Université Sultane Moulay Slimane

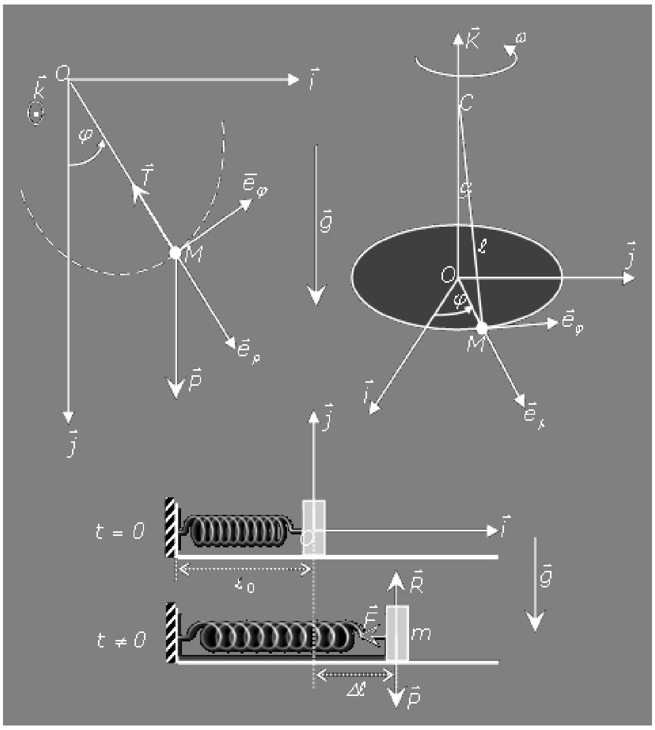
Faculté Polydisciplinaire

Béni Méllal

FILIÈRE :SMP/SMC/SMA

MODULE : M1/M1/M4

Travaux dirigés corrigés
Mécanique du Point Matériel



Préparé par Mohamed LAMSAADI

Année universitaire 2012-2016

Série N° 1
Rappels et Compléments Mathématiques

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ ,\ \vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\ \text{ et } \vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

2. Calculer $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$ et les produits $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

3. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

4. Montrer que le vecteur $\vec{v}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

5. Montrer que le vecteur $\vec{v}_4$ appartient au plan (P)

6. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$

7. Calculer le produit mixte $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2

On considère dans le plan xOy deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tournant autour de l'axe (Oz). Soit $R(O,x,y,z)$ un repère muni de la base O.N.D $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En posant $(\vec{Ox},\vec{u}) = \theta$ ($\theta = \omega t$, ω est une constante). Soit $\vec{r} = \cos bt\ \vec{i} + \sin bt\ \vec{j} + t^2\vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire (a et b sont des constantes)

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2. Déterminer le vecteur $\vec{w}$, tel que le système $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ constitue une base O.N.D

3. Calculer $\left.\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

4. Calculer $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

5. Calculer $\left.\dfrac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R$ dans les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 3

1. Considérons deux points A et B, définis en coordonnées cartésiennes par : $A(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$ et $B(0,1,0)$.

Donner les coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ) de ces deux points, respectivement dans les bases $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

2. Dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point M est repéré, à tout instant t, par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) telles que :

$$r(t) = a\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1\right),\ \ \theta(t) = \frac{\pi}{4\tau}t\ \text{ et }\ \varphi(t) = \frac{\pi}{3}$$

(a et τ sont des constantes positives)

Tracer qualitativement la courbe (C) décrite par les positions successives du point M quand t varie de 0 à 2τ.

Exercice 4

Considérons un repère orthonormé direct $\Re\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. En tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, on définit une quantité physique f telle que : $f(x,y,z)=r^2$ avec $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

1. Calculer le gradient du champ scalaire f, $\overrightarrow{gradf}$, et la différentielle totale de f, df.

2. Montrer qu'en tout point M, $df=\overrightarrow{gradf}\,d\overrightarrow{OM}$ ($d\overrightarrow{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire)

3. Considérons le champ scalaire f, donné en tout point de l'espace par :

$$f(M)=3r^3\,sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)$$

Exprimer $\overrightarrow{gradf}$ dans les bases sphérique$\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$ et cartésienne $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

4. Soit une fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z)$ définie dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par :

$$\vec{f}(x,y,z)=x^2yz\,\vec{i}+xy^2z\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

Calculer $div\vec{f}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}$.

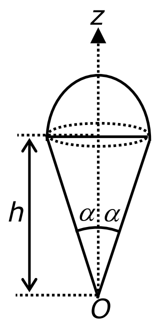
Exercice 5

Un enfant achète un cornet de glace. La glace fait une demi boule (sphérique) et remplit le cornet (de forme conique) de hauteur h = 11cm et d'angle $2\alpha=30°$ (figure ci-contre).

1. Calculer le volume V_b de la demi boule en fonction de h et $tan(\alpha)$.

2. Calculer le volume V_c du cornet en fonction de h et $tan(\alpha)$.

3. En déduire le volume total de la glace (exprimé en litre) que mangera l'enfant.



devoir à la maison

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\Re\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis à tout instant t par : $\vec{u}=sin(t)\vec{i}+cos(2t)\vec{j}+t^2\vec{k}$, $\vec{v}=e^{-t}\vec{i}-2\,cos(3t)\vec{j}+sin(3t)\vec{k}$

1. Déterminer $\dfrac{d\vec{u}}{dt/\Re}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{dt/\Re}$ à l'instant t = 0.

2. Déterminer l'instant t1 où le vecteur $\vec{w}=e^{3t}\vec{i}+cos(3t)\vec{j}-2\,sin(3t)\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$.

Exercice 2

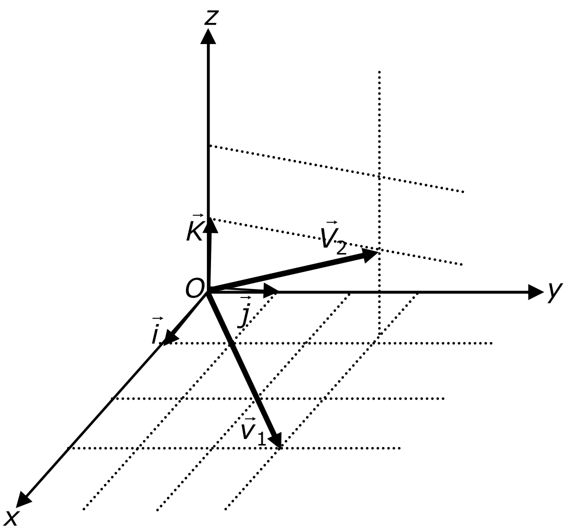
Dans le plan horizontal (xoy) d'un repère orthonormé direct $\Re\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, un point M est repéré à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ,φ) telles que $\rho(t)=a\,cos(\omega t)$ et $\varphi(t)=\omega t$ (a et ω étant des constantes positives, $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{e}_\rho$ et $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}}\right)$)

1. Dans la base polaire $\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi\right)$, calculer le vecteur $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}$

2. Dans la base polaire $\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi\right)$, déterminer puis représenter les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ à l'instant $t=\pi/(4\omega)s$

Exercice 1

1.



