [IV.1](#), sont d’un intérêt certain lorsqu’on les compare à des systèmes classiques ; en effet si l’espacement est suffisant entre les antennes , de manière général si elle sont distantes les unes des autres d’au moins une demi longueur d’onde , les canaux liant les antennes d’émission aux antennes de réception peuvent être considérés comme indépendants les uns des autres , les observations au niveau des différentes antennes de réception étant donc totalement dé–corrélées.

Afin de rendre plus compréhensible la modélisation des systèmes multi–antennaires, le nombre d’antennes sera limité, ici, à deux antennes à l’émission pour le système plusieurs entrées une seule sortie ou la diversité à l’émission MISO (Multiple input–Single output), et à deux antennes à la réception pour le système une seule entrée–plusieurs sorties ou la diversité à

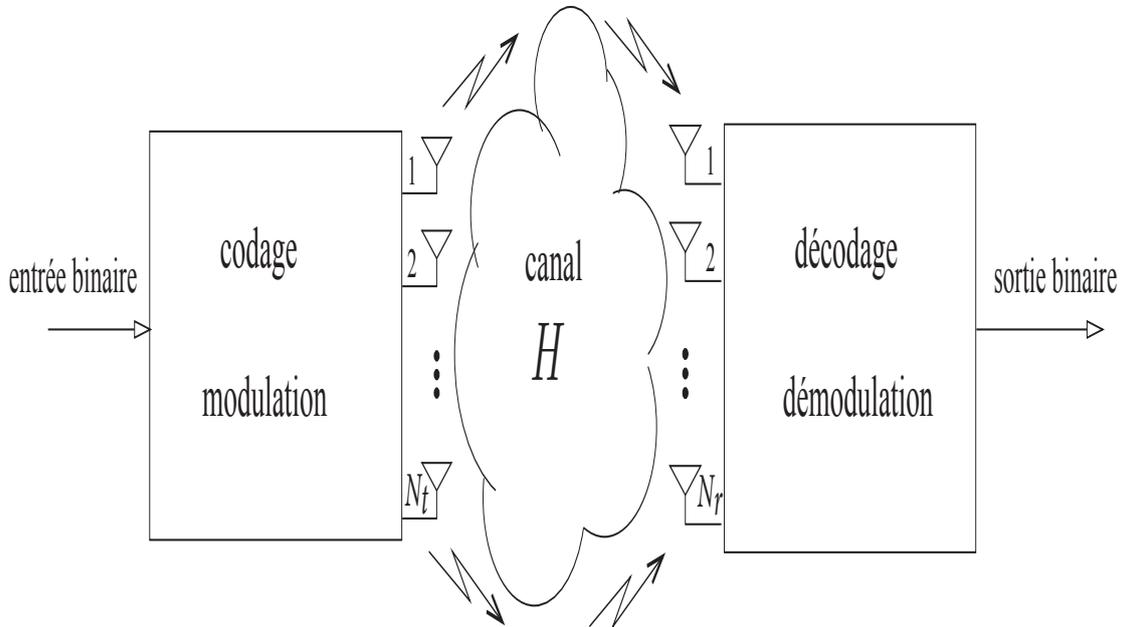


Figure IV.1: Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal.

la réception SIMO (Single input–Multiple output), le principe étant identique pour un nombre d’antennes plus important.

1 Diversité à l’émission et à la réception

Considérons un système MIMO avec N_r récepteurs et N_t émetteurs. Nous supposons que la bande de fréquence utilisée pour la transmission est assez étroite pour que le canal soit non sélectif en fréquence. Chaque trajet entre une antenne émettrice et une antenne réceptrice peut alors être caractérisé par un gain complexe $h_{j,i}$ représentant le coefficient d’évanouissement entre le $j^{\text{ième}}$ émetteur et le $j^{\text{ième}}$ récepteur (cf. Figure IV.2). A la réception, chaque antenne reçoit la somme des symboles s_i transmis simultanément par chacune des N_t antennes émettrices. Le signal r_j reçu par la $j^{\text{ième}}$ antenne peut par conséquent s’écrire de la manière discrète suivante :

$$r_j = \sum_{i=1}^{N_t} h_{j,i} s_i + w_j \quad (\text{IV.1})$$

où w_j représente un échantillon du bruit qui perturbe le signal, généralement considéré comme de type AWGN. Si nous considérons à présent l'ensemble des symboles reçus simultanément par les antennes, le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (\text{IV.2})$$

Avec :

\mathbf{r} : représente le vecteur de réception tel que $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$.

\mathbf{s} : représente le vecteur de transmission tel que $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$.

\mathbf{w} : représente le vecteur bruit tel que $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$.

\mathbf{H} : représente la matrice du canal tel que $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ définie par l'ensemble des trajets :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1N_t} \\ h_{21} & \cdots & h_{2N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r 1} & \cdots & h_{N_r N_t} \end{bmatrix}$$

Il est à noter que le bruit considéré est un bruit blanc gaussien complexe de moyenne nulle et de matrice de covariance notée R_n , définie comme suit :

$$R_n = \text{E} [w w^H] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_r} \quad (\text{IV.3})$$

telque :

$\text{E} [\]$: représente l'opérateur espérance mathématique.

$[\]^H$: indique la transposée conjuguée de $[\]$.

σ_n^2 : représente la variance du bruit blanc gaussien complexe.

\mathbf{I}_{N_r} : représente la matrice identité de taille $N_r \times N_r$. L'équation (IV.3) traduit le fait que les composants du vecteur bruit sont décorrélés.

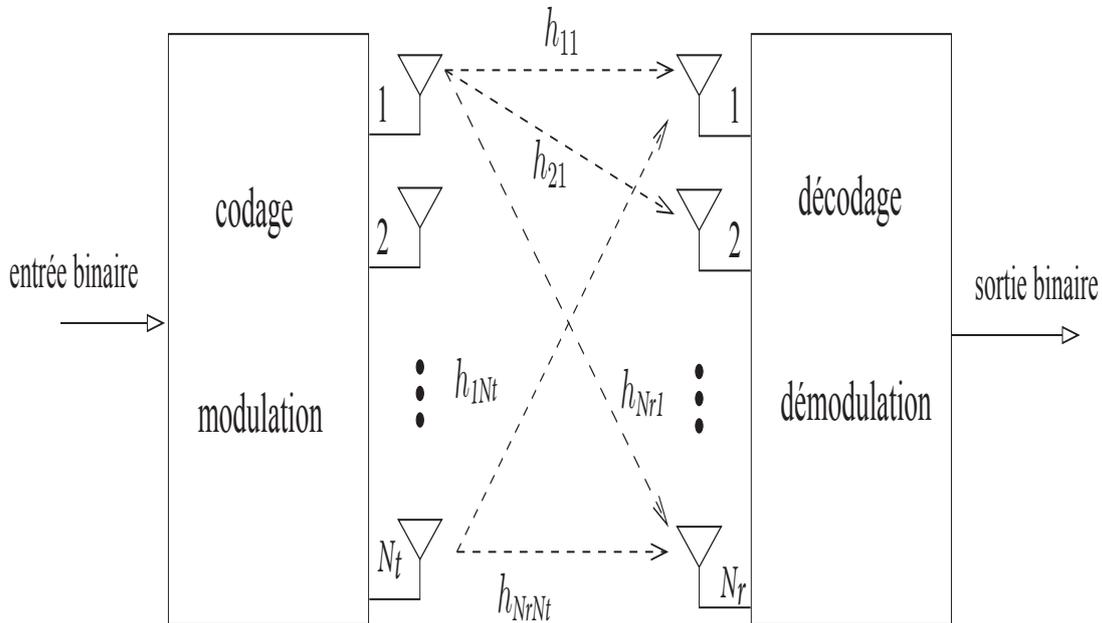


Figure IV.2: Schéma d'un système de transmission sans fil type MIMO.

Théorème

2

capacité du système MIMO

Pour un système MIMO à N_t antennes d'émission et N_r antennes de réception transmettant des signaux indépendants et de puissance également répartie $\frac{P}{N_t}$ (P la puissance totale transmise), la capacité normalisée par la bande utile est donnée par la formule :

$$C_{MIMO} = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_r} + \frac{\rho}{N_t} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right] \quad (\text{IV.4})$$

Avec $\rho = \frac{P}{N_0 B}$ représente le SNR en réception. Foschini et Telatar ont démontré tous les deux que la capacité donnée par (IV.4) augmente linéairement avec $m = \min(N_r, N_t)$ contrairement à une croissance logarithmique du système MISO et SIMO (Figure IV.3).

