Théorie des jeux — TD 2
Élements de correction
École nationale des ponts et chaussées

Joon Kwon & Bruno Ziliotto

mardi 28 novembre 2017

Exercice 1. — *Le bon Samaritain.* — Les joueurs $\{1, \dots, N\}$ sont les N témoins. Chaque joueur i a pour ensemble de stratégies pures $S_i = \{R, I\}$ (répondre, ignorer), et sa fonction de paiement s'écrit $g_i(R, s_{-i}) = 1 - c$ et

$$g_i(I, s_{-i}) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } j \neq i \text{ tel que } s_j = R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminons les équilibres de Nash en stratégies pures. Si tous les joueurs jouent I, chaque joueur obtient 0 et aurait alors strictement intérêt à dévier car il obtiendrait $1-c > 0$ en jouant R ; ce n'est pas un équilibre. Si plus d'un joueur joue R, chacun de ceux-là aurait strictement intérêt à dévier car il obtiendrait 1 en jouant I (au lieu de $1-c$) ; ce n'est pas un équilibre. Si un seul joueur joue R, on peut vérifier qu'aucun joueur n'a strictement intérêt à dévier. Les équilibres de Nash en stratégies pures sont les profils où un unique joueur joue R.

Déterminons les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Soit $(x_1, \dots, x_N)$ un équilibre de Nash (où x_i est la probabilité que met le joueur i sur la stratégie pure R). Notons $m \geqslant 1$ le nombre de joueurs jouant une stratégie strictement mixte (i.e. non pure). Par symmétrie, on peut supposer qu'il s'agit des m premiers. On a donc $x_i \in]0, 1[$ pour $i \leqslant m$. Pour $i > m$, on a $x_i \in \{0, 1\}$ et en fait $x_i = 0$ car si le joueur i jouait R, le joueur 1 aurait strictement intérêt à dévier en jouant la stratégie pure I et le profil ne constituerait pas un équilibre de Nash. Le cas $m = 1$ est à exclure car la meilleure réponse pour le joueur 1 serait alors $\{R\}$: ce dernier aurait strictement intérêt à dévier de $x_1 \in]0, 1[$ et le profil ne serait pas un équilibre de Nash. Supposons dorénavant que $m \geqslant 2$. Soit $i \leqslant m$ et déterminons la valeur de x_i. Puisque $x_i \in]0, 1[$, le joueur i est indifférent entre R et I :

$$g_i(R, x_{-i}) = 1 - c = 1 - \prod_{j \neq i} (1 - x_j) = g_i(I, x_{-i}),$$

et donc

$$c = \prod_{j \neq i} (1 - x_j) = \prod_{\substack{j \leqslant m \\ j \neq i}} (1 - x_j).$$

En prenant le produit de cette relation pour $i' \leqslant m$, on a :

$$c^m = \prod_{i' \leqslant m} \prod_{j \neq i'} (1 - x_j) = \prod_{i' \leqslant m} (1 - x_{i'})^{m-1}$$

ou encore

$$c^{m/(m-1)} = \prod_{i \leqslant m} (1 - x_i).$$

En divisant cette relation par la seconde, on obtient

$$c^{1/(m-1)} = 1 - x_i,$$

d'où $x_i = 1 - c^{1/(m-1)}$. Réciproquement, montrons que les profils de stratégies ayant m $(2 \leqslant m \leqslant N)$ composantes égales à $1 - c^{1/(m-1)}$ et $N - m$ composantes nulles sont des équilibres de Nash. Les relations ci-dessus montrent qu'un joueur i, pour $i \leqslant m$, jouant une stratégie non pure est indifférent entre R et I, et donc entre toutes ses stratégies mixtes : il n'a aucun intérêt strict à dévier. Un joueur i jouant $x_i = 0$ (i.e. la stratégie pure I) obtient un paiement égal à $1 - c^{m/(1-m)}$. S'il déviait pour son autre stratégie pure R, il obtiendrait $1 - c$; or on peut voir que

$$1 - c^{m/(1-m)} \geqslant 1 - c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{m-1} \geqslant 1.$$

Il n'a donc aucun intérêt strict à dévier pour R, ni donc pour aucune stratégie mixant R et I. Il s'agit bien d'un équilibre de Nash.