2.

- $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ **,** $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
- $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 3 \times 1 + 3 \times 3 + 0 \times 1 = 12$
- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (3 \times 1 - 0 \times 3)\vec{i} - (3 \times 1 - 0 \times 1)\vec{j} + (3 \times 3 - 3 \times 1)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

3.

$$\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = arccos\left(\frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| . \|\vec{v}_2\|}\right) = arccos\left(\frac{12}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = arccos\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right)$$

Ou bien $\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = arcsin\left(\frac{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\| . \|\vec{v}_2\|}\right) = arcsin\left(\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$

$$\Rightarrow \left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = 31.48°$$

4.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 . \vec{v}_3 = 3 \times 1 - 3 \times 1 + 0 \times 2 = 0 \\ \vec{v}_2 . \vec{v}_3 = 1 \times 1 - 3 \times 1 + 1 \times 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \text{ et } \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_3 \perp (P)$$

5.

$\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{K} \Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_4 \in (P)$

6.

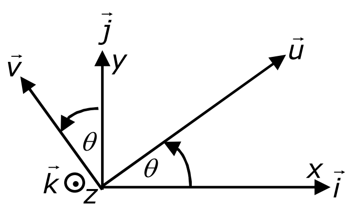
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{53}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\vec{k}$$

7.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \vec{v}_1(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 18 \\ (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \vec{v}_2(\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1) = 18 \\ (\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_3(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = (\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$\Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2



1.

$\vec{u} = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}$, $\vec{v} = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$

2.

Pour que le système $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ constitue une base O.N.D, if faut $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right) = \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = \vec{k}$$

3.

$$\left.\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R = \left.\frac{d\left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right)}{d\theta}\right|_R = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j} = \vec{v}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R = \left.\frac{d\left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right)}{d\theta}\right|_R = -cos(\theta)\vec{i} - sin(\theta)\vec{j} = -\vec{u}$$

4.

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right)}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\, sin(\theta)\vec{i} + \dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j} = \dot{\theta}\vec{v} = \omega\vec{v}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right)}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{i} - \dot{\theta}\, sin(\theta)\vec{j} = -\dot{\theta}\vec{u} = -\omega\vec{u}$$

5.

$$\left.\frac{d(\lambda\, \vec{r})}{dt}\right|_R = \lambda\left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_R + \vec{r}\,\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_R = -b\, sin(bt)\,\vec{i} + bcos(bt)\,\vec{j} + 2t\vec{k}\ ,\ \frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\lambda\, \vec{r})}{dt}\right|_R = e^{-at}\left[\left(-b\, sin(bt) - a\, cos(bt)\right)\vec{i} + \left(bcos(bt) - asin(bt)\right)\vec{j} + \left(2t - at^2\right)\vec{k}\right]$$

$$\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} + \vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} = \left(-\omega\, sin(\theta)\vec{i} + \omega\, cos(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(cos(bt)\,\vec{i} + sin(bt)\,\vec{j} + t^2\vec{k}\right)$$

$$= -\omega\, sin(\theta)sin(bt)\vec{k} + \omega\, sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \omega\, cos(\theta)\, cos(bt)\vec{k} + \omega\, cos(\theta)t^2\,\vec{i}$$

$$= \omega\, cos(\theta)t^2\,\vec{i} + \omega\, sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \left(\omega\, sin(\theta)sin(bt) + \omega\, cos(\theta)\, cos(bt)\right)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = \left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(-b\, sin(bt)\,\vec{i} + bcos(bt)\,\vec{j} + 2t\vec{k}\right)$$

$$= cos(\theta)bcos(bt)\vec{k} - 2t\, cos(\theta)\vec{j} + sin(\theta)b\, sin(bt)\vec{k} + 2t\, sin(\theta)\vec{i}$$

$$= 2t\, sin(\theta)\vec{i} - 2t\, cos(\theta)\vec{j} + \left(cos(\theta)bcos(bt) + sin(\theta)b\, sin(bt)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \omega\, cos(\theta)t^2\,\vec{i} + \omega\, sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \left(\omega\, sin(\theta)sin(bt) + \omega\, cos(\theta)\, cos(bt)\right)\vec{k}$$

$$+ 2t\, sin(\theta)\vec{i} - 2t\, cos(\theta)\vec{j}\left(cos(\theta)bcos(bt) + sin(\theta)b\, sin(bt)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \left(\omega\, cos(\theta)t^2 + 2t\, sin(\theta)\right)\vec{i} + \left(\omega\, sin(\theta)t^2 - 2t\, cos(\theta)\right)\vec{j}$$

$$+ \left(b - \omega\right)cos(\theta - bt)\vec{k}$$

Pour exprimer les dérivées $\left.\frac{d(\lambda\, \vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il faut exprimer $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ en fonction de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

<u>Exercice 3</u>

1.

$x = \rho\, cos(\varphi)$ et $y = \rho\, sin(\varphi)$

$x = r\,sin(\theta)cos(\varphi)$, $y = r\,sin(\theta)sin(\varphi)$ et $z = r\,cos(\theta)$

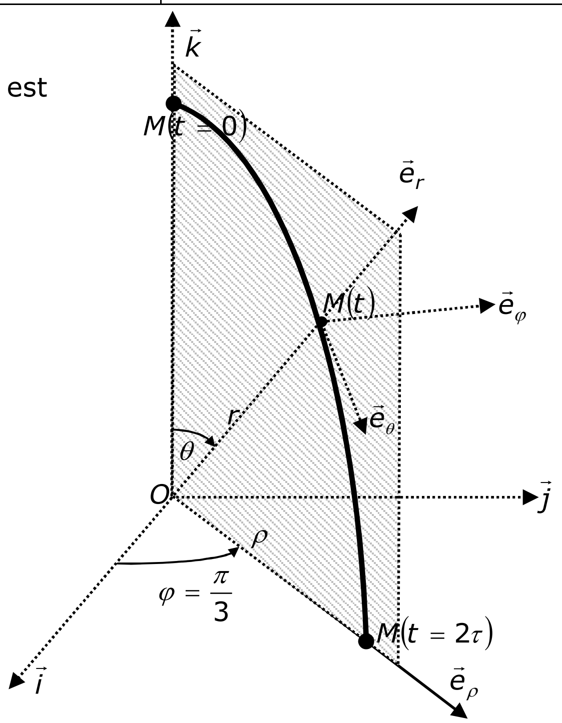
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \varphi = arctan\left(\frac{y}{x}\right) = arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) = arccos\left(\frac{x}{\rho}\right),\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2}\,,$$

$$\theta = arctan\,g\left(\frac{\rho}{z}\right) = arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)	Coordonnées sphériques (r, θ, φ)
$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$	$\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$	$\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
$(0,1,0)$	$\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2.

