Théorie des jeux — TD 2

École nationale des ponts et chaussées

Joon Kwon & Bruno Ziliotto

mardi 28 novembre 2017

Exercice 1. — *Le bon Samaritain*. — Alertés par un cri au secours, chaque témoin peut répondre à l'appel ou l'ignorer. Un personne qui répond à l'appel reçoit un paiement égal à $1 - c$ (avec $0 < c < 1$). Si au moins une personne répond à l'appel, une personne n'ayant pas répondu à l'appel reçoit 1. Si personne ne répond à l'appel, tout le monde obtient 0. Écrire le jeu sous forme normale. Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes en fonction de c et du nombre de témoins $N \geqslant 2$. Commenter.

Exercice 2. — *Jeu du centipède*. — On considère le jeu suivant.

$$\begin{tikzcd} J_1 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "Q"] & J_2 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "Q"] & J_1 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "Q"] & J_2 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "Q"] & (6,5) \\ (2,1) & (1,4) & (4,3) & (3,6) & \end{tikzcd}$$

1) Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits.
2) Commenter.

Exercice 3. — *Jeu de l'ultimatum*. — Deux joueurs négocient pour diviser 100 euros. Le Joueur 1 choisit $x \in \{0, 25, 50, 75, 100\}$, et propose x au Joueur 2 (donc $100 - x$ pour le Joueur 1). Si le Joueur 2 accepte, alors le partage se fait. Sinon, chacun a 0. Mettre le jeu sous forme extensive, puis sous forme normale. Trouver les équilibres de Nash et les équilibres de Nash sous-jeu parfait.

Exercice 4. — *Sauvetage de banque*. — Une banque (le Joueur 1) peut investir de manière risquée ou non risquée. Dans le premier cas, elle obtient un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3, et fait faillite avec probabilité 1/6. Dans le second cas, elle obtient un gain modéré à coup sûr. En cas de faillite, l'État (le Joueur 2) peut décider de sauver la banque ou non. Les paiements sont : $(3, 2)$ en cas de de gain modéré, $(10, 4)$ pour un gain important, $(-1, -1)$ pour une perte modérée, $(-4, -10)$ pour une faillite sauvée, et $(-40, -16)$ pour une faillite non sauvée.

1) Mettre le jeu sous forme extensive puis sous forme normale.
2) Trouver les équilibres sous-jeux parfaits.
3) Trouver les équilibres de Nash.
4) Commenter.

Exercice 5. — *Développement durable*. — Soit $N \geqslant 1$. N états choisissent le niveau de leur émission de pollution. Pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, le niveau de pollution de l'état i est représenté par un réel strictement positif s_i. L'ensemble des stratégies pures de l'état i est donc $S_i = \mathbb{R}_+^*$. La fonction de paiement g_i de l'état i est donnée par : pour tout profil de stratégies pures $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$,

$$g_i(s) = \ln(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme. On ne considérera que des stratégies pures.

1) (a) Interpréter la forme de la fonction de paiement. Montrer qu'il existe un unique équilibre de Nash en stratégies pures s^0. De quel type d'équilibre s'agit-il ?

   (b) On appelle *fonction de bien-être social* la fonction B qui à un profil de stratégies pures s associe la somme des paiements des joueurs

   $$B(s) = \sum_{i=1}^{N} g_i(s).$$

   Déterminer le profil de stratégies s^* qui maximise B. Comparer le bien-être social maximal $B(s^*)$ et le bien-être social $B(s^0)$ donné par l'équilibre de la question précédente. Commenter.

2) On suppose maintenant qu'une taxe $\theta > 0$ est mise en place pour encourager les états à moins polluer. Les recettes de cette taxe sont redistribuées de façon équitable

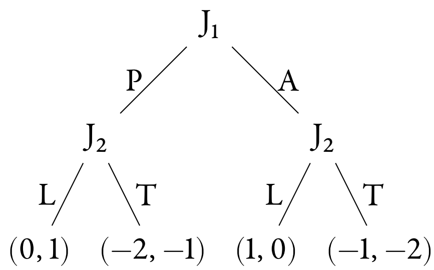
aux états. La nouvelle fonction de paiement est alors :

$$g_i(s) = \ln(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j - \theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j.$$

(a) Reprendre les questions 1) et 2) avec cette nouvelle fonction de paiement.

(b) Déterminer θ tel que $s^0 = s^*$. Commenter.

Exercice 6. — *Jeu du kidnapping*. — On considère le jeu suivant.



Déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes.