Chapitre 1 :
Rappels sur les probabilités et les Variables Aléatoires

1.1. Notions de probabilités

Contrairement aux signaux déterministes qui se représentent par une connaissance exacte d'un événement à travers une relation analytique connue et ceci quel que soit t, les signaux aléatoires se présentent sous forme imprévisible a priori. Alors, pour définir les caractéristiques de ces signaux on fait appel aux techniques de probabilités et de statistiques.

1.1.1. Espace de probabilité

Considérons un jeu de dé. Si on lance le dé pour n fois où on s'intéresse à l'événement suivant : « Apparition du chiffre 3 », si N_3 est le nombre de fois où cet événement se réalise, on dit :

$$f_n = \frac{N_3}{n}$$

est la fréquence d'apparition de l'événement.

si $n \to \infty$ on aura : $\lim_{n\to\infty} f_n = P = \frac{1}{6}$ où P est la probabilité d'apparition.

L'apparition de chaque chiffre parmi les six constitue un événement w. On définit ainsi, l'ensemble des événements élémentaires par : $\Omega = \{face\ 1, 2,3,4,5,6\}$. Ces événements, sont équiprobables où $P_i = \frac{1}{6}$.

Sur cet espace universel, un autre événement peut être défini. Par exemple, la probabilité d'avoir un nombre paire à chaque lancé du dé est égale à $\frac{1}{2}$. Cette fois-ci l'ensemble des événements contient deux éléments $\Omega = \{(1,3,5), (2,4,6)\}$

Quel que soit le nombre des événements, la probabilité de l'ensemble des événements est telle que : $P(\Omega) = \sum_i P_i = 1$. En outre, le cas équiprobable est défini par : $P_{i=} \frac{1}{card(\Omega)}$.

1.1.2. Densité de probabilité

Soit une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ et ayant des probabilités de réalisation dans l'intervalle $[0, 1]$ telles que :

$$\Omega:]a, b[\to [0, 1]$$

La densité de probabilité est donnée par : $P(]a, b[) = \int_a^b P(x)\, dx$.

1.1.3. Probabilité conditionnelle

Par ailleurs, on note $w|w_1$ l'ensemble des événements associés au résultat w sachant que l'événement w_1 s'est produit. On parle de « w si w_1 ».

- **Exemple :**

Une urne contient trois boules blanches et deux boules rouges. On tire au hasard deux boules en succession. Quelle est la probabilité que la première soit blanche et que la deuxième soit rouge ?

Les événements exclusifs sont tels que :

M_1 : la première boule tirée est blanche.

M_2 : la première boule tirée est rouge.

B_1 : la deuxième boule tirée est blanche.

B_2 : la deuxième boule tirée est rouge.

Ainsi, l'événement recherché est tel que : A= « la première boule est blanche et la deuxième boule est rouge ». Aussi, $M_1 \cup M_2 = \Omega$ et $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Enfin : $P(A) = P(M_1.B_2) = P(B_2|M_1).P(M_1)$.

$P(M_1)$=3/5. $P(B_2|M_1) = 2/4$. Alors : $P(A) = 3/10$.

1.1.4. Probabilité conjointe

La probabilité que deux événements A et B se réalisent est appelée probabilité conjointe de A et B, notée $P(A \cap B)$. Le calcul de cette probabilité s'effectue de manière différente selon que A et B sont dépendants ou indépendants, c'est-à-dire selon que la réalisation de l'un influence ou non celle de l'autre.

1.1.5. Axiomes de probabilités

La notion de probabilité P_i associée à un événement w se définit par le fait qu'elle doit satisfaire aux axiomes suivants :

$$P_i \geq 0$$

- *Axiome de la somme :* Si deux événements w_1 et w_2 sont mutuellement exclusifs, soit $w_1 \cap w_2 = \emptyset$, alors :

$$P_{w1 \cup w2} = P_{w1} + P_{w2}$$

Au dé la probabilité d'avoir un 3 est de 1/6, de même celle de tirer un 4. Ces événements sont mutuellement exclusifs et la probabilité de tirer un 3 ou un 4 est de 2/6.