La coordonnée φ est fixe, donc la courbe (C) est dans le plan méridien.
Quand le temps t augmente de 0 à 2τ, la distance r diminue et l'angle θ augmente



Exercice 4

1. $f(x,y,z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \Rightarrow \overrightarrow{gradf} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\,,\ df = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

2.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\,, d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{gradf}\ d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

3.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 9r^2\,sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\,sin(2\varphi)\left(2\,sin(\theta)cos^2(\theta) - sin^3(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 6r^3\,sin^2(\theta)cos(\theta)cos(2\varphi)$$

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{gradf} = \left(9r^2\,sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)\right)\vec{e}_r \\ \Rightarrow \quad & + 3r^2\,sin(2\varphi)\left(2\,sin(\theta)cos^2(\theta) - sin^3(\theta)\right)\vec{e}_\theta \\ & + 6r^2\,sin(\theta)cos(\theta)cos(2\varphi)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, la fonction *f* est exprimée par :

$$f(r,\theta,\varphi) = 3r^3\, sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)$$
$$x = r\, sin(\theta)cos(\varphi),\ y = r\, sin(\theta)sin(\varphi) \text{ et } z = r\, cos(\theta) \Rightarrow f(x,y,z) = 6xyz$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{gradf} = 6yz\vec{i} + 6xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$$

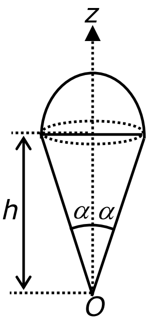
4.

$$\vec{f}(x,y,z) = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + z\,\vec{k} \Rightarrow f_x = x^2yz\,, f_y = xy^2z\,, f_z = z$$

$$div\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \Rightarrow div\vec{f} = 2xyz + 2xyz + 1 = 4xyz + 1$$

$$\overrightarrow{rotf} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{rotf} = -xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + \left(y^2z - x^2z\right)\vec{k}$$

<u>Exercice 5</u>



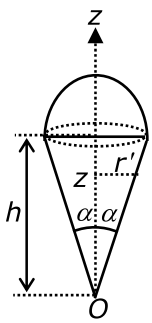
1.

Volume de la demi-boule, v_b :

$dv = r^2\, sin(\theta)drd\theta d\varphi$: élément de volume en coordonnées sphériques.

$$0 \le r \le R\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_b = \int dv = \int_0^R r^2dr \int_0^{\pi/2} sin(\theta)d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3}.1.2\pi = \frac{2\pi R^3}{3}$$



$$tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_b = \frac{2\pi h^3}{3} tan^3(\alpha)$$

2.

Volume du cornet, v_c :

$dv = rdrd\varphi dz$: élément de volume en coordonnées cylindriques.

$$0 \le r \le r'\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le z \le h$$

$$tan(\alpha) = \frac{r'}{z} = \frac{R}{h} \rightarrow r' = \frac{R}{h}z$$

$$\Rightarrow v_c = \int dv = \int_0^{r'} rdr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^h \left(\int_0^{\frac{R}{h}z} rdr\right)dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^h \frac{R^2}{2h^2} z^2dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_c = \frac{\pi h^3}{3} tan^2(\alpha)$$

3.

Quantité de glace exprimée en litre :

$$V_T = v_b + v_c = \frac{2\pi h^3}{3} tan^3(\alpha) + \frac{\pi h^3}{3} tan^2(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3}\left(2\,tan^3(\alpha) + tan^2(\alpha)\right)$$

$h = 11cm,\ \alpha = 15^\circ \Rightarrow V_T = 153.7cm^3\quad V_T = 153.7cm^3 \Rightarrow V_T = 0.1537 litres$

Série N° 2

Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = t-1$, $y(t) = -t^2+1$ et $z(t) = 0$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M.
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M.
3. Calculer les accélérations tangentielle et normale de M.
4. Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 2

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant: $\rho(t)=a_0\, t^2+\rho_0$, $\varphi(t)=\omega t-\varphi_0$ et $z(t)=-vt$, avec $\rho_0=1\text{m}$, $a_0=1\text{m.s}^{-2}$, $\omega=3\text{rad.s}^{-1}$, $\varphi_0=2\text{rad}$ et $v=2\text{m.s}^{-1}$.

1. Exprimer dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M.
2. Calculer la norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 1$ s.
3. Calculer la norme du vecteur accélération de M à l'instant initial ($t = 0$ s).

Exercice 3

L'abscisse curviligne d'un point matériel M décrivant un cercle de rayon R est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + b\,t$, a et b étant des constantes.

1. Exprimer, dans la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$, les accélérations tangentielle et normale de M.
2. Déduire le module de l'accélération de M.

Exercice 4

On considère un point M en mouvement dans le plan xOy. M est repéré par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos\varphi);\ \varphi = \omega t$ où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

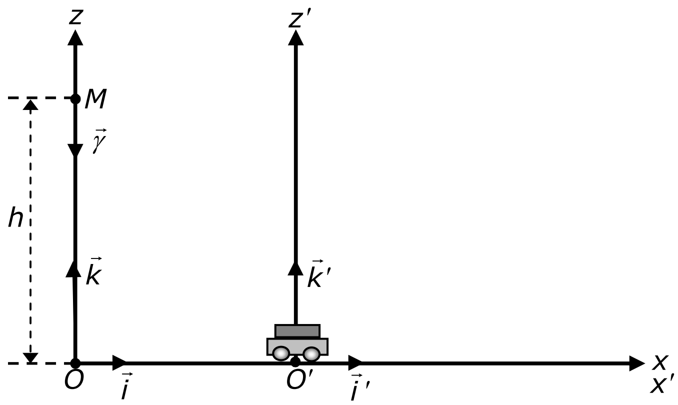
1. Quelle est l'allure de la trajectoire de M.
2. Exprimer, en fonction de l'angle φ, l'abscisse curviligne s de M, comptée à partir du point A qui correspond à $\varphi = 0$. Pour quel angle polaire a-t-on $s = \rho_0$? On désignera par B la position correspondante de M.
3. En déduire le périmètre de la trajectoire.
4. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, les vecteurs vitesse et accélération de M
5. En déduire, les modules de la vitesse et de l'accélération de M en fonction de ρ.
6. Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire.
7. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$.
8. Calculer les accélérations tangentielle et normale de M.
9. Application numérique : ρ_0 = 50cm, ω = 3.2rad/s. Calculer la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure en A et B.