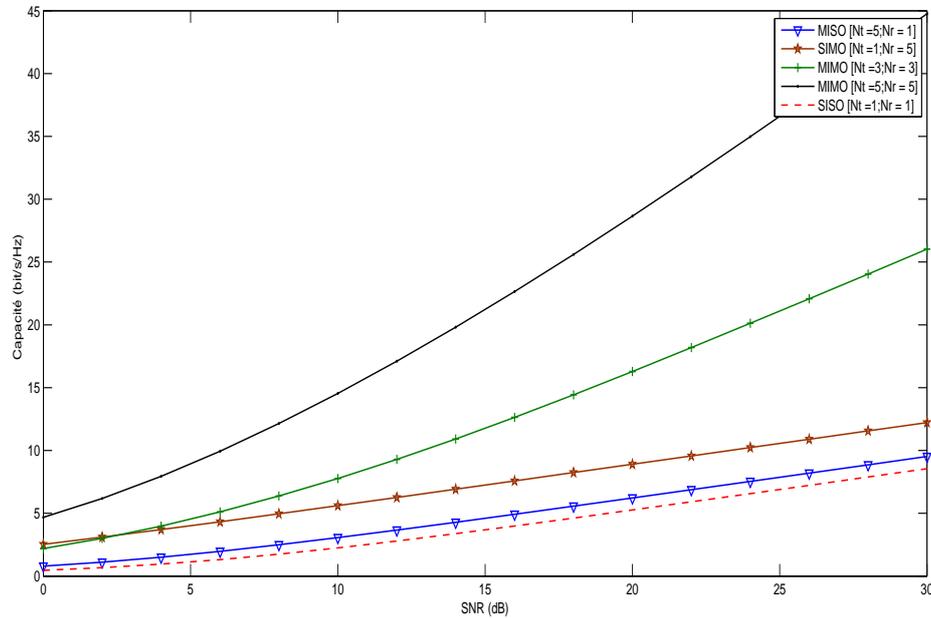


Figure IV.3: Capacité des systèmes MIMO par rapport aux systèmes SISO et SIMO..

2 Diversité à la réception

Les systèmes SIMO, N_r antennes sont utilisées aux récepteurs afin d'obtenir les différentes copies du signal transmis qui seront ensuite convenablement combinées pour lutter les dégradations apportées par les évanouissements du canal (cf. Figure IV.4). Un système SIMO peut être modélisé par un nombre d'équations égal au nombre d'antennes en réception :

$$\begin{aligned} r_1 &= h_{11}s + w_1 \\ r_2 &= h_{21}s + w_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Le système SIMO peut être décrit sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Ou simplement comme :

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}s + \mathbf{w} \quad (\text{IV.7})$$

Avec :

\mathbf{r} : représente le vecteur de réception tel que $r \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$.

s : le symbole complexe transmis.

\mathbf{h} : représente le vecteur du canal tel que $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$

\mathbf{w} : représente le vecteur bruit tel que $w \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$.

Une combinaison linéaire de l'équation (IV.5) donne :

$$r = g_1 r_1 + g_2 r_2 = (g_1 h_{11} + g_2 h_{21}) s + g_1 w_1 + g_2 w_2$$

Où g_1 et g_2 sont des gains complexes en réception, une solution possible pour affecter des valeurs à g_1 et g_2 est d'utiliser le combineur à taux maximal MRC (Maximum Ratio Combiner), alors $g_1 = h_{11}^*$ et $g_2 = h_{21}^*$.

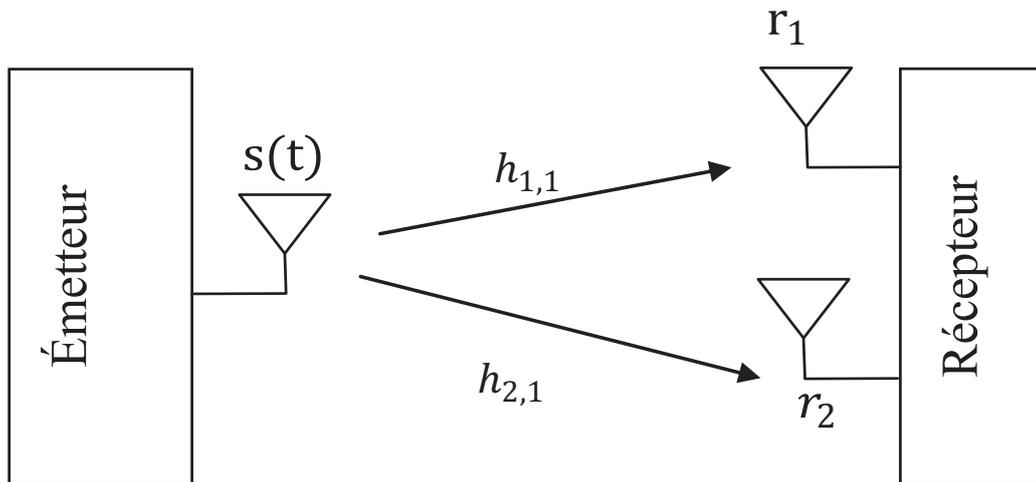


Figure IV.4: Schéma d'un système de transmission sans fil type SIMO.

Théorème

3

capacité du système SIMO

cette capacité normalisée par la bande utile est donnée par la formule :

$$C_{SIMO} = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{1} + \rho \sum_{j=1}^{N_r} |h_j|^2 \right) \right] \quad (\text{IV.8})$$

Avec h_j représente le coefficient de canal entre l'antenne d'émission et les antennes de réception j . Nous observons une croissance linéaire de N_r apporte une croissance logarithmique de la capacité.(cf. Figure IV.3).

3 Diversité à l'émission

Les systèmes MISO consistent à n'employer qu'une seule antenne en réception et N_t antennes en émission (cf. Figure IV.5). La diversité en émission exploite de multiples antennes au niveau de l'émetteur pour introduire la diversité, en transmettant des versions redondantes du même signal sur plusieurs antennes. Ce type de technique MIMO utilise une méthode de codage spatio-temporel en bloc STBC (Space Time Block Coding) et sera traité ultérieurement. Nous pouvons modéliser ce système par équation suivante :

$$r = g_1 r_1 + g_2 r_2 = g_1 h_{11} s_1 + g_2 h_{12} s_1 + w \quad (\text{IV.9})$$

Les coefficients g_1 et g_2 peuvent être choisis pour compenser l'atténuation du canal. Pour cela l'émetteur effectue une pré-égalisation grâce à la connaissance du canal à l'aide d'un retour d'information du récepteur vers l'émetteur. Une solution possible pour affecter des valeurs à g_1 et g_2 est d'utiliser le MRT (Maximum Ratio Transmitter), nous avons alors $g_1 = h_{11}^*$ et $g_2 = h_{12}^*$.

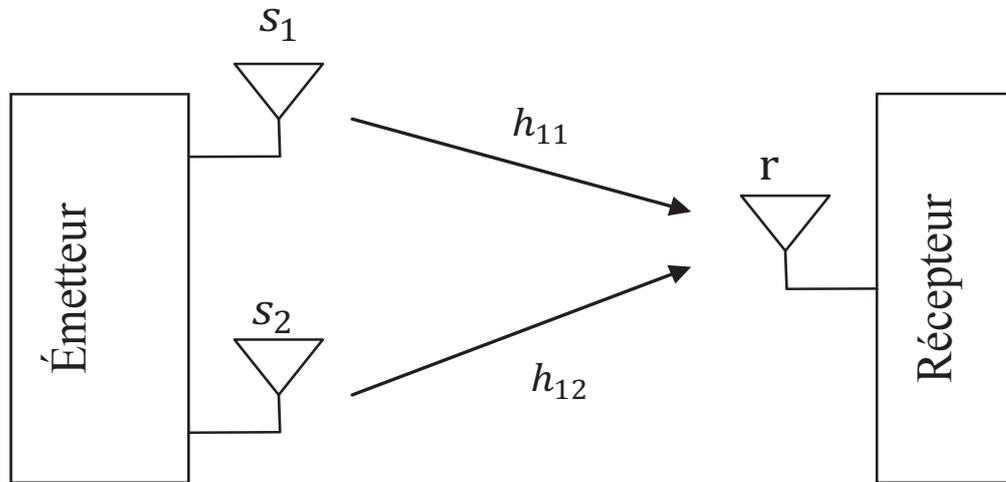


Figure IV.5: Schéma d'un système de transmission sans fil type MISO.

Théorème

4

capacité du système MISO

cette capacité normalisée par la bande utile est donnée par la formule :

$$C_{MISO} = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{1} + \frac{\rho}{Nt} \sum_{j=1}^{Nt} |h_i|^2 \right) \right] \quad (\text{IV.10})$$

Avec h_j représente le coefficient de canal entre l'antenne de réception et les antennes d'émissions i . La division par Nt sert garder la puissance totale en émission constante. Nous remarquons dans ce cas aussi une dépendance logarithmique du nombre d'antennes N_t . (Figure IV.3).

Lors de l'implémentation des systèmes MIMO, et afin d'améliorer l'efficacité spectrale, des approches différentes ont été proposées. La plus classique consiste à utiliser des antennes multiples à la réception et d'appliquer un combineur à taux maximal (MRC) aux signaux reçus. Mais, cette approche présente l'inconvénient d'augmenter la complexité du récepteur. D'autre part nous trouvons des techniques appelés « multiplexage spatial » et « diversité spatiale ». La première a pour but d'augmenter la capacité, alors que la seconde s'attache à minimiser le BER.

4 Codage spatio–temporel

La diversité spatiale est une technique adaptée pour lutter les effets destructeurs des canaux sélectifs. L'approche est différente des structures à multiplexage spatial, puisque l'on essaie ici de produire sur chaque antenne d'émission, différentes répliques d'escalées du flux d'information à émettre afin qu'elles subissent des événements différents et qu'elles résistent aux perturbations du canal. Dans cette catégorie, nous trouvons les codes temps – espaces codés en bloc, ou STBC (Space – Time Bloc Coding) d'Alamouti et les codes temps – espaces en treillis STTC (Space Time Trellis Code) introduit par Tarokh et *al* qui combine les avantages de la diversité spatiale avec ceux du codage en treillis. la figure IV.6 présente les différentes familles de codes.