Dans le cas contraire, par exemple $w_1 \subset w_2$, cette probabilité devient : $P_{w1 \cup w2} = P_{w1} + P_{w2} - P_{w1 \cap w2}$.

- *Axiome de produit :* Dans ce cas nous avons:

$$P_{w1 \cap w2} = P_{w1|w2} P_{w2} = P_{w2|w1} P_{w1}$$

- *Loi de composition* : en vertu de ce qui vient d'être dit, on déduit que :

$$P_{\overline{w}} = 1 - P_w$$

Au dé la probabilité de tirer un « 5 » est de 1/6 et la probabilité de ne pas tirer ce numéro est de 5/6.

1.1.6. Indépendance statistique

Deux événements w_1 et w_2 sont dits statistiquement indépendants, si :

$$P_{w1 \cap w2} = P_{w2} . P_{w1}$$

Cela permet de déduire que : $P_{w1|w2} = P_{w1}$ et $P_{w2|w1} = P_{w2}$. Qui veut dire que la probabilité que l'un des événements se produise n'est nullement influencée par la réalisation de l'autre.

1.1.7. Probabilité a postériori

Soit, $w_1, w_2, \cdots, w_n$ des événements mutuellement exclusifs et non indépendants d'une expérience. Ces événements sont appelés hypothèses. La probabilité qu'un événement se réalise sachant tous les autres événements est donnée par :

$$P_w = \sum_{i=1}^{n} P_{w|wi} . P_{wi}$$

Dans ce cas, la formule de Bayes :

$$P_{wi|w} = \frac{P_{w|wi} P_{wi}}{P_w}$$

La probabilité $P_{wi|w}$ est la probabilité que l'hypothèse wi soit satisfaite sachant que w s'est effectivement produit. C'est la probabilité a posteriori (on sait que w s'est produit) de w_i tandis que P_{wi} est la probabilité a priori.

- **Exemple :**

Dans un test de diagnostique, considérons le fait d'être malade comme étant un événement E et le fait d'être homme H ou femme F comme cause potentielle. Il est clair que P_H=P_F=0,5. Supposons aussi, que 30% des hommes sont malades et seulement 10% des femmes le sont. On a donc $P_{E|H}$=0,3 et $P_{E|F} = 0{,}1$. Maintenant, on peut se demander si une personne est malade, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme?

$$P_{H|E} = \frac{P_{E|H}P_H}{P_E} = \frac{P_{E|H}P_H}{P_{E|H}P_H + P_{E|F}P_F}$$

$$P_{H|E} = \frac{0{,}3 \times 0{,}5}{0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}5} = 0{,}75$$

1.2. Variable aléatoire

Supposons qu'une expérience ait été décrite par ses événements élémentaires, qui sont mutuellement exclusifs. Un événement particulier consiste en la réunion d'un certain nombre de ces événements élémentaires. La probabilité de cet événement est la somme des probabilités des événements élémentaires.

Une variable aléatoire est définie par correspondance biunivoque avec un ensemble d'événements élémentaires et est caractérisée par la distribution de probabilité de cet ensemble. Globalement, une variable aléatoire *X* est une application qui affecte à chaque événement *w* un nombre réel *x*.

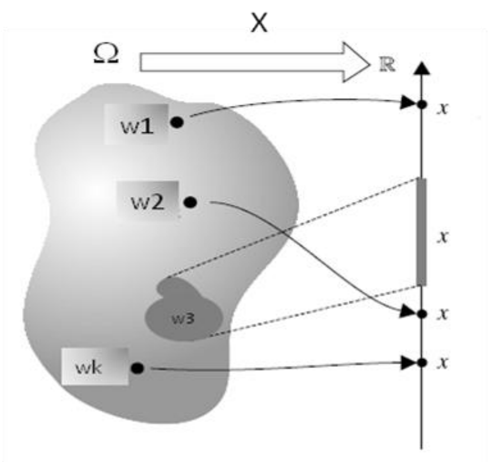

Figure 1.1. Représentation d'une variable aléatoire

Reprenant, l'expérience qui consiste à lancer un dé à six faces. Les six événements possibles sont: 1,2,3,4,5,6. On peut associer à chaque événement la valeur de la face. Ceci définit une variable aléatoire (VA) à six valeurs qui ont chacune une probabilité de 1/6. Dans ce cas, la variable aléatoire est scalaire, discrète et monodimensionnelle.