Exercice 5

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille M sans vitesse initiale. Dans un référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$ (voir la figure ci-dessous).

1. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans un référentiel $R'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$.

2. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans le même référentiel $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$.



devoir à la maison

Exercice 1

Une particule M se déplace sur l'axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$, avec une accélération négative, proportionnelle à la vitesse à chaque instant: $\vec{\gamma} = -k\, v\vec{i}$ (k est une constante positive). A l'instant $t = 0$, elle passe en O avec une vitesse $v_0 = 20$ m s^{-1}.

1. Déterminer la loi $v(x)$ (la vitesse au point x).

2. A quelle vitesse et à quel instant la particule passera-t-elle à 150 m de l'origine O, si le module de l'accélération à l'instant 0 vaut 2 m s^{-2} ?

Exercice n2

Un nageur plonge d'un point A situé sur une rive d'un fleuve de largeur ℓ et veut atteindre l'autre rive en un point B situé juste en face de A. Pour cela, il nage suivant une direction faisant un angle α avec (AB). Sa vitesse par rapport à l'eau est v et la vitesse du courant est u.

1. Sur un schéma, représenter vectoriellement les vitesses et déterminer l'angle α en fonction de v et u.

2. Exprimer, en fonction de ℓ, u et v,le temps nécessaire t (temps de traversée) pour que le nageur traversera la fleuve.

3. Que devient ce temps si le point B n'est pas situé en face de A.

Solution de série N° 2

Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

1.

$x(t)+1=t \Rightarrow$, $y=-x^2-2x$ (équation de la trajectoire) $\Rightarrow$ la trajectoire est une parabole.

2.

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\vec{i}-2t\vec{j}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2/\Re}=\frac{d^2x}{d^2t}\vec{i}+\frac{d^2y}{d^2t}\vec{j}+\frac{d^2z}{d^2t}\vec{k}=-2\vec{j}$$

3.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t=\dfrac{d\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{v}(M/\Re)}{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}\ ,\ \frac{d\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{1+4t^2}\right)}{dt}=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_t=\frac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\frac{8t^2}{1+4t^2}\vec{j}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n=\vec{\gamma}(M/\Re)-\vec{\gamma}_t$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_n=-\frac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\frac{2}{1+4t^2}\vec{j}$$

4.

Rayon de courbure : $R_c=\dfrac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^3}{\left\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|}=\dfrac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$

$$\Rightarrow R_c=\frac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Ou bien

$$\vec{\gamma}_n=\frac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}\Rightarrow\left\|\vec{\gamma}_n\right\|=\frac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\left\|\vec{n}\right\|,\ \left\|\vec{n}\right\|=1$$

$$\Rightarrow R_c=\frac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{\left\|\vec{\gamma}_n\right\|}=\frac{\left(1+4t^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{4t}{1+4t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{1+4t^2}\right)^2}}=\frac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Exercice 2

1.

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}=\frac{d\left(\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}\right)}{dt/\Re}=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho+\rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re)=2a_0t\vec{e}_\rho+\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega\vec{e}_\varphi-v\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|=\sqrt{(2a_0t)^2+\left(\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega\right)^2+v^2}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re}=2a_0\vec{e}_\rho+2a_0\omega t\vec{e}_\varphi+2a_0\omega t\vec{e}_\varphi-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re)=\left[2a_0-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\right]\vec{e}_\rho+4a_0\omega t\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|=\sqrt{\left[2a_0-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\right]^2+(4a_0\omega t)^2}$$

2.

Norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t=1$ s.

$$\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\| = \sqrt{(2a_0)^2 + ((a_0+\rho_0)\omega)^2 + v^2} = 6.63m/s$$

3.

Norme du vecteur accélération de M à l'instant initial (t = 0 s).

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \sqrt{\left(2a_0 - \rho_0\omega^2\right)^2} = 7ms^{-2}$$

Exercice 3

1.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau} = \ddot{s}\vec{\tau}$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = a \Rightarrow \vec{\gamma}_t = a\vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = \dfrac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}$

Le point M décrit un cercle de rayon $R \Rightarrow$ Le rayon de courbure est $R_c = R$

$$\vec{v}(M/\Re) = \dot{s}\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{\|\dot{s}\|^2}{R}\vec{n} = \frac{(at+b)^2}{R}\vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{(at+b)^2}{R}\vec{n}$$

2.

Module de l'accélération de M :

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ ($\Re$ est le référentiel dans lequel M décrit le cercle)

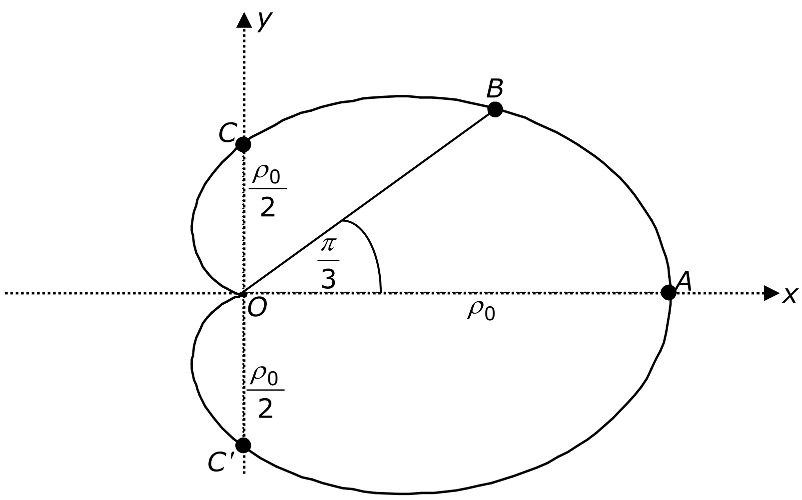
$$\Rightarrow \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|^2 = \left\|\vec{\gamma}_t\right\|^2 + \left\|\vec{\gamma}_n\right\|^2$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|^2 = a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \left(a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 4

1.



La trajectoire de M est une cardioïde. Elle admet l'axe (Ox) comme un axe de symétrie. Elle coupe cet axe en $O(\rho = 0, \varphi = \pi)$ et en $A(\rho = \rho_0, \varphi = 0)$. Elle rencontre l'axe ($Oy$) en $C\left(\rho = \dfrac{\rho_0}{2}, \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$ et en $C'\left(\rho = \dfrac{\rho_0}{2}, \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.

