Cours de Traitement Du Signal - Transformée en Z

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

27 novembre 2007

Plan du cours

Objectifs

- Introduction de la transformée en Z
- Liens entre TF, TL, TZ
- Domaine de convergence de la TZ
- Calcul de TZ
- Inversion de TZ
- Utilisation de la TZ pour la résolution d'EDF
  $\Rightarrow$ Lien avec les systèmes linéaires numériques

Définition

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j.2\pi.f.t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j.2\pi.f.t} df$$

Notations

- X est la transformée de Fourier de x : $X = TF(x)$
- x est la transformée inverse de Fourier de X : $x = TF^{-1}(X)$
- Notations abusives :
  - $X(f) = TF(x(t))$
  - $x(t) = TF^{-1}(X(f))$

Remarques

- La transformée de Fourier est une fonction complexe
- La transformée de Fourier met en évidence la dualité temp/fréquence
  - $\Rightarrow$ $x(t)$ et $X(f)$ caractérisent le même signal (pas de pertes d'information)
- La transformée de Fourier n'est pas toujours définie au sens des fonctions
  - $\Rightarrow$ Une condition suffisante : f de *carré intégrable* (énergie finie)
  - Pas de problème pour les signaux "physiques" ie observables
  - Pour les signaux idéaux $\Rightarrow$ définition généralisée de la transformée de Fourier (au sens des distributions)

Introduction

Applications de la TF

- Etude des signaux (caractérisation spectrale)
- Intéret théorique et expérimental

Problématique

- Etude des systèmes de traitement (filtres...)
- Limites des capacités de la TF
- Généralisation de la notion de *Transformée*
  - Transformée de Laplace (signaux continus)
  - Transformée en z (signaux discrets)

Transformée de Laplace monolatérale

Construction à partir de la TF

- On suppose un signal causal $x(t)$ qui admet une TF
- Par définition (TF au sens des fonctions) :
  - $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j.2\pi.f.t}dt$
  - $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j.2\pi.f.t}df$
- Soit le signal $y(t) = e^{-\alpha t}.\Gamma(t)$ avec $\Gamma(t)$ l'échelon de Heaviside : on définit le signal causal $z(t) = x(t).y(t)$
- Par application de la TF on a :

$$TF(z(t)) = Z(f) = \int_0^{+\infty} x(t).e^{-(\alpha+2\pi jf)t}dt$$

- En posant $p = \alpha + 2\pi jf \rightarrow$ Transformée de Laplace.

Transformée de Laplace monolatérale

Définition

- Pour un signal causal $x(t)$, on peut définir sa Transformée de Laplace $TL(x) = X(p)$, avec :
  - $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t).e^{-p.t}dt$
  - $x(t) = \frac{1}{2.\pi.j}\int_{-\infty}^{\infty} X(p).e^{p.t}dp$

Condition d'existence

- $x(t)$ localement intégrable
- Convergence de l'intégrale de Laplace liée à la convergence de $\|x(t).e^{-\alpha.t}\|$
- Domaine de convergence défini par un domaine admissible pour α (abscisses de convergence)

Transformées de Laplace : propriétés

Propriétés

- Linéarité, dérivation, retard...
- cf page 28, 29, 30 du poly de J.L. Dion
- Pour les signaux causaux : détermination des TL à partir des tableaux de Transformées usuelles et des propriétés

Correspondance Laplace-Fourier

- Si la droite $\mathcal{R}](p) = 0$ se trouve dans la bande de convergence il est possible de déduire la TF à partir de la TL.
- On se place dans le cas où $\alpha = 0$ soit $p = 2j\pi.f$
- Pour ce point on a : $X(f) = X(p)_{\|p=2j\pi.f}$
- Application : détermination de la réponse fréquentielle

Transformées de Laplace : généralisation

Généralisation

- Pour les signaux non causaux définition de la TL bilatérale
  - $X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-p.t}dt$
- Attention, un certains nombres de propriétés de la transformée de Laplace monolatérale ne sont plus valables pour la transformée bilatérale !