- **Remarque :**

On peut aussi associer à chaque événement le carré du chiffre de chaque face et l'on aura une nouvelle VA dont les valeurs sont : 1,4,9,16,25,36 toujours avec une probabilité d'apparition de 1/6.

Ceci nous explique qu'à partir d'un ensemble d'événements élémentaires, plusieurs variables aléatoires peuvent être définies. Par exemple, considérons une autre expérience qui consiste en le relevé de toutes les communications téléphoniques partant d'une centrale. On peut définir une VA qui est la durée des communications. Cette VA est réelle, scalaire et continue. Une autre VA possible est le numéro de l'appelé qui est une variable scalaire, discrète et entière. Aussi, une autre VA concernant les coordonnées géographiques, etc.

1.2.1. Fonction de répartition (distribution cumulative)

Soit une VA X dont le domaine de définition est supposé être $[-\infty, +\infty]$, même si elle ne peut pas prendre des valeurs dans certains sous-domaines. Une telle VA est entièrement définie par sa fonction de répartition $F_X(x)$. On a :

$$F_X(\alpha) = P(x \leq \alpha)$$

C'est donc la probabilité que X prenne une valeur inférieure à un seuil α.

La fonction de répartition vérifie les propriétés suivantes :

1. $F_X(-\infty) = 0, F_X(+\infty) = 1$
2. $F_X(a) \leq F_X(b) \;\; si\; a < b$
3. $p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
4. $F_X(x)$ est monotone et non décroissante.

- **Remarque :**

On dit que la variable est discrète si sa fonction de répartition est en escalier. Ainsi, elle peut s'écrire comme suit :

$$F_X(x) = \sum_i p_i \, u(x - x_i)$$

Ceci dit, $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_{i=1}$ et $u(x)$ est la fonction échelon. Ainsi, la VA ne peut prendre que des valeurs discrètes x_i avec des probabilités p_i. Par ailleurs, une VA est dite continue si sa fonction de répartition est continue.

- **Exemple :**

On considère l'expérience de « jeter un pièce » avec : $\begin{cases} a = pile \\ b = face \end{cases}$, l'espace de probabilité est : $\Omega = \{a, b\}$.

Les probabilités de réalisation des événements sont telles que : $P_r(a) = P, P_r(b) = F, P + F = 1$.

On considère alors une variable aléatoire appelée « indicatrice » et qui est binaire telle que :

$$x = \begin{cases} 1 & pour\ X(a) \\ 0 & pour\ X(b) \end{cases}$$

La distribution (la fonction de répartition) de cette variable aléatoire F(x) :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\{\Omega\} = 1 \qquad pour\ x \geq 1$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F \qquad pour\ 0 \leq x < 1$$

- **Médiane d'une variable aléatoire**

On appelle médiane d'une VA, la valeur « *md* » pour laquelle $F_X(md) = P(X \leq md) = \frac{1}{2}$.

1.2.2. Fonction de densité de probabilité

Pour une fonction de répartition continue, on définit la fonction de densité de probabilité (de l'anglais : *Probability Density Function* ou *pdf)* par : $P_X(x) = \frac{dF_X}{dx}$

C'est la probabilité que la VA prenne une valeur comprise dans un intervalle x et $x + dx$

On en déduit alors : $p[a < X \leq b] = \int_a^b P_X\,(x)dx$

En particulier, $p[x < X \leq x + dx] = P_X(x)dx$ ce qui explique l'appellation de densité de probabilité.

Aussi, pour des variables aléatoires discrètes, la densité de probabilité revient donc à :

$$P_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

Avec $\delta(x)$ est la fonction de Dirac. Les figures suivantes schématisent la densité de probabilité avec la fonction de répartition correspondante.