En coordonnées polaires : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi$

En coordonnées curvilignes : $d\overrightarrow{OM} = ds\vec{\tau}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi)) \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)d\varphi \Rightarrow ds = \sqrt{\left(-\frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))d\varphi\right)^2}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\rho_0}{2}d\varphi\sqrt{2(1+cos(\varphi))} \Rightarrow ds = \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \Rightarrow s = \int \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + s_0$$

L'abscisse curviligne s de M est comptée à partir du point A, c-à-d $s = 0$ en A.
$\Rightarrow s = 0$ si $\varphi = 0 \Rightarrow s(\varphi = 0) = 2\rho_0\, sin(0) + s_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Si $s = \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\rho_0}{2}\left(1 + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\rho_0 \Rightarrow B\left(\frac{3}{4}\rho_0, \frac{\pi}{3}\right)$$

3.

Le demi périmètre (demi longueur de la trajectoire) est la longueur de l'arc AO.

$$\frac{1}{2}P = \int_A^O ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 2\rho_0\left[sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^\pi = 2\rho_0$$

$\Rightarrow$ le périmètre de la trajectoire est $P = 4\rho_0$

4.

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = -\frac{\rho_0}{2}\omega\, sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega\vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = -\frac{\rho_0}{2}\omega^2 cos(\varphi)\vec{e}_\rho - \frac{\rho_0}{2}\omega^2 sin(\varphi)\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)\omega^2\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$= -\left(\rho_0\, cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\vec{e}_\rho - \rho_0\omega^2 sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

5.

$$\|\vec{v}(M/\Re)\| = \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2}\omega\, sin(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega\right)^2} = \rho_0\omega\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \sqrt{\left(\left(\rho_0\, cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\right)^2 + \left(\rho_0\omega^2 sin(\varphi)\right)^2} = \frac{\rho_0}{2}\omega^2\sqrt{1 + 8\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On exprime $\|\vec{v}(M/\Re)\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/\Re)\|$ en fonction de ρ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi)) \Rightarrow \rho = \rho_0\, cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}(M/\Re)\| = \omega\sqrt{\rho_0\rho}\quad,\quad \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2 + 8\rho_0\rho}$$

6.

Rayon de courbure R_c de la trajectoire : $R_c = \dfrac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\|}$

$$\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{\rho_0^2\omega^3}{2}\sin^2(\varphi)\vec{e}_z+\frac{\rho_0\omega}{2}(1+\cos(\varphi))\left(\rho_0\omega^2\cos(\varphi)+\frac{\rho_0\omega^2}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$=\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow\ \left\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|=\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$R_c=\frac{\left(\rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^3}{\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Rightarrow R_c=\frac{2}{3}\rho_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

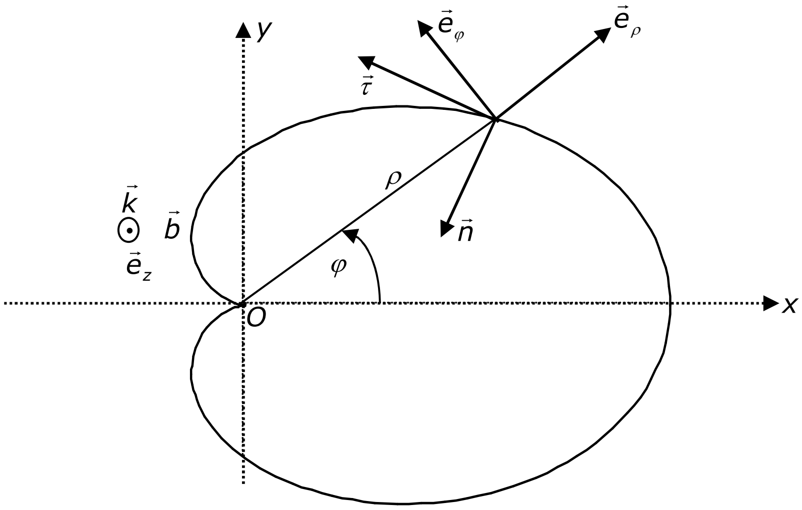
7.

Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$:

- $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{v}(M/\Re)}{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}=-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho+\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$
- le mouvement de M se fait dans le plan (xoy) $\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ et $\vec{n}\in(xoy)$.

$$\Rightarrow\ \vec{k}\perp\vec{\tau}\ \text{ et }\ \vec{k}\perp\vec{n}\ \Rightarrow\ \vec{b}=\vec{k}$$

- $\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{\tau}=\vec{k}\wedge\vec{\tau}\ \Rightarrow\ \vec{n}=-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$



A chaque instant t, le point M appartient à un cercle de rayon $R_c=R_c(\varphi)$ et de centre C tel que $\overrightarrow{MC}=R_c\vec{n}$

8.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t=\dfrac{d\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau}=\ddot{s}\vec{\tau}$

$$s=2\rho_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \ddot{s}=\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \vec{\gamma}_t=-\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n=\dfrac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}=\dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n}$

$$\dot{s} = \rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{\left(\rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\frac{2}{3}\rho_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\vec{n} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}$$

On vérifie que $\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$?

$$\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = -\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{\tau} + \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = -\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right) + \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -\left(\rho_0\cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\vec{e}_\rho - \rho_0\omega^2\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

9.

Application numérique (ρ_0=50cm, ω=3.2rad/s) :

- En A :

$$\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\| = \rho_0\omega = 1.6m/s$$

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 = 7.5m/s^2$$

$$R_c = \frac{2}{3}\rho_0 = 0.33m$$

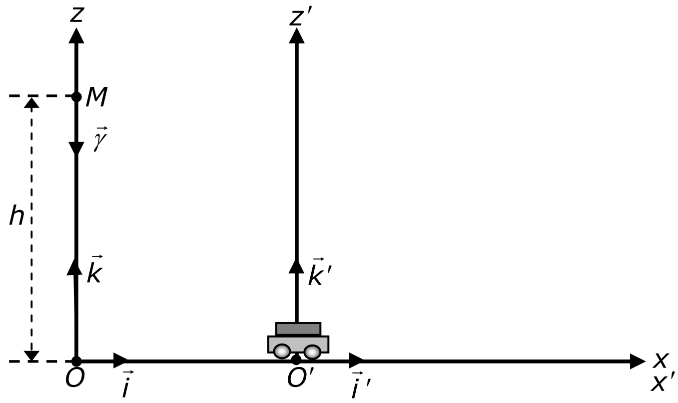
- En B :

$$\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_0\omega = 1.38m/s$$

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{\sqrt{7}}{2}\rho_0\omega^2 = 6.6m/s^2$$

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_0 = 0.29m$$

<u>Exercice 5</u>



Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$\overrightarrow{OM} = z\vec{k} \quad (x = y = 0)$$

La bille est en chute libre sans vitesse initiale dans $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec une accélération $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$

$$\Rightarrow \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -g \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

A $t = 0$, $v_0 = 0$, $z_0 = h \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}$

Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\Re'\left(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'\right)$ est :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

$\vec{i} = \vec{i}\,'$, $\vec{k} = \vec{k}\,'$ et $y' = 0$ (le mouvement de M se fait dans le plan (xoz)) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$

1.