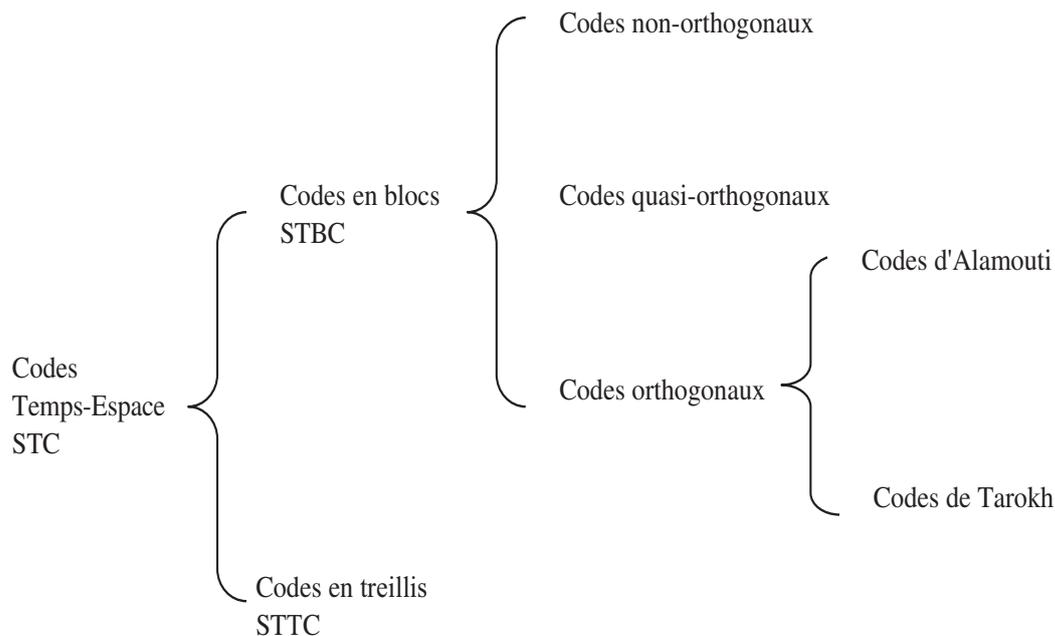


Figure IV.6: Les familles de codes temps-espace.

Les codes en blocs se divisent en plusieurs groupes, jouant sur l'orthogonalité des données transmises par les antennes. Car la superposition des données sur chaque antenne de réception corrompt les données originales ; un codage particulier permettant au récepteur de les séparer facilement est qualifié d'orthogonal. Ce qualificatif donne son nom à un des groupes des codes STBC : les OSTBC (Orthogonal STBC). Les autres groupes sont alors qualifiés de codes STBC quasi–orthogonaux ou simplement de STBC s'il n'y a pas d'orthogonalité. Du point de vue sys-

tème, les STC insèrent de la redondance dans le débit symbole et diminuent donc le débit utile. On parle alors du débit de codage spatio-temporel $D_c = \frac{k}{T}$ est égal au nombre moyen de symboles transmis k durant T slots de temps. L'ordre de diversité est égal au nombre de répliques indépendants reçues des symboles transmis. De plus, il dépend également du nombre d'antennes mis en jeu à l'émission et à la réception. Nous voulons toujours atteindre le maximum de diversité avec le nombre d'antennes le plus réduit. Le gain de codage est le gain fourni par le système de codage par rapport à un système non-codé.

4.1 Codes spatio-temporels en treillis

Les codes spatio-temporels en treillis STTC offrent à la fois un gain de diversité qui peut être maximal et un gain de codage défini entre autres par le nombre de bascules contenu dans le codeur. Leur rendement est unitaire puisque les symboles transmis simultanément à partir de plusieurs antennes ont été construits à partir des mêmes bits d'informations présents à l'entrée d'un codeur non systématique, i.e. sans rajout de bits de redondance. Les bits d'information sont donc codés en temps et en espace.

Le fonctionnement du codeur est relativement simple et peut être résumé comme suit :

- ϕ_k représente l'état du treillis à l'instant k et par conséquent l'état suivant est noté ϕ_{k+1} .
- Considérons que le treillis est à l'état initial $\phi_k = 0$.
- L'état suivant du treillis dépend des bits d'information à coder. Ainsi, si les deux bits à coder sont 11, alors l'état suivant prend la valeur décimale équivalente c'est-à-dire $\phi_{k+1} = 3$.
- Les symboles à droite du treillis sont les codes associés à chaque doublet d'éléments binaires entrants. Dans l'exemple de la figure IV.7 ($\phi_k = 0$ et $\phi_{k+1} = 3$) le doublet à la sortie du codeur est donc 30 (3 sur la première antenne et 0 sur la seconde). Ces symboles sont alors mis en forme par la modulation QPSK avant l'émission par leur antenne respective .

Par exemple si nous voulons transmettre la séquence {10 01 11 00 01}, correspondant aux symboles QPSK {2 1 3 0 1} il faut alors transmettre :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le décodage d'un code en treillis se fait par l'algorithme de Viterbi. La complexité de cet algorithme est exponentielle en fonction du nombre d'états du codeur, le nombre d'antennes à l'émission et l'ordre de la modulation, ce qui rend les codes en treillis peu pratiques.

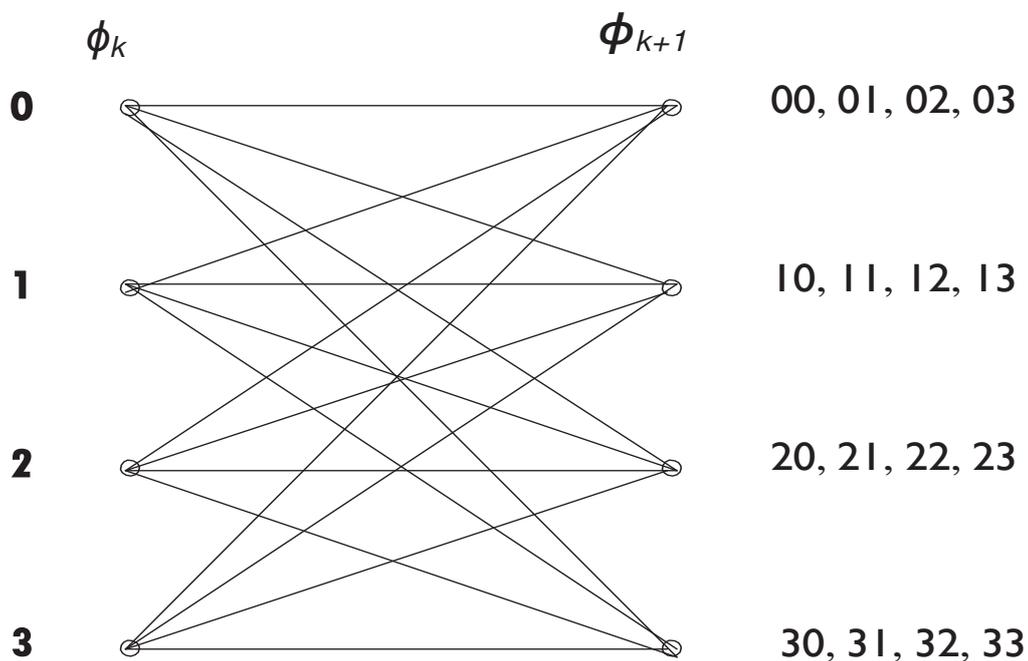


Figure IV.7: Diagramme de treillis pour un STTC à 4 états utilisant $N_t = 2$ et une modulation QPSK.

4.2 Codes spatio-temporels par blocs

En cherchant à réduire la complexité de décodage pour STBC, Alamouti a découvert une technique de transmission utilisant deux antennes à l'émission et une seule antenne à la réception (cf. Figure IV.8). De plus, le code proposé a des propriétés intéressantes d'être à diversité spatiale maximale et d'avoir un rendement de codage $R_c = 1$. Cette technique a été ensuite généralisée par Tarokh pour un nombre quelconque d'antennes et pour des codes non-orthogonaux.

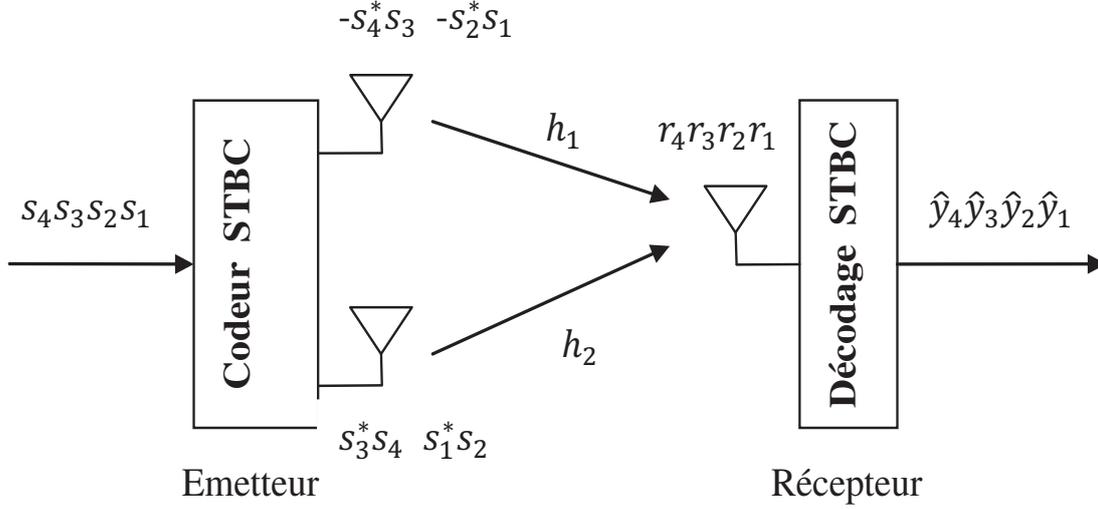


Figure IV.8: Le codage spatio-temporel d'Alamouti.