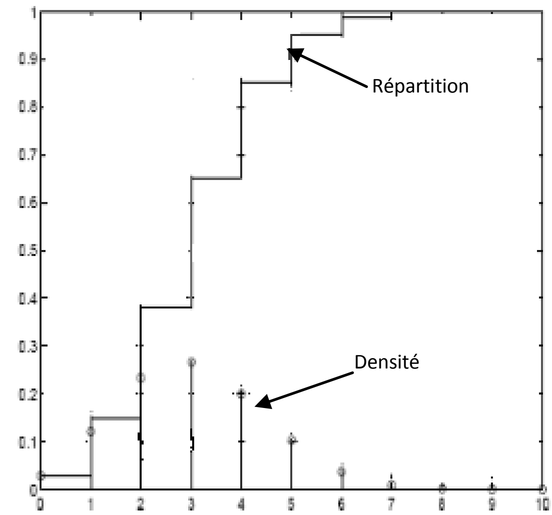

Figure 1.2. Variable aléatoire discrète : *densité de probabilité et fonction de répartition*

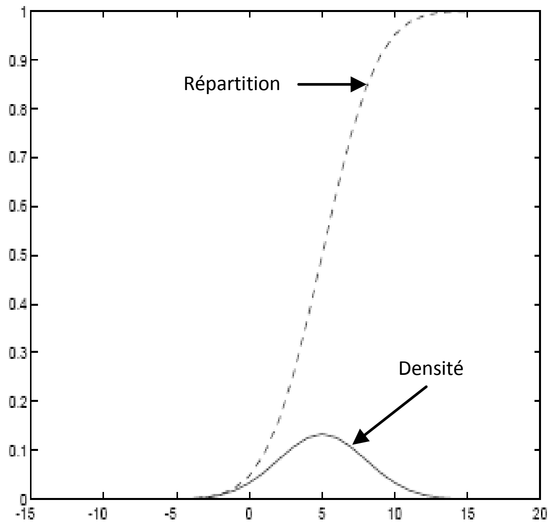

Figure 1.3. Variable aléatoire continue : *densité de probabilité et fonction de répartition*

1.2.3. Moments d'une variable aléatoire

Pour caractériser complètement une VA, nous devons connaître sa fonction de densité de probabilité. Cette densité peut être caractérisée par quelques nombres appelés moments statistiques. Généralement, les moments d'une VA peuvent être calculés par la relation suivante où le moment d'ordre *n* correspond à :

$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, P_X(x) dx$ pour le cas continu

$E[X^n] = \sum_i x_i^n P_X(x)$ pour le cas discret

- **Propriétés :**

Si X et Y sont deux VA définies sur le même univers Ω, admettant une espérance :

- ✓ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- ✓ $E[aX] = a.E[X], \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$
- ✓ Si $X \geq 0$, alors : $E[X] \geq 0$

a) Moment du premier ordre : Espérance mathématique

La valeur espérée ou moyenne mathématique d'une VA X est donnée par :

$$E[X] = m_X = \begin{cases} \sum_k x_k P_k & X \text{ discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x.P_X(x)dx & X \text{ continue} \end{cases}$$

La moyenne μ_X constitue le centre de gravité de la VA.

b) Statistiques du second ordre

- ***Puissance***

Le moment d'ordre 2 correspond à la puissance moyenne totale de la VA :

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, P_X(x)dx = \sigma_{eff}^2$ (cas continu)

$E[X^2] = \sum_i x_i^2 P_X(x)$ (cas discret)

- ***Variance***

La variance d'une VA est le moment centré d'ordre 2. Elle est définie par :

$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E[X]]^2 P_X\,(x)dx$ (cas continu)

$Var[X] = \sum_i [x_i - E[X]]^2\, P_X(x)$ (cas discret)

La variance est le carré de l'écart-type σ_X et correspond à la puissance des fluctuations autour de la valeur moyenne :

$$Var[X] = E[X^2] - [E[X]^2]$$

- ***Covariance de deux variables aléatoires***

La covariance entre deux variables aléatoires X et Y est telle que :

$$Cov(x,y) = E[(X - mx)(Y - my)] = E[XY] - mx.my$$

La covariance permet de mesurer la variation simultanée de deux variables aléatoires. C'est à dire que la covariance devient positive pour chaque couple de valeurs qui différent de leur moyenne dans le même sens, et plus négative pour des valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.
Deux variables ayant une covariance non nulle sont dites dépendantes. Par contre, la covariance est nulle dans le cas où les deux variables sont indépendantes. Cela se traduit par le fait que :

$$E[XY] = E[X].E[Y] = mx.my$$

- ***Corrélation de deux variables aléatoires***

La corrélation entre deux variables aléatoires est exprimée par le moment du produit.