1er cas : $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,') \Rightarrow \vec{v}(O'/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt\,/\,\Re} = u\vec{i} = \dfrac{dx_{O'}}{dt}\vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = ut + C$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0 \rightarrow C = 0 \Rightarrow x_{O'} = ut \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = ut\vec{i}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + z'\vec{k}\,' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}\,' - ut\vec{i}\,'$$

$\Rightarrow x' = -ut$ et $z' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x'^2}{u^2} + h$

$\Rightarrow$ la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est une parabole.

2.

2ème cas : $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est en mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,') \Rightarrow \vec{\gamma}(O'/\Re) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2\,/\,\Re} = a\vec{i} = \dfrac{d^2x_{O'}}{dt^2}\vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0$, $\dot{x}_{O'} = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow x_{O'} = \dfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \dfrac{1}{2}at^2\vec{i}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + z'\vec{k}\,' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}\,' - \frac{1}{2}at^2\vec{i}\,'$$

$\Rightarrow x' = -\dfrac{1}{2}at^2$ et $z' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = \dfrac{g}{a}x' + h$

$\Rightarrow$ la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est une droite d'équation $z' = \dfrac{g}{a}x' + h$.

Série N° 3
Dynamique du Point Matériel

Exercice 1 :

On considère le repère $\Re(Oxyz)$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. Dans ce plan (P), un anneau M assimilé à un point matériel de masse m se meut sans frottement, dans le champ de pesanteur, sur un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon r. La position de O_1 est définie par les paramètres a et b (a et b sont des constantes), celle de M est définie par l'angle $\theta(t)$ (voir figure 1). On désigne par $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au plan (P) (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1z_1)$ reste constamment dans le plan (P) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. On suppose que $\theta = \dot{\theta} = 0$ à $t=0$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

- **a.** le vecteur rotation de R_1 par rapport à $\Re$: $\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re)$;
- **b.** les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M;
- **c.** les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M;
- **d.** le poids de M et les forces d'inertie.

2. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ et les composantes de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. En déduire une relation entre θ et $\dot{\theta}$.

3. que deviennent ces résultats si le plan (P) est fixe.

Exercice 2 :

1. On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse m = 3 kg. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre la benne et la brique sont respectivement $k_s = 0.6$ et $K_d = 0.3$.

- **a.** Calculer l'angle α_0 d'inclinaison de la benne par rapport à l'horizontale pour provoquer le glissement de la brique.
- **b.** Si $\alpha = 45°$, déterminer l'accélération de la brique. On donne $g = 10$ m.s^{-2}.

2. Le camion roule maintenant en ligne droite avec une vitesse constante v_c. Une boîte, considérée comme ponctuelle, glisse sur sa benne avec une vitesse $v_b = 0.5\, m.s^{-1}$ (voir figure 2). Sachant que la benne est inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle $\alpha = 60°$,

- **a.** Déterminer la vitesse du camion pour qu'un observateur au sol puisse voir la boîte tomber verticalement. En déduire la vitesse de la boîte par rapport au sol.
- **b.** Que devient la vitesse de la boîte par rapport au sol si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 m.s^{-1}$. Faire le schéma de composition des vitesses.

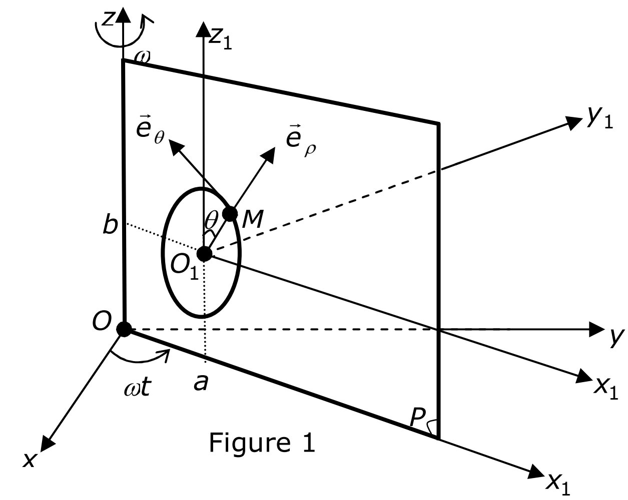


Figure 1

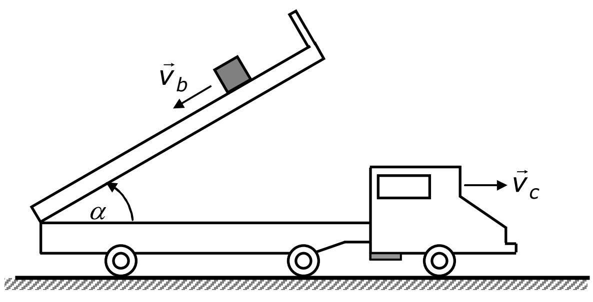
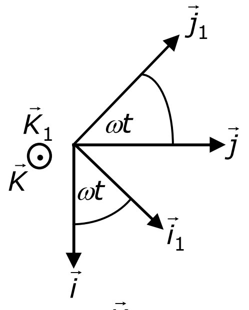


Figure 2

<u>Solution de série N° 3</u>

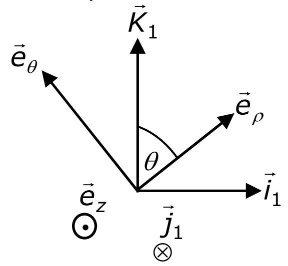
Dynamique du Point Matériel

<u>Exercice 1</u> :



$$\vec{i}_1 = cos(\omega t)\vec{i} + sin(\omega t)\vec{j}\ ,\ \vec{j}_1 = -sin(\omega t)\vec{i} + cos(\omega t)\vec{j}\ ,\ \vec{k}_1 = \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \omega\vec{j}_1\ ,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = -\omega\vec{i}_1\ ,\ \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0}$$



$$\vec{e}_\rho = sin(\theta)\vec{i}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1\ ,\ \vec{e}_\theta = -cos(\theta)\vec{i}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1\ ,\ \vec{e}_z = -\vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_\theta\ ,\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\rho\ ,\ \frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re_1} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, $\overrightarrow{OO_1} = a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1$, $\overrightarrow{O_1M} = r\vec{e}_\rho$ (r, a, b sont des constantes)

1.