Le principe de codage d'Alamouti est de regrouper les symboles à transmettre par paire (s_1, s_2) et les placer dans le mot de code carré X tel que :

$$X = \begin{matrix} \xrightarrow{T} \\ \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \end{matrix} \downarrow N_t \quad (\text{IV.11})$$

Les antennes à la réception captent successivement deux signaux suivants :

$$\begin{aligned} r_1 &= h_1 s_1 + h_2 s_2 + w_1 \\ r_2 &= -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + w_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

où w_1 et w_2 représentent le bruit AWGN complexe sur deux périodes symbole successives et h_1 et h_2 sont les coefficients des canaux entre les antennes d'émission et l'antenne de réception, le mot de code reçu s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

En remarquant que

$$r_2^* = h_2^* s_1 - h_1^* s_2 + w_2^* \quad (\text{IV.14})$$

Nous pouvons introduire le nouveau mot de code en réception \acute{r} qui fait intervenir $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{\acute{r}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} h_2 \\ -h_1^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que :

$$\mathbf{C}_1^H \mathbf{C}_2 = h_1^* h_2 - h_2 h_1^* = 0 \quad (\text{IV.16})$$

De l'équation (IV.16), il est clair que les colonnes de la matrice du canal \mathbf{C} sont orthogonales. À partir de là, nous en déduisons d'une part, que le code Alamouti appartient à une classe spéciale de STBC nommée OSTBC et d'autre part, la matrice \mathbf{C} peut être utilisée comme Beamformer pour le décodage. Nous supposons le récepteur à l'information parfaite sur le canal (CSI) ; c'est – à dire, le récepteur peut mesurer et déterminer h_1 et h_2 , nous pouvons facilement trouver les symboles estimés en multipliant l'équation (IV.15) par \mathbf{C}^H , on aura comme premier membre de l'équation résultante :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}^H \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}^H \mathbf{C} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \mathbf{C}^H \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix} & \text{(IV.17)} \\
 \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^* & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix} \\
 \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Comme les coefficients h_1 et h_2 , sont décorrélés, les bruits additifs v_1 et v_2 restent décorrélés (gaussien de moyenne nulle et de covariance ρN_0). Ainsi, les y_1, y_2 estimés sont proportionnels aux valeurs de s_1, s_2 (en présence des termes additives de bruit AWGN), et toutes variations de phase qui pourraient se produire dans le canal n'ont aucun effet sur les signaux estimés. Lorsque le récepteur possède plusieurs antennes, il suffit de faire un MRC en calculant la moyenne des \hat{y}_j , calculés sur chaque antenne réceptrice $j = 1, 2, \dots, N_r$. Par rapport à une transmission mono-antenne SISO (Single Input Single Output), le rapport signal à bruit pour chaque symbole est égal à $(|h_1|^2 + |h_2|^2) \times E_s/N_0$.

5 Multiplexage spatial

Contrairement aux codes spatio-temporels, dont l'efficacité spectrale est limitée par le codeur utilisé, la capacité des systèmes spatio-temporel par couches (LST), formées par un multiplexage initial (cf. Figure IV.9), croît linéairement avec le nombre d'antennes émettrices, et le BER décroît exponentiellement si l'on utilise un détecteur optimal (maximum de vraisemblance). L'avenir des communications numériques réside sans doute dans la capacité à envoyer simultanément des informations spécifiques pour différents types d'applications. Les chaînes de symboles seront alors envoyées à différents sous-canaux dédiés avec un codage approprié, imposant aux systèmes de transmission une certaine souplesse. Ainsi, contrairement aux codes spatio-temporels, le nombre d'antennes, la technique de modulation, l'entrelaceur utilisé peuvent facilement s'ajuster dans des systèmes spatio-temporels par couches, dont les voies sont indépendantes.

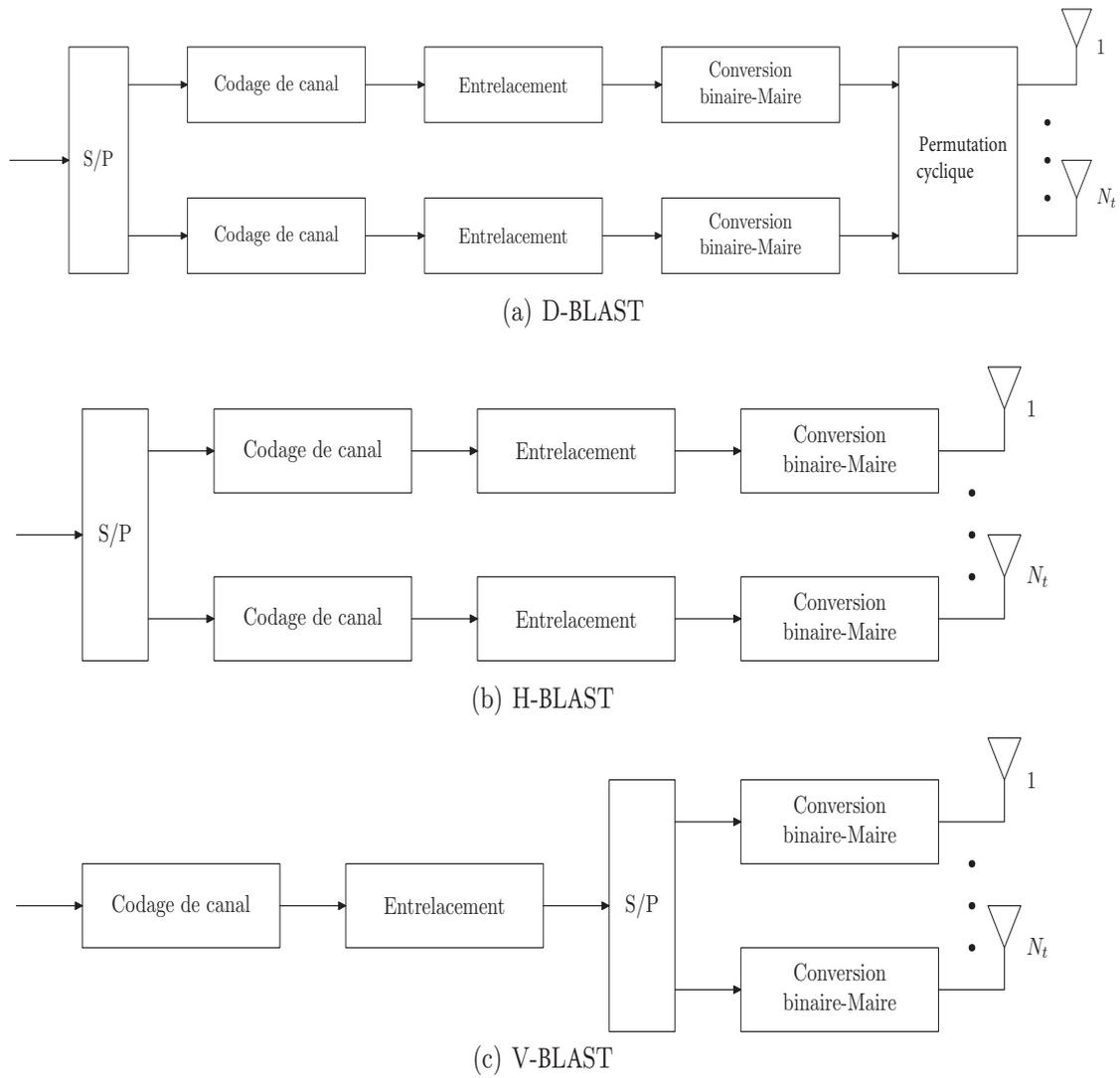


Figure IV.9: Différentes architectures d'émission de multiplexage spatial.

Les systèmes spatio–temporels par couches sont à l’origine de l’engouement pour les systèmes MIMO. Les chercheurs des laboratoires Bell ont ainsi proposé successivement plusieurs architectures dont ils ont démontré l’énorme potentiel. Le système le plus simple, qui ne fait appel à aucune technique de codage, est le de V – BLAST (abréviation de l’appellation en anglais : Vertically – Bell Labs Advanced Space Time). Cette architecture verticale procède tout simplement à un démultiplexage de la trame d’informations en N_t sous – trames. Chaque sous – trame est modulée par la suite par une modulation type M–QAM. Notons $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ les bits d’information provenant de la source binaire, et $\{s_k^i\}$ les symboles à émettre qui se trouvent sur la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice résultante, le processus peut être représenté sous forme de diagramme :

$$\left(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \quad \dots \right) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ b_2 & b_{N_t+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ s_1^{N_t} & s_2^{N_t} & \dots \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Les symboles qui se trouvent sur la ligne (ou couche) i de la matrice sont alors envoyés par la antenne i . Cette architecture verticale sans codage n’est pas la première version du prototype BLAST proposée par les laboratoires Bell, mais c’est celle qui a véritablement révolutionné le monde des systèmes multi–antennes par sa simplicité et son efficacité.