$$r(x,y) = E[XY]$$

Aussi, on définit le coefficient de corrélation entre deux variables X et Y par :

$$\rho_{XY} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

Ainsi, lorsque $\rho_{XY} = \pm 1$, X et Y sont totalement liées tandis que $\rho_{XY} = 0$, lorsque la covariance des deux variables est nulle.

- ***Moment d'ordre trois***

Appelé aussi le skew, il est donné par :

$$S_X = E\left\{\left[\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right]^3\right\} = \frac{1}{\sigma_X^3}\gamma_X^3$$

- ***Moment d'ordre quatre***

Ce moment est appelé Kurtosis, il est donné par :

$$K_X = E\left\{\left[\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right]^4\right\} - 3 = \frac{1}{\sigma_X^4}\gamma_X^4 - 3$$

Les moments d'ordre 3 et 4 sont utilisés pour caractériser les singularités complexes dans un signal.

1.2.4. Fonction caractéristique

La fonction caractéristique associée à une VA est la fonction complexe donnée par :

- Pour le cas continu : $\Phi_X(w) = E\{e^{jwx}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwx} P_X(x)dx$
- Pour le cas discret : $\Phi_X(w) = E\{e^{jwx}\} = \sum_k e^{jwx_k} . P_k$

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

- $\Phi_X(0) = 1$
- $\Phi_X(w) = \Phi_X(-w)$
- $|\Phi_X(w)| \leq 1$

La fonction caractéristique contient les informations relatives à tous les moments. D'un point de vue calcul elle n'est qu'une transformée de Fourier avec *–w* au lieu de *w*. Ainsi, le calcul de la densité de probabilité à partir de cette fonction se fait comme suit :

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(w) e^{-jwx} dw$$

1.2.5. Fonction génératrice

Soit X une VA discrète. La fonction générant les probabilités de cette variable est définie par :

$$G_X(z) = E[z^x] = \sum_k z^k P_X(k) = \sum_k z^k P_k$$

Ainsi, la fonction génératrice de probabilités d'une variable aléatoire discrète n'est que la transformée en Z (avec une différence du signe) de sa *pdf.*

- **Remarques :**

1) La fonction caractéristique est égale à $\Phi_X(w) = G_X(e^{jw})$.
2) LA moyenne de la variable aléatoire peut être calculée par : $E[X] = G'_X(1)$.

- **Exemple :**

On considère une VA X ayant les valeurs suivantes :

k	0	1	3	somme
P_k	1/2	1/3	1/6	1

La fonction génératrice est telle que :

$$G_X(z) = z^0(1/2) + z^1(1/3) + z^3(1/6) = \frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z^3}{6}$$

$G'_X(1) = \frac{z^2}{2} + \frac{1}{3}|_{z=1} = \frac{5}{6}$.

$E[X] = 0 + \frac{1\times1}{3} + \frac{3\times1}{6} = \frac{5}{6}$.

1.2.6. Indépendance statistique

Deux VA sont statistiquement indépendantes si : $P(X,Y) = P_X(x).P_Y(y)$. Sous cette condition on aura : $E[X,Y] = E[X].E[Y]$

- **Remarques :**

1) Lorsque deux VA sont indépendantes elles ne sont pas corrélées.

2) La non corrélation n'implique pas l'indépendance.

3) Lorsque le coefficient d'intercorrélation de deux VA est nul, ces variables sont dites orthogonales : $\rho_{XY} = r_{XY} = E[x.y] = 0$.