On exprime dans la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

a. le vecteur rotation de R_1 par rapport à R: $\vec{\Omega}(R_1/R)$:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \omega\vec{j}_1 = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{i}_1\ ,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = -\omega\vec{i}_1 = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{j}_1\ ,\ \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0} = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow\ \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{k}_1$$

b. les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M :

- $\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M/\Re_1) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = \dfrac{d(r\vec{e}_\rho)}{dt/\Re_1} = r\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = -r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\Rightarrow\ \vec{v}_r(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1$: vitesse relative

- $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$\vec{v}(O_1/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} = \dfrac{d(a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1)}{dt/\Re} = a\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} + b\dfrac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = a\omega\vec{j}_1$

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \omega\vec{k}_1 \wedge r\vec{e}_\rho = \omega\vec{k}_1 \wedge r(sin(\theta)\vec{i}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1) = r\omega\,sin(\theta)\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{v}_e(M) = (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1$: vitesse d'entraînement

- $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1 + (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{v}_a(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 + (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1$: vitesse absolue

c. les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M :

- $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \dfrac{d(-r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt/\Re_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - -r\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$

$\vec{\gamma}_r(M) = (r\ddot{\theta}\,cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\,sin(\theta))\vec{i}_1 - (r\ddot{\theta}\,sin(\theta) + r\dot{\theta}^2\,cos(\theta))\vec{k}_1$: accélération relative

- $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \dfrac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$

$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \dfrac{d\vec{v}(O_1/\Re)}{dt/\Re} = \dfrac{d(a\omega\vec{j}_1)}{dt/\Re} = -a\omega^2\vec{i}_1$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{0}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)=\omega\vec{k}_1\wedge r\omega\sin(\theta)\vec{j}_1=-r\omega^2\sin(\theta)\vec{i}_1$$

$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_e(M)=\left(-a\omega^2-r\omega^2\sin(\theta)\right)\vec{i}_1$: accélération d'entraînement

- $\vec{\gamma}_c(M)=2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{v}_r(M)=2\omega\vec{k}_1\wedge\left(r\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{i}_1-r\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{k}_1\right)=2r\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_c(M)=2r\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}_1$: accélération de Coriolis

- $\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)+\vec{\gamma}_e(M)+\vec{\gamma}_c(M)$

$$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_a(M)=\left(r\ddot{\theta}\cos(\theta)-r\dot{\theta}^2\sin(\theta)-a\omega^2-r\omega^2\sin(\theta)\right)\vec{i}_1$$
$$+2r\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}_1 \qquad \text{: accélération absolue}$$
$$-\left(r\ddot{\theta}\sin(\theta)+r\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\vec{k}_1$$

d. le poids de M et les forces d'inertie :

- $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{k}_1$: poids de M
- $\vec{F}_e=-m\vec{\gamma}_e(M)=\left(ma\omega^2+mr\omega^2\sin(\theta)\right)\vec{i}_1$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c=-m\vec{\gamma}_c(M)=-2mr\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}_1$: force d'inertie de Coriolis

2.

Application du théorème de la quantité du mouvement (P.F.D) dans le repère R_1 :
$\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport à $\Re$ fixe (galiléen) $\Rightarrow$ $\Re_1$ est non galiléen

$\Rightarrow$ P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit : $m\vec{\gamma}_r(M)=\sum\vec{F}_{ext}+\vec{F}_e+\vec{F}_c$ avec $\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}+\vec{R}$

Soit $\vec{R}=R_\rho\vec{e}_\rho+R_\theta\vec{e}_\theta+R_z\vec{e}_z$

M se meut sans frottement sur le cerceau (C) $\Rightarrow$ la composante tangentielle est nulle c-à-d $R_\theta=0\ \Rightarrow\ \vec{R}=R_\rho\vec{e}_\rho+R_z\vec{e}_z$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} m\left(r\ddot{\theta}\cos(\theta)-r\dot{\theta}^2\sin(\theta)-a\omega^2-r\omega^2\sin(\theta)\right)\vec{i}_1+2mr\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}_1 \\ -\left(mr\ddot{\theta}\sin(\theta)+mr\dot{\theta}^2\cos(\theta)-mg\right)\vec{k}_1-R_\rho\vec{e}_\rho-R_z\vec{e}_z=\vec{0}\end{array}\right. \quad \text{(E)}$$

$\vec{e}_\theta\times$(E) $\Rightarrow$

$$-m\left(r\ddot{\theta}\cos(\theta)-r\dot{\theta}^2\sin(\theta)-a\omega^2-r\omega^2\sin(\theta)\right)\cos(\theta)-\left(mr\ddot{\theta}\sin(\theta)+mr\dot{\theta}^2\cos(\theta)-mg\right)\sin(\theta)=0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta}=\frac{g}{r}\sin(\theta)+\frac{a}{r}\omega^2\cos(\theta)+\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Equation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ

$\vec{e}_\rho\times$(E) $\Rightarrow$

$$m\left(r\ddot{\theta}\cos(\theta)-r\dot{\theta}^2\sin(\theta)-a\omega^2-r\omega^2\sin(\theta)\right)\sin(\theta)-\left(mr\ddot{\theta}\sin(\theta)+mr\dot{\theta}^2\cos(\theta)-mg\right)\cos(\theta)-R_\rho=0$$

$$\Rightarrow\ R_\rho=mg\cos(\theta)-mr\dot{\theta}^2-ma\omega^2\sin(\theta)-mr\omega^2\sin^2(\theta)$$

$\vec{e}_z\times$(E) $\Rightarrow$

$$-2mr\omega\dot{\theta}\cos(\theta)-R_z=0$$

$$\Rightarrow\ R_z=-2mr\omega\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow\ \vec{R}=\left(mg\cos(\theta)-mr\dot{\theta}^2-ma\omega^2\sin(\theta)-mr\omega^2\sin^2(\theta)\right)\vec{e}_\rho-2mr\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_z$$

Relation entre θ et $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}=\frac{g}{r}\sin(\theta)\dot{\theta}+\frac{a}{r}\omega^2\cos(\theta)\dot{\theta}+\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt}=-\frac{g}{r}\frac{d\cos(\theta)}{dt}+\frac{a}{r}\omega^2\frac{d\sin(\theta)}{dt}-\frac{\omega^2}{4}\frac{d\cos(2\theta)}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=-\frac{g}{r}\cos(\theta)+\frac{a}{r}\omega^2\sin(\theta)-\frac{\omega^2}{4}\cos(2\theta)+cte$$