Inversion de la transformée de Laplace

- Pour les signaux **causaux**, 2 méthodes :
  - Calcul de l'intégrale complexe de la transformée inverse sur le contour de Brownwitch englobant les racines de $X(p)$
  - Décomposition de $X(p)$ en éléments simples et recherche des images temporelles par table des TL usuelles.

TL : étude des systèmes linéaires

Rappels

Systèmes linéaires invariants décrits par des Equations Différentielles :

$$(ED) : \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} = \Phi$$

Utilisation de la transformée de Laplace

$$(ED) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i TL\left(f^{(i)}\right) = TL(\Phi)$$

$$\Leftrightarrow TL(f) = \frac{TL(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} p^{i-j} f^{(j-1)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$$

De la transformée de Laplace à la transformée en Z

Rappel : échantillonage

- Pour les signaux échantillonés, on définit un modèle idéal : $x_e(t) = x(t).\text{Ш}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n.T_e).\delta(t - n.T_e)$

Transformée en z monolatérale

- Si on suppose que le signal échantilloné x_e admet une transformée de Laplace $X_e(p)$, on a :
  - $X_e(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n.T_e)\,\delta(t - n.T_e).e^{-p.t}dt$
  - En inversant l'ordre des opérateurs et en utilisant les propriétés de la distribution de Dirac : $X_e(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n.T_e).e^{-p.n.T_e}$
  - En posant $x(n.T_e) = x[n]$ et $z = e^{p.T_e}$ on arrive à la définition : $X(z) = \overline{x}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n}$

Transformée en Z : définition

Définition

- Cas général, transformée en Z bilatérale :

$$X(z) = \overline{x}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- Pour les signaux causaux, TZ monolatérale :

$$X(z) = \overline{x}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Lien avec la TFD

- Pour les signaux numériques de durée finie (observables) :

$$X(z) = \overline{x}(z) = \sum_{n=0}^{N} x[n] z^{-n}$$

- On retrouve la TFD par changement de variable :

$$z = e^{j\frac{2.k.\pi}{N}}$$

Transformée en Z : convergence

Condition de convergence

- Résultats issus de la théorie des séries de Laurent (cf p. 68, p. 70)
- Dans le cas général, TZ définie pour sur un anneau de convergence $r_1 < |z| < r_2$
- Pour les signaux causaux, TZ définie pour $|z| > r$

Transformée inverse

- Retrouver une série d'échantillons dont on connait la TZ
- Cas général : dépend de la couronne de convergence
- Formule générale : utilisation du théorème des résidus

Transformée en Z : formule d'inversion

Développement en série de Laurent

- Dans le cas général, l'inversion de la TZ est définie pour un couple $\{A(z), D = (r_1 < |z| < r_2)\}$, D couronne de convergence
- On peut développer en série de Laurent sur D :

$$A(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n.z^{-n}$$

- Formules intégrales de Cauchy : $a_n = \frac{1}{2\pi.j} \int_\gamma A(z).z^{n-1} dz$ avec γ cercle centre 0 contenu dans D

Utilisation du théorème des résidus

- On a alors : $a_n = \sum_i Res\left(A(z) z^{n-1}; p_i\right)$, p_i pôles de $A(z) z^{n-1}$ intérieurs à γ
- Résidu = singularité $\Rightarrow$ pôle pour les fractions rationnelles

Calcul des résidus

- Si p_i pôle simple :

$$R_{p_i} = Res\left(A(z) z^{n-1}; p_i\right) = \left[(z - p_i).A(z) z^{n-1}\right]_{z=p_i}$$

- Si p_i pôle d'orde q :

$$R_{p_i} = \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{d^{(q-1)}}{dz^{q-1}} \left[(z - p_i)^q.A(z) z^{n-1}\right] \right)_{z=p_i}$$

Exemple

- Soit $X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}}$, $|z| > |a|$
- On trouve $x[n] = u[n] a^n$, u échelon discret de Heaviside

Transformée en Z : systèmes causaux

Cas particuliers des signaux causaux

- Cas particuliers très fréquent en analyse de systèmes (réponse causale)
- Simplification du problème : apparition de propriétés (cf TL)
- TZ définie pour $|z| > r$ devient bijective $\Rightarrow$ simplification du problème d'inversion

Aspect pratique : inversion de la TZ

- Première méthode : division polynomiale.
- Deuxième méthode : décomposition en éléments simples et utilisation des tables.