1.2.7. Couple de deux variables aléatoires

Un couple de deux VA X et Y est caractérisé par sa fonction de répartition qui s'écrit :

$$F_{XY}(x,y) = p\{X < x \; et \; Y < y\}$$

La densité de probabilité est donnée par :

$$P_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Si les VA sont liées : $P(Y|X) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} = \frac{P_Y(y)P(X|Y)}{P_X(x)}$

Si les VA sont indépendantes : $P(Y|X) = P_Y(y)$

Si les VA ne sont pas corrélées : $E[X,Y] = E[X].E[Y]$

- **Exemple :**

Considérons une variable θ avec une densité de probabilité telle que :

$$P_\theta(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \theta \in [0, 2\pi] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On définit deux VA par :

$X = sin(\theta)$ et $Y = cos(\theta)$

Ces deux VA sont centrées (de moyenne nulle), de plus la covariance est donnée par :

$$C_{XY} = \int_0^{2\pi} sin(\theta)\, cos(\theta) P_\theta(\theta) d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} sin(2\theta) d\theta = 0$$

Ceci dit, les deux VA sont non corrélées alors qu'il existe une relation certaine entre elles. Ainsi, dès qu'une valeur particulière de θ se réalise, le cos et le sin sont définis et se trouvent reliés par : $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$. En conclusion, les deux VA sont non-corrélées mais elles sont dépendantes.

1.2.8. Vecteur aléatoire

L'ensemble des observations d'un signal peut être considéré comme une collection de VA groupées pour former un vecteur aléatoire. Considérons $\underline{X} = [X_1, \cdots, \mathrm{X_n}]$ un vecteur aléatoire, ayant un vecteur de moyenne tel que : $\underline{m}_X = [m_1, \cdots, m_n]$. Pour ce vecteur, on définit une matrice de covariance $C_X = E[\underline{X}, \underline{X}^T]$. Ainsi, cette matrice s'écrit comme suit :

$$C_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice carrée symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

- **Remarque**

Si les composantes du vecteur aléatoire sont indépendantes, la matrice de covariance est diagonale.

1.2.9. Variable aléatoire complexe

Dans certaines applications on a besoin de gérer des signaux complexes et des modèles de bruit nécessitant des variables et des vecteurs complexes. Les variables aléatoires complexes présentent un intérêt pour les télécommunications. La variable complexe est constituée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire qui sont toutes deux réelles. De ce fait, la fonction de répartition et la densité de probabilité de la VA complexe sont celles d'une variable à deux dimensions.

$$Z = X + JY$$

Ainsi, l'espérance mathématique ou la moyenne est donnée par : $E[Z] = E[X] + jE[Y]$

Aussi, par définition la variance d'une VA complexe est telle que :

$$\sigma_Z^2 = E[(Z - m_Z)(Z - m_Z)^*] = E[(Z - m_Z)^2]$$

Après calcul, on obtient : $\sigma_Z^2 = E[(X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

1.3. Transformations des variables aléatoires

Plusieurs applications de traitement du signal requièrent des transformations sur le vecteur aléatoire. De telles transformations sont données par : $Y = g(X)$. A partir des caractéristiques de X (densité et fonction de répartition), les caractéristiques de Y sont obtenues comme suit :

- La fonction de répartition :

  - ✓ Si g est une fonction croissante : $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$
  - ✓ Si g est une fonction décroissante : $F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$

- La densité de probabilité :

$$P_Y(y) = \frac{P_X\left(g^{-1}(y)\right)}{|g'(x)|}$$

Lorsque X et Y sont des vecteurs de variables aléatoires, la transformation s'écrit par $Y = g(X) = A.X$, avec A une matrice $L \times M$. L et M sont les dimensions des vecteurs Y et X respectivement. Alors, la fonction de densité de probabilité de Y, $P_Y(y)$ peut être obtenue à partir de celle de X. Cette *pdf* est donnée par :

$$P_Y(y) = \frac{P_X\left(g^{-1}(y)\right)}{|\mathbb{J}|}$$

$\mathbb{J}$: Jacobien de la transformation et c'est le déterminant de la matrice A.

