Cours de Traitement Du Signal - Filtrage numérique

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

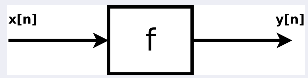
29 novembre 2007

Plan du cours

Objectifs

- Définition des FLID
- Représentations mathématiques des FLID
- Réalisation des FLID (AR/ARMA)
- Etude des filtres classiques
- Stabilité des filtres numériques
- Synthèse numérique des filtres analytiques

Notion de système discret



- Caractérisé par sa loi E/S :
- $y(n) = f[x(n)]$

Linéarité

Le système est linéaire $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \forall \lambda, \beta \in R$:

$$f(\lambda.x_1[n] + \beta.x_2[n]) = \lambda.f(x_1[n]) + \beta.f(x_2[n])$$

Invariance

Le système est invariant $\Leftrightarrow \forall p \in Z$:

$$y[n] = f(x[n]) \Rightarrow f(x[n-p]) = y[n-p]$$

Causalité

Le système est causal $\Leftrightarrow \forall x[n]$ signal causal , alors la réponse $y[n] = f(x[n])$ est causale.

Filtre linéaire

- Un filtre numérique est un Filtre Linéaire Invariant Discret
- Pour les signaux fonction du temps, seuls les filtres causaux sont implémentables en temps réel.

Convolution : rappel

Définition

$$x[n] * y[n] = \sum_{k \in Z} x[k].y[n-k]$$

Propriétés

- Commutativité : $(x * y)[n] = (y * x)[n]$
- Distributivité : $x[n] * (y_1[n] + y_2[n]) = x[n] * y_1[n] + x[n] * y_2[n]$
- Elément neutre : $x[n] * \delta[n] = x[n]$
- Décalage : $x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$
- Transformée en z :

$$TZ(x[n] * y[n]) = TZ(x[n]).TZ(y[n])$$

Convolution et filtrage

Réponse impulsionnelle

Définition : signal réponse d'un système discret à une impulsion unitaire (*Dirac* numérique)

$$h[n] = f(\delta[n])$$

Système de convolution

Relation entre l'entrée causale d'un système et sa sortie sous forme d'un produit de convolution :

$$y[n] = (x * h)[n] = (h * x)[n]$$

Fonction de transfert

- Calcul de la TZ de part et d'autre du système :

$$TZ(y[n]) = TZ(x * h[n])$$

- Application des propriétés de la TZ et de la convolution :

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

- $H(z) =$ Fonction de Transfert en Z du système
- Application : calcul de fonction de transfert globale

Gain complexe

- Calcul de la TF de part et d'autre du système :

$$Y(f) = H(f).X(f)$$

- Caractérisation fréquentielle de la réponse du filtre
- Calcul de $H(f)$ à partir de $H(z)$ pour $z = e^{j.T_e.2.\pi.f}$

Représentation d'un filtre numérique

Un filtre numérique peut être représenté par :

- son EDF liant son entrée et sa sortie
- sa Réponse Impulsionnelle
- sa Fonction de Transfert en z
- son gain complexe

Classes de filtres numériques

On classe les filtres suivant leur caractère récursif

- Non récursif : Réponse Impulsionnelle Finie
  $\longrightarrow$ Modèle MA
- Récursif : Réponse Impulsionnelle Infinie
  $\longrightarrow$ Modèle AR(MA)

Filtre ARMA

Définition

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i.z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{M} a_j.z^{-j}}$$

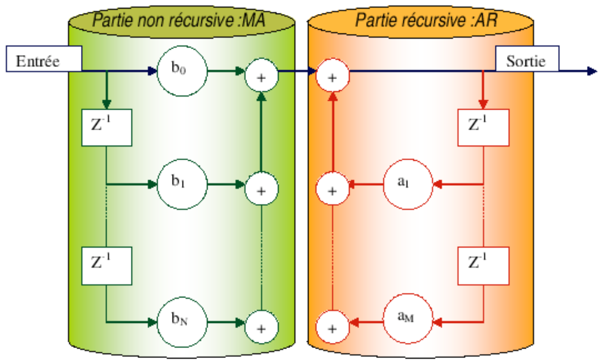
Propriétés

- Numérateur $\Rightarrow$ moyenne mobile (*Moving Average*)
- Dénominateur $\Rightarrow$ partie autorégressive (AR)
- Ordre du filtre = MAX(M,N)

EDF du filtre

$$y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + ... + b_N.x[n-N] + a_1.y[n-1] + ... + a_M y[n-M]$$

Représentation schématique



Les filtres à RIF ne possède que la partie gauche du schéma.
Les filtres RII possède au moins une boucle dans la partie droite du schéma.

Filtre ARMA équivalence des représentation

Propriétés

- Les différentes représentations (TZ, EDF ,RI...) sont équivalentes
- Une seule représentation suffit pour caractériser le filtre
- Différentes techniques permettent de passer d'une représentation à l'autre

Détermination de la RI

- Méthode directe : résolution de l'EDF pour $x[k] = \delta[k]$
- Détermination de la FT en z en utilisant la TZ puis inversion de la FT
- Exemple : déterminer la RI du filtre vérifiant :

$$y[n] - a.y[n-1] = x[n]$$

Représentation par pôles et zéros

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N}(1 - z_i.z^{-1})}{\sum_{j=1}^{M}(1 - p_j.z^{-1})}$$

Exemples de filtres

- Différentiateur $y[n] = x[n] - x[n-1]$ (MA d'horizon 1)
- Intégrateur $y[n] = y[n-1] + x[n]$ (AR d'ordre 1)
- $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ avec $|a| < 1$...