Les architectures BLAST initialement proposées comportent un système de codage à la suite du démultiplexeur. Dans l’architecture horizontale H–BLAST, chaque couche ou sous–chaîne d’éléments binaires est codée individuellement, puis modulée et transmise par une des N_t antennes. Si l’on note comme précédemment c_k^i les symboles codés transmis par la $i^{\text{ième}}$ antenne, on obtient le schéma suivant :

$$\left(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \quad \dots \right) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ b_2 & b_{N_t+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \overrightarrow{1^{\text{er}} \text{ codeur}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overrightarrow{N_t^{\text{ième}} \text{ codeur}} \end{matrix}} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots \end{pmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

L’idée originale de Foschini résidait pourtant dans un codage diagonal, par lequel les sym-

boles codés de chaque couche sont transmis successivement par chacune des N_t antennes. Dans cette architecture D-BLAST, les symboles codés occupent donc une diagonale de la matrice de transmission :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \cdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{N_t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^1 & c_2^2 & \cdots & c_2^{N_t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{N_t}^1 & c_{N_t}^2 & \cdots & c_{N_t}^{N_t} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

Cette architecture, bien qu'elle ait le mérite de mieux résister aux perturbations que les autres, fut cependant momentanément abandonnée, du fait de son manque d'efficacité (une partie de la matrice est nulle et ralentit la transmission) et de sa complexité de décodage.

Grâce à l'usage d'antennes multiples, la courbe du taux d'erreur bit en fonction du SNR montre une pente plus raide par rapport au cas d'une seule antenne, l'augmentation de cette pente correspond à un gain appelé *gain de diversité* et noté G_d :

$$G_d = - \lim_{\log SNR \rightarrow \infty} \frac{\log Pe(SNR)}{\log SNR} \quad (\text{IV.21})$$

$Pe(SNR)$ dénote le taux d'erreur mesuré à une valeur SNR fixée. Plus les trajets sont décorrélés, plus le gain de diversité est important. La diversité maximale qu'on peut obtenir est égale à $G_{d\max} = N_t \times N_r$. Un autre paramètre clé pour mesurer la performance d'un système de type MIMO, est le *gain de multiplexage*. Intuitivement, ce gain mesure la pente de la performance du taux de coupure du canal, en fonction du rapport SNR :

$$G_r = - \lim_{\log_2 SNR \rightarrow \infty} \frac{R(SNR)}{\log_2 SNR} \quad (\text{IV.22})$$

$R(SNR)$ désigne le débit de transmission mesuré à une valeur SNR fixée. Nous pouvons démontrer que le gain de multiplexage maximal est donné par $G_{r\max} = \min(N_t, N_r)$. En pratique, il est déterminé par le nombre minimum de sous canaux décorrélés, qui correspond aussi au rang de la matrice du canal.

Considérons un système MIMO employant un codage Espace-Temps tel que la longueur

temporelle du code T vérifie $T \geq N_t + N_r - 1$. Le gain de diversité maximal que peut atteindre le système de transmission pour un gain de multiplexage G_r donné est :

$$G_{d(r)}|_{opt} = (N_t - G_r)(N_r - G_r) \quad 0 \leq G_r \leq \min(N_t, N_r) \quad (\text{IV.23})$$

6 Démodulation conjointe

La réception optimale consiste en un traitement conjoint du codage canal et du codage espace-temps. La grande complexité d'une telle solution la rend non envisageable dans une application réelle, il est donc nécessaire de choisir une solution sous-optimale en effectuant les deux tâches de décodage séparément.

Dans le cas d'un codage espace-temps orthogonal, la détection optimale consiste à appliquer un filtre adapté (Maximum ratio Combining). Ceci revient à multiplier le vecteur reçu, par la matrice \mathbf{H}^H , matrice transconjuguée de la matrice de canal. Dans ce cas le vecteur filtré $\hat{\mathbf{y}}_{MF}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{MF} &= \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{H}^H \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{H}^H \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Dans le cas d'un code orthogonal, la matrice $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ est diagonale à coefficients réels positifs (voir l'équation (IV.2)). Chaque symbole égalisé correspond donc à un symbole transmis pondéré auquel est ajouté un bruit gaussien. Dans le cas où le code n'est pas orthogonal, la matrice $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ n'est plus diagonale, le filtrage adapté n'est plus optimal.

6.1 Détecteurs à maximum de vraisemblance

La solution optimale en terme de taux d'erreurs est donnée par un détecteur à maximum de vraisemblance (MV). Ce critère minimise la puissance de bruit sur le vecteur reçu et s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}_{ML} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2$$

La recherche du vecteur solution nécessite le calcul de la norme au carré pour toutes les combinaisons possibles de symboles. Ainsi la complexité de l'algorithme croît exponentiellement avec la taille du vecteur \mathbf{s} et l'ordre de la modulation. Le récepteur doit calculer les distances pour un ensemble de vecteurs possibles de taille M^{N_t} , et le temps de calcul devient vite prohibitif pour les constellations de grande taille, même pour un faible nombre d'antennes émettrices (par exemple, pour une $QAM - 64$ et $N_t = 4$, le récepteur doit passer en revue 349 428 160 212 vecteurs différents)

6.2 Détecteurs à filtrage linéaire

Les récepteurs basés sur le maximum de vraisemblance souffrent d'une grande complexité. C'est pourquoi, malgré leurs bonnes performances. Un moyen de détection a priori moins complexe consiste à appliquer un filtrage linéaire sur le signal reçu. On parle alors d'égalisation du signal reçu.

- **Égaliseur de forçage à zéro** : est une technique de détection par inversion de matrice. Cette technique consiste à appliquer au vecteur reçu une matrice d'égalisation \mathbf{L}_{ZF} . Le critère ZF (Zero Forcing) a été proposé afin de garantir une élimination de l'IES en sortie de l'égaliseur. La matrice \mathbf{L}_{ZF} est alors égale au pseudo inverse de la matrice de canal :

$$\mathbf{L}_{ZF} = \mathbf{H}^\# \tag{IV.25}$$

$$= (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \tag{IV.26}$$

Le vecteur estimé $\hat{\mathbf{y}}_{ZF}$ vaut alors :

$$\hat{\mathbf{y}}_{ZF} = \mathbf{L}_{ZF} \times \mathbf{r} \tag{IV.27}$$

$$= (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w})$$

$$= \mathbf{s} + (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{w}$$

Le principal avantage du ZF est sa simplicité. Cependant en présence d'évanouissements et de bruit, le critère ZF a pour effet d'augmenter le niveau de bruit ce qui dégrade les performances.

- **Égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne (MMSE)** : consiste à appliquer au vecteur reçu la matrice \mathbf{L}_{MMSE} qui minimise l'erreur quadratique moyenne aux instants d'échantillonnage entre les symboles égalisés et les symboles transmis. La matrice \mathbf{L}_{MMSE} est définie par la relation suivante :

$$\mathbf{L}_{MMSE} = \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_s^2} N_t \mathbf{I}_{N_t} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \quad (\text{IV.28})$$

Comme le ZF, il est d'une grande complexité à cause de l'inversion matricielle nécessaire au calcul de la matrice de précodage. Il permet de limiter l'impact du bruit à faible SNR que subit le ZF. On vérifie bien qu'à haut SNR, $\left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_s^2} N_t \mathbf{I}_{N_t} \right) \rightarrow \mathbf{H}^H \mathbf{H}$ et donc $\mathbf{L}_{MMSE} \rightarrow \mathbf{L}_{ZF}$.

6.3 Annulations successives d'interférences ordonnées (V-BLAST)

Les trois récepteurs présentés jusqu'à présent présentent des avantages et des inconvénients : le MV est performant mais demande des calculs, le ZF est simple mais est sensible au bruit, et l'MMSE simple résiste mieux que le ZF au bruit mais n'élimine pas complètement les IES. C'est dans ce contexte que les laboratoires Bell ont développé l'algorithme Vertical-Bell Laboratories Layered Space-Time (V-BLAST). Ce récepteur contrairement aux précédents n'est pas linéaire. Il se base sur une égalisation (ZF ou MMSE) associée à un retour de décision dont le principe général est le suivant. Le récepteur considère dans un premier temps le symbole sur l'antenne émettrice ayant le meilleur SNR puis procède à son estimation selon le critère choisi (MV, MMSE. . .) : la probabilité de se tromper sur ce symbole est a priori la plus faible. Sa contribution est ensuite estimée puis retranchée du vecteur \mathbf{y} : les SNR des symboles restants sont alors améliorés. Cette manipulation est répétée jusqu'au dernier symbole. En résumé, voici les étapes de cet algorithme aussi appelé Ordered Successive Interference Cancellation (OSIC) :

1. Choix du symbole s_i possédant le meilleur SNR.

2. Estimation du symbole si pour obtenir \hat{s}_i .
3. Calcul de la contribution de s_i en utilisant la colonne i de H et \hat{s}_i .
4. Soustraction de la contribution estimée.
5. La contribution du symbole étant supposée annulée, la colonne i de H est annulée.
6. Les étapes précédentes sont répétées jusqu'à ce que les N_t symboles soient estimés.

Le point faible de cette solution est la propagation des erreurs. En effet, si l'estimation d'un symbole est erronée alors celle de sa contribution est également fautive. Le prochain symbole ne voit pas son SNR amélioré et risque d'être faux aussi : l'erreur se propage aux symboles suivants. Cependant, les performances sont globalement améliorées sans nécessiter une charge importante de calculs.