- **Quelques transformations courantes:**

➢ *Transformation linéaire*

$Y = aX + b$, a et b sont des constantes, la densité de probabilité est : $P_Y(y) = \frac{1}{|a|} P_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

➢ *Transformation quadratique*

$Y = aX^2$, densité de probabilité : $P_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}}\left[P_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + P_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right] U(y)$

➢ *Transformation hyperbolique*

$Y = {}^{a}/_{X}$, densité de probabilité : $P_Y(y) = \frac{|a|}{y^2} P_X\left(\frac{a}{y}\right)$

➢ *Redresseur symétrique*

$Y = |X|$, densité de probabilité : $P_Y(y) = [P_X(y) + P_X(-y)]U(y)$

➢ *Transformation en sinus*

$Y = a.sin(X + \theta)$, la densité de probabilité : $P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_X\,(x_n)$ pour $\begin{cases} |y| < a \\ nulle\ ailleurs \end{cases}$

Si P_X est uniforme sur $[0, 2\pi]$ et a=1, on aura : $P_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$

- **Exemple 1 :**

$Y = X^2$, dans ce cas, $y = f(x)$ possède deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{y} \\ x_2 = -\sqrt{y} \end{cases}$$

Si F_X est une fonction paire (c.à.d : $F_X(a) = F_X(-a)$), on aura : $P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[P_X(\sqrt{y})\right]U(y)$

➢ *Cas particulier : somme des VA*

Souvent, une VA est décrite par une combinaison linéaire de *M* variables aléatoires statistiquement indépendantes.

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_Mx_M$$

C_k : des constantes.

On veut calculer les moments d'ordre 1 et 2 ainsi que la *pdf* de *y*.

La moyenne : $\mu_y = \sum_{k=1}^{M} C_k\, \mu_{x_k}$

La variance : $\sigma_y^2 = E\left\{\left|\sum_{k=1}^{M} C_k\left[x_k - \mu_{x_k}\right]\right|^2\right\} = \sum_{k=1}^{M} C_k^2\, \sigma_{x_k}^2$

Pour définir la PDF, considérons d'abord la combinaison de deux variables aléatoires :

$$Y = X_1 + X_2$$

La fonction caractéristique de y est donnée par : $\Phi_y(w) = E\{e^{jwy(y)}\} = E\{e^{jw[x_1+x_2]}\}$

$$\Phi_y(w) = E\{e^{jwx_1}\}.E\{e^{jwx_2}\} = \Phi_{x_1}(w).\Phi_{x_2}(w)$$

A partir de la propriété de convolution de Fourier, $P_Y(y) = P_{X_1}(y) * P_{X_2}(y)$

- **Exemple 2 :**

Soit $\{X_k\}_{k=1}^4$ un vecteur de quatre variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0,1]$. Calculer la PDF de la variable *Y* définie par : $Y_M = \sum_{k=1}^{M} X_k$, $k = 2,3,4$.

Soit $P_X(x)$ la PDF d'une VA uniforme sur $[0,1]$, donc :

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Alors :

$$p_Y(y) = p_{X_1}(y) * p_{X_2}(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- **Exemple 3 :**

La position d'une cible mobile est caractérisée par les coordonnées x et y qui sont considérées comme étant des variables aléatoires suivant une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 0.2$. La densité de probabilité conjointe des deux variables est telle que :

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

Pour trouver la distance par rapport à un capteur, on passe aux coordonnées polaires selon la transformation :

$$(X,Y) = (Rcos\,\Theta, Rsin\,\Theta)$$

R et Θ sont aléatoires et prennent comme valeurs r et θ, respectivement. On veut déterminer la *pdf* conjointe de ces deux variables.

A partir de l'équation précédente, il est clair qu'on dispose de la transformée inverse g^{-1} (et donc la matrice A^{-1}) permettant d'avoir les coordonnées cartésiennes x et y des coordonnées polaires pour lesquelles on cherche la *pdf*.

Le jacobien de la transformation vaut $1/_r$, sachant que r est le déterminant de la matrice $A^{-1} = (g^{-1})'$.

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r.\sin\theta & r.\ cos\ \theta \end{vmatrix} = r$$

Et la probabilité conjointe des variables R et Θ est donnée par :

$$P_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} exp^{-\left[(r.cos\theta)^2+(r.sin\theta)^2\right]/2\sigma^2}$$

Les *pdf* de R et Θ seront donc obtenues par marginalisation.