Transformée en Z : propriétés

- Les plus importantes (cf p.69) :
  - Théorème du retard :
  $$TZ\left(x\left[n-k\right]\right) = z^{-k}.TZ\left(x\left[n\right]\right)$$
  - Linéarité :
  $$TZ\left(a.x\left[n\right]+b.y\left[n\right]\right) = a.TZ\left(x\left[n\right]\right)+b.TZ\left(y\left[n\right]\right)$$
  - Convolution :
  $$TZ\left(a\left[n\right]*b\left[n\right]\right) = TZ\left(a\left[n\right]\right).TZ\left(b\left[n\right]\right)$$
- Rappel : convolution linéaire discrète
$$\left(x*y\right)\left[n\right] = \left(y*x\right)\left[n\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k.y_{n-k}$$

Résolution d'Equation aux Différences Finies

- Systèmes numériques modélisés par une loi E/S
  - Réalisation récursive :
  $$y\left[n\right] = F\left(y\left[n-1\right], y\left[n-2\right], ..., x\left[n\right], x\left[n-1\right], ...\right)$$
  - Réalisation non récursive :
  $$y\left[n\right] = F\left(x\left[n\right], x\left[n-1\right], ...\right)$$
- Cas des systèmes linéaires : loi E/S régie par une EDF (cf équation différentielle pour les systèmes analogiques)
  - EDF non homogène :
  $$a_0.y\left[k\right]+a_1.y\left[k-1\right]+...+a_p.y\left[k-p\right] = u\left[k\right] \quad (1)$$
  - EDF homogène associée :
  $$a_0.y\left[k\right]+a_1.y\left[k-1\right]+...+a_p.y\left[k-p\right] = 0 \quad (2)$$

Résolution d'Equations aux Différences Finies

- On associe aux EDF (1) ou (2) l'équation caractéristique :
$$a_0.r^p + a_1.r^{p-1} + ... + a_p = P\left(r\right) = 0$$
- On trouve m racines $r_1, r_2, ...r_m$ de multiplicités $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ avec $\sum \alpha_i = p$
- Théorème de résolution des EDF : $y\left[k\right] = y_0\left[k\right] + y_1\left[k\right]$ solution générale de (1) avec
  - y_0 solution générale de (2) de la forme :
  $$y_0\left[k\right] = \sum_{i=1..m, j=0..\alpha_i-1} \mu_{i,j}.k^j.r_i^k$$
  - y_1 solution particulière de (1)

Utilisation de la TZ

- Recherche des solutions causales de l'EDF (1) et (2)
- Cf poly p 72.
- On définit la Réponse Impulsionnelle (causale) comme l'unique solution causale $h[k]$ vérifiant (1) pour $u[k] = \delta[k]$, impulsion unitaire
- Il vient :

$$TZ(h[k]) = H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

  avec $A(z) = a_0 + a_1.z^{-1} + ... + a_p.z^{-p}$
- On en déduit la solution générale de deux façons :
  - calcul direct : $y[k] = h[k] * u[k]$
  - utilisation de la TZ : $Y(z) = H(z).U(z)$

Bilan : TF, TL et TZ...

- La TF caractérise le contenu spectral des signaux
- La TL et la TZ sont des transformées plus générales adaptées à l'étude des systèmes (linéaires causaux) :
  - TL : étude des systèmes continus
  - TZ : étude des systèmes discrets
- Dans certains cas (TF définie au sens des fonctions) il est possible de passer d'une transformée à l'autre
  - Soit $Y(p) = TL(x(n.T_e))$
  - Si la bande de convergence de la TL contient l'axe imaginaire alors on peut calculer la TF pour $p = 2.j.\pi.f$
  - Soit $Y(z) = TZ(x[n])$
  - Si l'anneau de convergence de la TZ contient le cercle unité, on peut calculer la TF pour $z = e^{2.j.\pi.f}$
- La TF est donc un cas particulier de la TL ou de la TZ