Exercice 2. — *Jeu du centipède.* —

1) On procède de façon itérative, en replaçant les sous-jeux minimaux par leurs paiements d'équilibre. L'unique équilibre sous-jeux parfait est (QQ, QQ). Le paiement correspondant est $(2, 1)$.

2) La somme des paiements est minimale dans l'équilibre sous-jeux parfaits. Ce qui n'est pas satisfaisant *socialement*.

Exercice 3. — *Jeu de l'ultimatum*. — $S_1 = \{0, 25, 50, 75, 100\}$, $S_2 = \{A, R\}^{S_1}$. Fonctions de paiement : pour tout $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$:

$$g_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - s_1 & \text{si } s_2(s_1) = A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & \text{si } s_2(s_1) = A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux équilibres sous-jeux parfaits en stratégies pures sont

$$(0, s_2 \equiv A) \qquad \text{et} \qquad \left(25,\ s_2 : \begin{cases} 0 \longmapsto R \\ x \longmapsto A & \text{si } x \neq 0 \end{cases}\right).$$

L'ensemble des équilibres en stratégies pures est l'union des trois ensembles suivants

$$\{(0, s_2) \mid s_2(0) = A\}$$

$$\{(0, s_2) \mid s_2(x) = R \text{ pour } x < 100\}$$

$$\{(x, s_2) \mid x > 0 \text{ et } s_2(x') = R \text{ pour } x' < x\}.$$

Exercice 4. — *Sauvetage de banque*. — Sous forme normale le jeu d'écrit :

	P	A
S	3, 2	3, 2
R	4, 0	−2, −1

Le seul équilibre sous-jeux parfait est (R, P).
L'ensemble des équilibres en stratégies mixtes est

$$\{(R, P)\} \cup \{(S, y)\}_{y \in [0,5/6]}$$

Pour qu'il y ait équilibre avec le joueur 1 jouant S, il doit exister une menace du joueur 2 ($y \leqslant 5/6$), c'est-à-dire la menace d'abandonner avec une probabilité plus grande que 1/6.

Exercice 5. — *Développement durable*. —

1) (a) Il existe un unique équilibre de Nash, à savoir $s = (1, 1, \ldots, 1)$. Il s'agit d'un équilibre en stratégies dominantes.
   (b) $s^* = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, qui donne un bien-être strictement supérieur à celui de l'équilibre de Nash.
2) Il existe un unique équilibre de Nash, à savoir $s = ((1 + \theta(n-1)/n)^{-1}, (1+\theta(n-1)/n)^{-1}, \ldots, (1+\theta(n-1)/n)^{-1})$. Il s'agit d'un équilibre en stratégies dominantes. L'équilibre de Nash coïncide avec l'optimum social si $\theta = n$.

Exercice 6. — *Jeu du kidnapping*. — $NE_pur = \{(P, LT), (A, LL), (A, TL)\}$. Cherchons tous les Nash mixtes. Rappelons que TT est strictement dominée. Ensuite, cherchons d'abord les Nash tels que J1 joue P avec proba strictement positive. Dans ce cas, l'unique meilleure réponse de J2 est LL. L'unique meilleure réponse de J1 à LL est A. On retrouve alors un Nash pur. Prenons maintenant un Nash où J1 joue P. Alors les meilleures réponses de J2 est $\Delta(\{LL, LT\})$. De plus, P est meilleure réponse à $x \cdot LL + (1 - x) \cdot LT$ si et seulement si $x \leq 1/2$. Bilan :

$$NE_mix = \{(A, LL), (A, TL), (P, x \cdot LL + (1 - x) \cdot LT)\}$$