1.4. Lois de probabilité importantes

Les modèles de VA sont nécessaires pour décrire des phénomènes physiques complexes.

1.4.1. Loi à deux valeurs

La VA X peut prendre deux valeurs a et b avec des probabilités respectives P_a et P_b sachant que $P_a + P_b = 1$. La densité de probabilité est donnée par :

$$P_X(x) = P_a\delta(x-a) + P_b\delta(x-b)$$

δ : fonction de Dyrac

La fonction de répartition est donc : $F_X(x) = P_a U(x-a) + P_b U(x-b)$

U : échelon unité.

Les moments sont tels que : $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P_X\,(x)dx = a^n P_a + b^n P_b$

Et la fonction caractéristique s'écrit comme :

$\Phi_X(w) = E\left[e^{jwX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwx}\, P_X(x)dx = e^{jwa} P_a + e^{jwb} P_b$

1.4.2. Loi binomiale

Soit un événement w associé à une expérience. Cet événement a une probabilité P de survenir. On reproduit *n* fois l'expérience et l'on s'intéresse à la VA X qui donne le nombre de succès de w durant les *n* essais. Par exemple, une urne contient *nb* billes blanches et *nn* billes noires. L'événement w est considéré comme étant le tirage d'une bille blanche. On effectue *n* tirages avec remise de la bille à chaque fois. La VA est discrète et peut prendre des valeurs comprises entre 0 et *n*. La densité est donc du type :

$$P_X(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i \, \delta(x-i)$$

Avec : $P_k = A_n^k P^k (1-P)^{(n-k)}$ et $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

1.4.3. Loi de poisson

La densité est du type : $P_X(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i \, \delta(x-i)$

Avec : $P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ et $m_X = \sigma_X^2 = \lambda$

1.4.4. Loi uniforme

La densité de probabilité est telle que : $\begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

La moyenne $m_X = \frac{a+b}{2}$ et la variance est : $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

1.4.5. Loi de Gauss ou loi normale

Une VA gaussienne a une densité de probabilité est décrite par :

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-(x-m_X)/2\sigma_X^2}$$

On utilise souvent les fonctions : $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Si deux VA sont gaussiennes et indépendantes, la somme est une VA gaussienne dont la moyenne et la variance sont obtenues par la somme des moyennes et des variances des deux VA. La distribution gaussienne est la seule qui présente une équivalence entre l'indépendance et la non corrélation.

1.5. Théorème de la limite centrale

Soit $\{X_k\}_{k=1}^{M}$ une collection de variables aléatoires mutuellement indépendantes, ayant la même distribution et ont des moyennes et des variances finies. Alors, la distribution de leur somme normalisée $Y_M = \frac{\sum_{k=1}^{M} X_k - m_{y_M}}{\sigma_{y_M}}$ s'approche de celle d'une variable aléatoire normale de moyenne nulle et variance unité et cela, lorsque $M \to \infty$.

- **Résumé : Lois de probabilité importantes**

Nom	Distribution $F_X(x)$	Densité de probabilité $P_X(x)$	$m_x,\ \sigma$
Loi à 2 valeurs a et b	$F_X(x) = p_a u(x-a) + p_b u(x-b)$	$P_X(x) = p_a \delta(x-a) + p_b \delta(x-b)$	$m_x = ap_a + bp_b$
Uniforme	$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \leq X \leq b \\ 0 & ailleurs \end{cases}$	$m_x = \frac{a+b}{2}$, $\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$
Gauss (normale)	$F_X(x) = 1 - \varphi((x-\mu)/\sigma)$ $\varphi(x) = \left(1/\sqrt{2\pi\pi}\right) \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$	$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-}\ (x-\mu)^2/2\sigma^2$	$m_x = \mu$, σ
Poisson	$F_X(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i\, u(x-i)$ $p_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$	$P_X(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i\, \delta(x-i)$ $p_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$	$m_x = \sigma^2 = \lambda$
Rayleigh	$F_X(x) = \left(1 - e^{-x^2/2\alpha^2}\right)$	$P_X(x) = R(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2}$	$m_x = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}\#1.25\alpha$ $\sigma = \alpha\sqrt{2-\pi/2}\#0.66\alpha$