7 Multi-utilisateurs MIMO

L'accès multiple par répartition spatiale AMRS (Spatial Division Multiple Access : SDMA) constitue aujourd'hui une technique d'accès particulièrement intéressante pour les systèmes MIMO. En effet cette technique permet d'exploiter la dimension spatiale (antennes multiples) pour séparer les différents utilisateurs qui partagent la même bande de fréquence. Ceci constitue un atout très fort pour l'accès multiple SDMA vis-à-vis des enjeux des nouveaux systèmes de communication sans fil pour lesquels l'amélioration de l'efficacité spectrale est l'un des objectifs essentiels.

En MIMO multi-utilisateurs MU-MIMO, la station de base doit estimer le canal entre ses N_t antennes et les différents utilisateurs afin de générer les coefficients d'antennes propres à former un faisceau (beamforming), celui ci dirigeant l'énergie de sorte à ce que chaque utilisateur reçoive ses données brutes. Les diagrammes sont alors sommés après avoir été pondérés par le symbole à leur transmettre. Il en résulte un rayonnement global constitué des faisceaux portant les informations différentes à destination de chaque utilisateur (cf. Figure IV.10).

Nous considérons la transmission MU-MIMO en liaison descendante où la BS transmet via N_t antennes à K utilisateurs dont chacun est équipé de N_r antennes. Pour le k^{ieme} utilisateur M_k flux sont envoyés et le vecteur de symboles qui lui correspond est noté \mathbf{s}_k (de dimensions

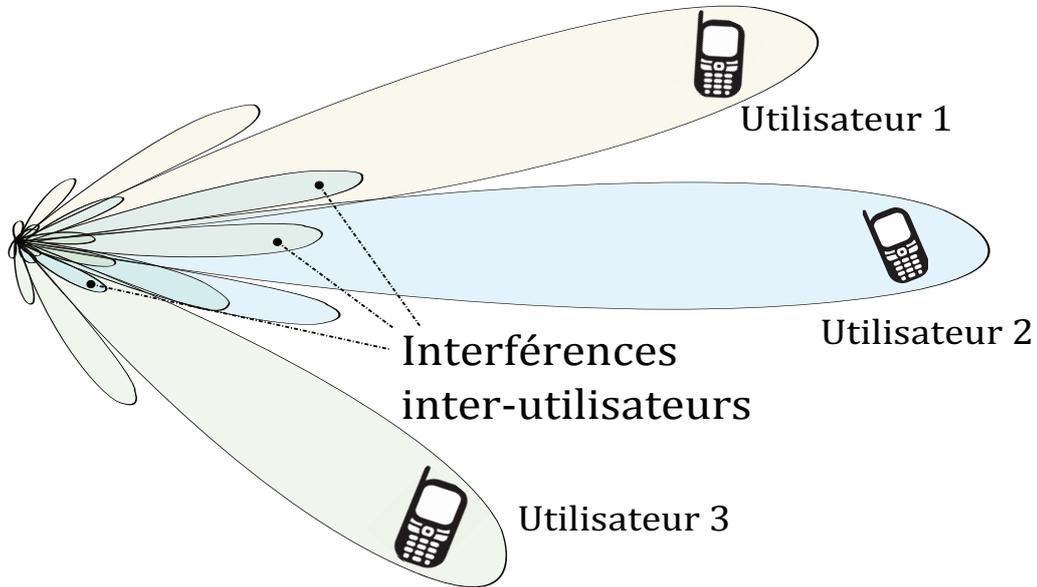


Figure IV.10: Technique d'accès SDMA (MU-MIMO beamforming multi-utilisateur).

$M_k \times 1$). Soit \mathbf{s} le vecteur contenant l'ensemble des vecteurs \mathbf{s}_k concaténés destinés aux K utilisateurs.

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_k \cdots \mathbf{s}_K]^T$$

$$\mathbf{s}_k = [\mathbf{s}_{k1} \cdots \mathbf{s}_{kM_k}]$$

\mathbf{s} est donc de dimensions $M \times 1$ où $M = \sum_{k=1}^K M_k$.

Une matrice de précodage \mathbf{F} (pondération)¹ de dimensions $Nt \times M$ est appliquée au vecteur \mathbf{s} . \mathbf{F} est composée de sous-matrices \mathbf{F}_k de dimensions $Nt \times M_k$. Le vecteur précodé transmis \mathbf{x} de dimensions $Nt \times M$ est donné par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \mathbf{s} \tag{IV.29}$$

1. appelé aussi Beamformer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Nt} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{Nt} \end{bmatrix} = [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_k \cdots \mathbf{F}_K] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_k \\ \vdots \\ \mathbf{s}_K \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Chaque utilisateur possède N_k antennes de réception et reçoit donc un vecteur \mathbf{r}_k de dimensions $N_k \times 1$:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{w}_k \quad (\text{IV.31})$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{F}_k \mathbf{s}_k + \underbrace{\mathbf{H}_k \sum_{j \neq k}^K \mathbf{F}_j \mathbf{s}_j}_{\text{interference entre utilisateurs}} + \mathbf{w}_k \quad (\text{IV.32})$$

$\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{N_t \times N_k}$ est la matrice du canal entre la station de base et le $k^{\text{ième}}$ utilisateur. L'annulation des interférences revient à satisfaire la condition $\mathbf{H}_k \mathbf{F}_j = 0$ pour $j \neq k$. Pour ce faire plusieurs critères de précodage linéaire existent, comme le précodage ZFBF (Zero-Forcing BeamForming)² qui est particulièrement intéressant dans le cas d'une seule antenne en réception (pas de corrélation), le précodage MMSE ainsi que d'autres critères répondant aux contraintes de QoS.

8 Exercices

Exercice 8.1

Trouver le modèle de canal parallèle équivalent pour un canal MIMO avec matrice de gain de canal

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} .1 & .3 & .7 \\ .5 & .4 & .1 \\ .2 & .6 & .8 \end{bmatrix}$$

2. Ceci peut être réalisé en précodant \mathbf{s} par la matrice pseudo-inverse de $\mathbf{H} : \mathbf{F} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H)^{-1}$

Exercice
8.2

Considérons un canal MIMO avec matrice de gain

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} .7 & .9 & .8 \\ .3 & .8 & .2 \\ .1 & .3 & .9 \end{bmatrix}$$

- Trouver la capacité de ce canal sous formation de faisceau (Beamforming) en supposant que le canal est connu de l'émetteur et du récepteur, $B = 100\text{KHz}$ et $\rho = 10\text{dB}$

Exercice
8.3

Les identités matricielles sont couramment utilisées dans l'analyse des canaux MIMO. Prouver les identités matricielles suivantes :

1. Étant donné une matrice $M \times N$, \mathbf{A} montre que la matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ est Hermitienne. Qu'est-ce que cela révèle sur la décomposition en valeurs propres de $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$?
2. Montrer que $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ est semi-définie positive
3. Montrer que $\mathbf{I}_M + \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ est Hermitienne semi-définie positive
4. Montrer que $\det[\mathbf{I}_M + \mathbf{A}\mathbf{A}^H] = \det[\mathbf{I}_N + \mathbf{A}^H\mathbf{A}]$

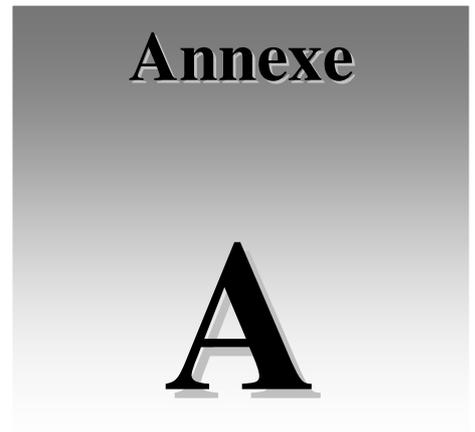
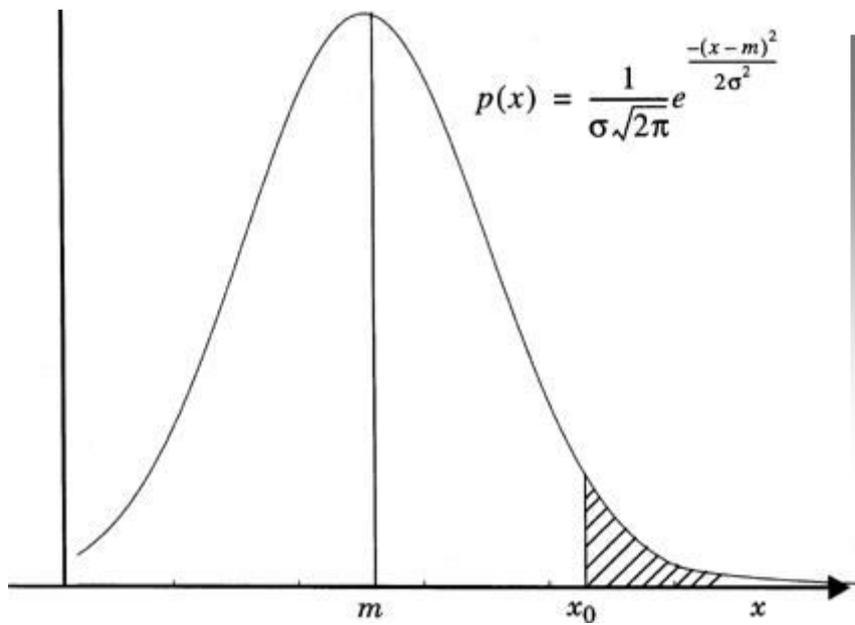
Exercice
8.4

Trouver le SVD (décomposition en valeurs singulières) de la matrice suivante

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} .7 & .6 & .2 & .4 \\ .1 & .5 & .9 & .2 \\ .3 & .6 & .9 & .1 \end{bmatrix}$$

Exercice
8.5

Pour un système MIMO $N_t = N_r = 8$, nous supposons un schéma de codage pouvant atteindre le compromis débit / diversité avec un SNR de 15dB , si nous demandons un débit de données par unité Hertz de $R = 15\text{bps}$, quel est le gain en diversité maximal que le système peut fournir ?