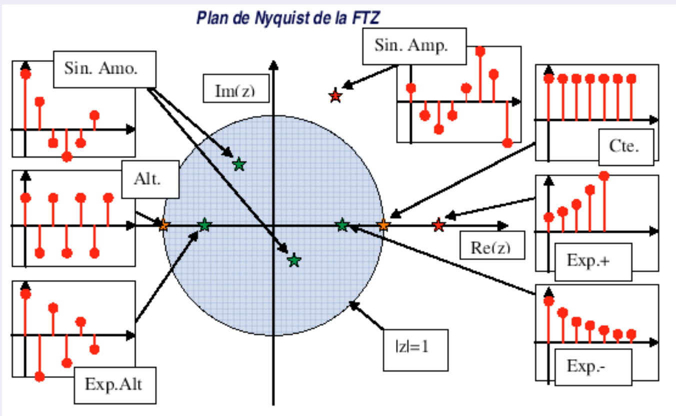
Définition

- Domaine "temporel" : stabilité EBSB
- Condition nécessaire et suffisante sur la réponse impulsionnelle :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$
- A vérifier uniquement pour les AR(MA)

Conséquences sur la FT

- Si on connait $H(z)$, fonction de transfert en z : le système est stable $\Leftrightarrow$ disque unité appartient au domaine de convergence
- Si le système est causal : système stable $\Leftrightarrow$ les pôles de $H(z)$ sont de module strictement inférieur à 1 (domaine de stabilité = disque unité)

Etude du plan de Nyquist (systèmes causaux



Comment choisir entre un filtre MA et AR

Problématique

- Cahier des charges sous forme de gabarit analogique
- Pour un gabarit donné, deux choix possibles :
  - filtre MA (RIF)
  - filtre AR(MA) (RII)
- Souvent, choix en fonction du critère de phase linéaire
  - si phase linéaire nécessaire $\Rightarrow$ choix MA
  - sinon choix d'un filtre récursif (RII)

Critères de comparaison

- Ressources (temps de calcul) : les RIF demandent plus de ressource que les RII (facteur 10)
- Phase : les RIF sont à phase linéaire, les RII ont une phase qui introduit des distorsions dans le temps de propagation

Autres critères

- Sensibilité aux perturbations
- Stabilité
- Bruit numérique

Passage entre filtre MA et AR

- Filtre MA à déphasage minimal (i.e., zéros à l'intérieur du disque unité)$\Leftrightarrow$ filtre AR d'ordre infini tronqué
- Filtre AR stable et d'ordre fini $\Leftrightarrow$ filtre MA infini tronqué
- Démarche basée sur l'identification et la combinaison des séries de Laurent

Exemple

$$y[n] = x[n] + a.x[n-1]\,,\ \text{avec } |a| < 1$$

Quelques filtres analytiques classiques

Démarche

- Choix d'un type de filtre
- Détermination de l'ordre du filtre analytique
- Détermination de $H(p)$ (table...)
- Détermination du filtre numérique par transformation $p \Rightarrow z$

Exemple

Filtre de Butterworth d'ordre N :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2.N}}$$

Transformations $p \Rightarrow z$

Solutions pour filtres RII (récursifs)

- Invariance impulsionnelle
  - $z = e^{p.Te}$: équivalence avec TL échantillonnée
  - Valable pour $f \in \left[-\frac{F_e}{2} \frac{F_e}{2}\right]$
  - Suppose que la fonction de transfert du filtre n'a pas de composantes hors de cette bande de fréquence
  - Peu utilisé sauf si signal bande limité et $f_c \ll \frac{f_e}{2}$
- Transformée Bi-Linéaire(TBL)
  - $p = k.\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
  - Bijection entre le demi plan gauche des p et le disque unité des z
  - Transformation de gabarit : correspondance entre la droite $p = j.\Omega$ et le cercle $z = e^{j.2.\pi.f/f_e}$
    - $\Omega = k.tan(\pi.f/f_e)$
    - En pratique on choisit $k = \frac{2}{Te} \rightarrow \Omega \approx 2.\pi.f$ pour $f << f_e/2$

Solutions pour filtres RIF (non récursifs)

- Méthode des fenêtres
  - Première étape : calcul de la RI idéale infinie du filtre à partir du gabarit simplifié (intégration de fonction porte et Heaviside)
  - Deuxième étape : tronquer la RI en la multipliant par une fenêtre (RIF). La fenêtre doit être symétrique (cf phase linéaire)
  - La méthode est sous-optimale et donne des ordres surévalués
- Méthode de Remez
  - Méthode la plus utilisée (cf matlab)
  - Donne un filtre d'ordre minimal satisfaisant un gabarit
  - En pratique, on utilise un logiciel (méthode itérative)