Aide mémoire de Traitement du Signal à l'usage des Communications Numériques Avancées

- 1. Signaux déterministes**
- 2. Signaux aléatoires**
- 3. Taux d'erreurs binaires pour les modulations ASK, PSK et QAM**
- 4. Fonction $Q(x)$ et fonction $\text{erfc}(x)$**

Annexe

A Aide mémoire de Traitement du Signal à l'usage des Communications Numériques Avancées



Communications Numériques avancées
CNA

Aide mémoire de Traitement du Signal à
l'usage des **Communications Numériques avancées.**

Janvier 2019.



Signaux déterministes.

1. **Signal à temps continu** $x(t)$ \longleftrightarrow **Signal à temps discret** $\{x_k\}$

2. **Échantillonnage**

$$\{x_k\} = x(kT),$$

avec T intervalle d'échantillonnage et $1/T$ fréquence d'échantillonnage.

$$\{x_k\} = x(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - kT)$$

3. **Énergie**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2$$

4. **Puissance moyenne**

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{+K} |x_k|^2$$

5. Système linéaire invariant dans le temps

Réponse impulsionnelle

$$h(t) \quad , \quad h_k$$

Réponse du système

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$y_k = x_k * h_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m}$$

6. Transformation de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad , \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df$$

$$X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j2\pi fmT} \quad , \quad x_m = T \int_{-1/2T}^{+1/2T} X(e^{j2\pi fT})e^{+j2\pi fmT} df$$

7. Théorème de l'échantillonnage

Un signal $x(t)$ à temps continu peut être reconstruit à partir de ses échantillons x_m , si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus grande composante de fréquence de $x(t)$.

Formule de reconstruction

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \frac{\sin[\pi(t - mT)/T]}{\pi(t - mT)/T} \quad , \quad \{x_m\} = x(mT).$$

8. Propriétés de symétrie de la TF

Temps continu	Temps discret
$x(t) \leftrightarrow X(f)$	$x_k \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})$
$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$	$x_{-k} \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$	$x_{-k}^* \leftrightarrow X^*(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$	$x_{-k}^* \leftrightarrow X^*(e^{j2\pi fT})$
$\mathbf{Re}[x(t)] \leftrightarrow X_{\text{paire}}(f)$	$\mathbf{Re}[x_k] \leftrightarrow X_{\text{paire}}(e^{j2\pi fT})$
$j\mathbf{Im}[x(t)] \leftrightarrow X_{\text{impaire}}(f)$	$j\mathbf{Im}[x_k] \leftrightarrow X_{\text{impaire}}(e^{j2\pi fT})$
$x_{\text{paire}}(t) \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(f)]$	$x_{\text{paire } k} \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(e^{j2\pi fT})]$
$x_{\text{impaire}}(t) \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(f)]$	$x_{\text{impaire } k} \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(e^{j2\pi fT})]$

9. Propriétés de la TF

Temps continu	Temps discret
$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$	$ax_k + by_k \leftrightarrow aX(e^{j2\pi fT}) + bY(e^{j2\pi fT})$
$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$	$x_k * y_k \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})Y(e^{-j2\pi fT})$
$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$	$x_k y_k \leftrightarrow T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(e^{-j2\pi\varphi T})Y(e^{-j2\pi(f-\varphi)T})d\varphi$
$x(t - \tau) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau}$	$x_{k-K} \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})e^{-j2\pi fKT}$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$	$x_k e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow X(e^{j2\pi(f-f_0)T})$

10. Quelques paires TF

- Porteuse complexe à la fréquence f_0

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow 2\delta(f - f_0) \quad , \quad e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow 2/T\delta(f - f_0)$$

- Fonction rectangle

$$\text{rect}(t, a, B) = \begin{cases} a & -B/2 \leq t \leq B/2 \\ 0 & |t| > B/2 \end{cases}$$

$$\text{rect}(t, a, B) \leftrightarrow aB \text{sinc}(Bf)$$

- Formule de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n t/T}$$

Dual

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kfT}.$$

- Peigne de Dirac

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\mathbf{TF}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T).$$



Signaux aléatoires.

1. Variable aléatoire avec distribution gaussienne

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Processus aléatoire et séquence aléatoire

$$\{x(t)\} \quad , \quad \{x_k\}$$

3. Moyenne

$$m_x(t) = \mathbf{E}[x(t)] \quad , \quad m_k = \mathbf{E}[x_k]$$

4. Autocorrélation

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1).x^*(t_2)] \quad , \quad R_x(k, i) = E[x_k.x_i^*]$$

avec x^* , complexe conjugué de x

5. Stationnarité

- $x(t)$ ($\{x_k\}$) sont «stationnaires au sens strict» (**PASS**), si les lois de probabilité de $x(t)$ ($\{x_k\}$) ne dépendent pas d'un décalage temporel.

- $x(t)$ ($\{x_k\}$) sont «stationnaires au sens large» (**PASL**), si la moyenne et l'autocorrélation, ne dépendent pas d'un décalage temporel. Dans ce cas :

$$m_x(t) = E[x(t)] = m_x \quad , \quad m_k = E[x_k] = m$$

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1).x^*(t_2)] = R_x(t_1-t_2) \quad , \quad R_x(k, i) = E[x_k.x_i^*] = R_x(k-i)$$

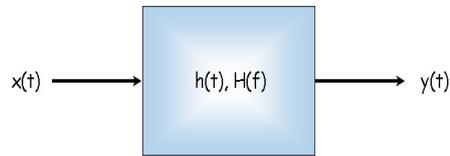
$$R_x(\tau) = E[x(t).x^*(t+\tau)] \quad , \quad R_x(m) = E[x_k.x_{k+m}^*]$$

6. Puissance d'un PASL de moyenne nulle

$$R_x(0) = E[x(t).x^*(t)] = E[|x(t)|^2] \quad , \quad R_x(0) = E[x_k.x_k^*] = E[|x_k|^2]$$

7. Densité Spectrale de Puissance d'un PASL

$$S_x(f) = \text{TF}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad , \quad S_x(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{-j2\pi fmT}$$



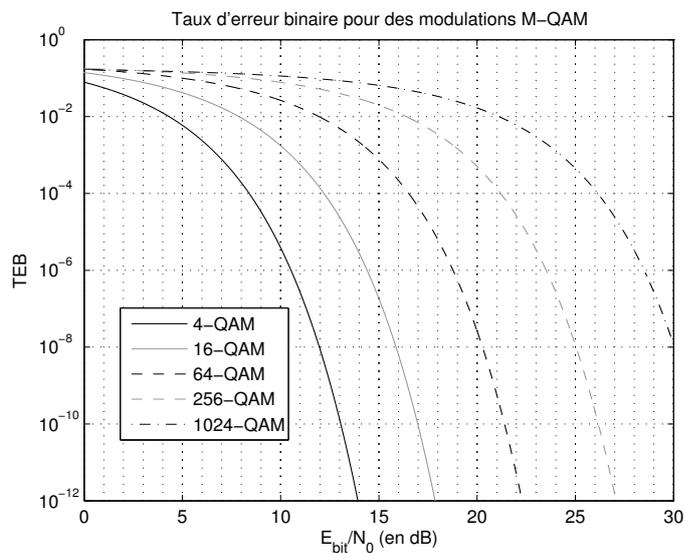
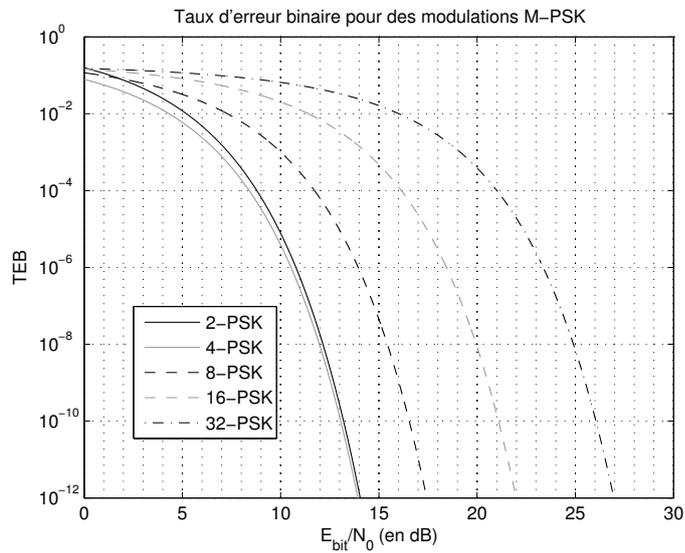
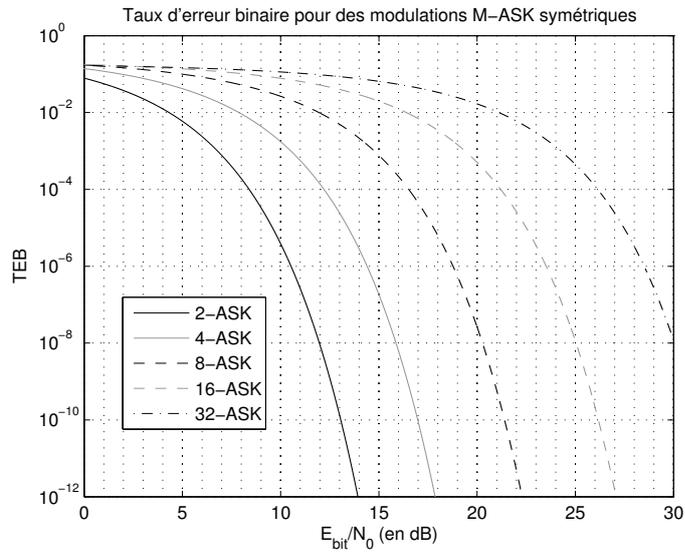
8. Formule de filtrage

$x(t)$ ($\{x_n\}$), **PASL**, avec densité spectrale de puissance $S_x(f)$ ($S_x(e^{j2\pi fT})$)

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 \quad , \quad S_y(e^{j2\pi fT}) = S_x(e^{j2\pi fT})|H(e^{j2\pi fT})|^2$$



Taux d'erreurs binaires pour les modulations ASK, PSK et QAM



Fonction $Q(x)$ et fonction $\text{erfc}(x)$

x	Q(x)	erfc(x)	x	Q(x)	erfc(x)
0.0	0.5	1.0			
0.1	0.460172	0.887537	4	3.16715e-05	1.54178e-08
0.2	0.42074	0.777298	4.1	2.06577e-05	6.70025e-09
0.3	0.382089	0.671373	4.2	1.33459e-05	2.85559e-09
0.4	0.344578	0.571608	4.3	8.54001e-06	1.1935e-09
0.5	0.308538	0.4795	4.4	5.41262e-06	4.89182e-10
0.6	0.274253	0.396144	4.5	3.39773e-06	1.9662e-10
0.7	0.241964	0.322199	4.6	2.11249e-06	7.74974e-11
0.8	0.211855	0.257899	4.7	1.30083e-06	2.99531e-11
0.9	0.18406	0.203092	4.8	7.93345e-07	1.13523e-11
1	0.158655	0.157299	4.9	4.79194e-07	4.21899e-12
1.1	0.135666	0.119795	5	2.86659e-07	1.53748e-12
1.2	0.11507	0.089686	5.1	1.69831e-07	5.49388e-13
1.3	0.0968006	0.0659919	5.2	9.9647e-08	1.92492e-13
1.4	0.0807567	0.0477147	5.3	5.7903e-08	6.61314e-14
1.5	0.0668072	0.0338947	5.4	3.33214e-08	2.2277e-14
1.6	0.0547993	0.0236515	5.5	1.89901e-08	7.3579e-15
1.7	0.0445654	0.0162095	5.6	1.07179e-08	2.38285e-15
1.8	0.0359303	0.0109095	5.7	5.99057e-09	7.56625e-16
1.9	0.0287165	0.00720967	5.8	3.31586e-09	2.3556e-16
2	0.0227501	0.00467786	5.9	1.81757e-09	7.19044e-17
2.1	0.0178644	0.0029796	6	9.86622e-10	2.15198e-17
2.2	0.0139034	0.0018629	6.1	5.30356e-10	6.31463e-18
2.3	0.0107241	0.0011432	6.2	2.82322e-10	1.81668e-18
2.4	0.00819753	0.000688521	6.3	1.48826e-10	5.12424e-19
2.5	0.00620968	0.000406955	6.4	7.769e-11	1.41708e-19
2.6	0.00466122	0.000236036	6.5	4.01607e-11	3.84216e-20
2.7	0.00346702	0.000134333	6.6	2.05582e-11	1.02133e-20
2.8	0.00255519	7.50137e-05	6.7	1.04211e-11	2.66172e-21
2.9	0.00186588	4.10983e-05	6.8	5.23103e-12	6.80087e-22
3	0.00134996	2.20908e-05	6.9	2.60016e-12	1.70361e-22
3.1	0.000967633	1.16488e-05	7	1.27983e-12	4.18383e-23
3.2	0.000687153	6.02586e-06	7.1	6.23791e-13	1.00734e-23
3.3	0.000483431	3.05777e-06	7.2	3.01066e-13	2.3778e-24
3.4	0.000336933	1.52203e-06	7.3	1.43885e-13	5.50258e-25
3.5	0.000232631	7.43116e-07	7.4	6.80929e-14	1.24839e-25
3.6	0.00015911	3.55872e-07	7.5	3.19092e-14	2.77665e-26
3.7	0.0001078	1.67156e-07	7.6	1.48067e-14	6.05454e-27
3.8	7.23484e-05	7.70062e-08	7.7	6.80336e-15	1.29428e-27
3.9	4.80967e-05	3.47933e-08	7.8	3.09538e-15	2.71241e-28

Références bibliographiques

·
·
·

Références bibliographiques

- [1] P. Comon, *Communications numériques, cours et exercices à l'usage de l'élève ingénieur*. Harmattan, Jul. 2010, iISBN 978-2-296-12827-9.
- [2] M. Charbit, *Systèmes de communications et théorie de l'information*. Hermès science publications, 2003.
- [3] M. Joindot and A. Glavieux, "Introduction aux communications numériques : Cours et exercices corrigés," *Sciences sup. Dunod*, 2007.
- [4] H. P. Hsu and B. Loubières, *Communications analogiques et numériques : cours et problèmes*. McGraw-Hill, 1994.
- [5] L. W. Couch, M. Kulkarni, and U. S. Acharya, *Digital and analog communication systems*. Citeseer, 1997, vol. 6.
- [6] S. Haykin, *Communication systems*. John Wiley & Sons, 2008.
- [7] J. G. Proakis and M. Salehi, *Communication Systems Engineering (2nd Edition)*. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [8] J. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications(5th Edition)*, ser. McGraw-Hill International Edition. McGraw-Hill, 2008.

- [9] S. Bernard, *Digital Communications : Fundamentals and Applications (2nd Edition)*. Prentice Hall, 2001.
- [10] B. P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford university press, 1998.
- [11] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of wireless communication*. Cambridge university press, 2005.
- [12] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.
- [13] P. Ciblat, *Théorie des communications numériques (partie A)*, Polycopie de cours, Télécom ParisTech, 2018.
- [14] M. Coulon, *Systèmes de télécommunications*, Polycopie de cours, ENSEEIHT, 2008.
- [15] P. Kadionik, *Bases de transmissions numériques : Les modulations numériques*, Polycopie de cours, ENSEIRB, 2000.
- [16] A. Iryna, *Introduction aux Communications Numériques*, Polycopie de cours, Université de Cergy-Pontoise, 2013.
- [17] M. Van Droogenbroeck, *Analyse et conception des systèmes de télécommunications*, Polycopie de cours, Institut Montefiore – Université de Liège, 2008.
- [18] B. Alexandre, *Canaux de transmissions bruités*, Polycopie de cours, INSA Toulouse, 2018.
- [19] R. Jaouadi, “Energy and spectral efficiency tradeoff for autonomous communicating objects,” Thèse de doctorat, UNIVERSITE DE NANTES, Oct. 2017.
- [20] Y. Chartois, “Etude paramétrique avancée de canaux SISO et MIMO en environnements complexes : Application au système HiperLAN/2,” Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne - ENSTB; Université Rennes 1, Dec. 2005.
- [21] M. Lourdiane, “CDMA à séquence directe appliqué aux systèmes de communications optiques,” Thèse de doctorat, Télécom ParisTech, 2005.

- [22] I. M. Mahafeno, “Étude de la technique d’accès multiple idma (interleave division multiple access),” Thèse de doctorat, Télécom Bretagne, 2007.
- [23] K. Ouertani, “Multi-user Detection for an Underwater Acoustic Network Modems with Low Probability of Intercept,” Thèse de doctorat, Télécom Bretagne, Université de Bretagne-Sud, Dec. 2013.
- [24] A. Ahriche, “Étude comparative des méthodes d’estimation de canal à l’aide des pilotes dans les systèmes ofdm à travers un canal multi-trajets,” Mémoire de maîtrise, Université Laval, The address of the publisher, 1993.
- [25] O. Berder, “Optimisation et stratégies d’allocation de puissance des systèmes de transmission multi-antennes,” Thèse de doctorat, Brest, 2002.
- [26] A. Charaf, “Etudes de récepteurs mimo-ldpc itératifs,” Thèse de doctorat, Télécom Paris-Tech, 2012.
- [27] O. P. Pasquero, “Optimization of terrestrial digital video broadcasting systems : channel estimation, synchronization and distributed multi-antennas schemes,” Thèse de doctorat, INSA de Rennes, Jun. 2011.
- [28] A. Roze, “Massive MIMO, an angular approach for future multi-user systems at millimetric wavelenghts,” Thèse de doctorat, INSA de Rennes, Oct. 2016.
- [29] G. J. Foschini and M. J. Gans, “On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas,” *Wireless personal communications*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, 1998.
- [30] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, “Space-time block codes from orthogonal designs,” *IEEE Transactions on information theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467, 1999.
- [31] S. M. Alamouti, “A simple transmit diversity technique for wireless communications,” *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458, 1998.