A $t=0$: $\theta=\dot{\theta}=0\ \Rightarrow\ cte=\dfrac{g}{r}+\dfrac{\omega^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}cos(\theta)+\frac{a}{r}\omega^2\ sin(\theta)-\frac{\omega^2}{4}cos(2\theta)+\frac{g}{r}+\frac{\omega^2}{4}$$

$$cos(2\theta)=1-2\,sin^2(\theta)\Rightarrow\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}cos(\theta)+\frac{a}{r}\omega^2\ sin(\theta)-\frac{\omega^2}{4}+\frac{\omega^2}{2}sin^2(\theta)+\frac{g}{r}+\frac{\omega^2}{4}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(1-cos(\theta))+\omega^2\ sin(\theta)\left(\frac{2a}{r}+sin(\theta)\right)$$

3.

<u>Cas particulier : le plan (*P*) est fixe :</u>

$\Rightarrow\ \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)=\vec{0}\ \Rightarrow \vec{v}_e(M)=\vec{0}\ \Rightarrow \vec{v}_a(M)=\vec{v}_r(M)=r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1-r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1$

$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M)=\vec{0}$, $\vec{\gamma}_c(M)=\vec{0}\ \Rightarrow \vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)=\left(r\ddot{\theta}\,cos(\theta)-r\dot{\theta}^2\ sin(\theta)\right)\vec{i}_1-\left(r\ddot{\theta}\,sin(\theta)+r\dot{\theta}^2\ cos(\theta)\right)\vec{k}_1$

$\Rightarrow \vec{F}_e=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F}_c=\vec{0}$

Le plan (*P*) est fixe $\Rightarrow\ \Re_1$ est fixe par rapport à $\Re\ \Rightarrow\ \Re_1$ est galiléen

$\Rightarrow$ P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit : $m\vec{\gamma}(M/\Re_1)=\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}+\vec{R}=-mg\vec{k}_1+R_\rho\vec{e}_\rho+R_z\vec{e}_z$

$\Rightarrow\ \left(mr\ddot{\theta}\,cos(\theta)-mr\dot{\theta}^2\ sin(\theta)\right)\vec{i}_1-\left(mr\ddot{\theta}\,sin(\theta)+mr\dot{\theta}^2\ cos(\theta)\right)\vec{k}_1=-mg\vec{k}_1+R_\rho\vec{e}_\rho+R_z\vec{e}_z$ (E)

$\vec{e}_\theta\times$(E) $\Rightarrow\ \left(-mr\ddot{\theta}\,cos(\theta)+mr\dot{\theta}^2\ sin(\theta)\right)cos(\theta)-\left(mr\ddot{\theta}\,sin(\theta)+mr\dot{\theta}^2\ cos(\theta)\right)sin(\theta)=-mg\ sin(\theta)$

$\Rightarrow\ \ddot{\theta}=\frac{g}{r}sin(\theta)$: Equation différentielle du mouvement de *M* vérifiée par θ

$\vec{e}_\rho\times$(E) $\Rightarrow\ R_\rho=mg\,cos(\theta)-mr\dot{\theta}^2$

$\vec{e}_z\times$(E) $\Rightarrow\ R_z=0$

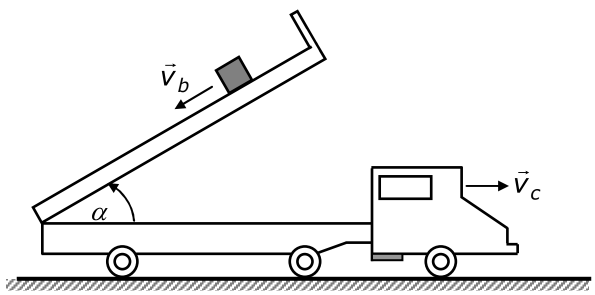
$\Rightarrow\ \vec{R}=\left(mg\,cos(\theta)-mr\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho$

<u>Relation entre θ et $\dot{\theta}$:</u>

$\dot{\theta}\ddot{\theta}=\frac{g}{r}sin(\theta)\dot{\theta}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt}=-\frac{g}{r}\frac{d\,cos(\theta)}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=-\frac{g}{r}cos(\theta)+cte$

A $t=0$: $\theta=\dot{\theta}=0\ \Rightarrow\ cte=\frac{g}{r}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=-\frac{g}{r}cos(\theta)+\frac{g}{r}\ \Rightarrow\dot{\theta}^2=\frac{2g}{r}(1-cos(\theta))$

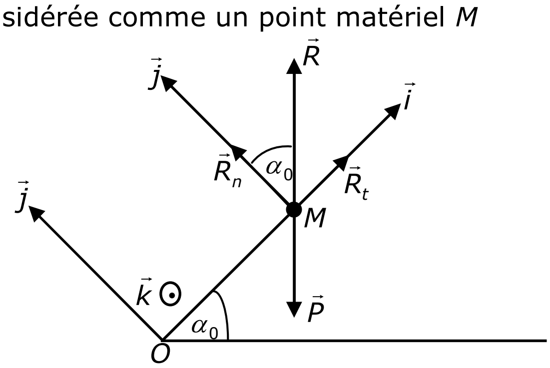
<u>Exercice 2</u> :



1.

<u>Camion immobile :</u>

a. angle limite α_0 pour provoquer le glissement de la brique :
La brique est considérée comme un point matériel *M*



A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow -mg\,sin(\alpha_0)\vec{i} - mg\,cos(\alpha_0)\vec{j} + R_t\vec{i} + R_n\vec{j} = \vec{0}$

$R_t = \|\vec{R}_t\|$: composante tangente à la benne

$R_n = \|\vec{R}_n\|$: composante normale à la benne

$\Rightarrow R_t = mg\,sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg\,cos(\alpha_0) \Rightarrow tan(\alpha_0) = \frac{R_t}{R_n}$

A l'équilibre statique : $\|\vec{R}_t\| \leq k_s\|\vec{R}_n\|$ où k_s est le coefficient de frottement statique.

Juste à la rupture de l'équilibre ($\alpha = \alpha_0$) : $\|\vec{R}_t\| = k_s\|\vec{R}_n\| \Rightarrow \frac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|} = k_s$

$\Rightarrow tan(\alpha_0) = k_s \Rightarrow \alpha_0 = arctan(k_s) \Rightarrow \alpha_0 = 31°$

b. Accélération de la brique si $\alpha = 45°$:

$\alpha = 45° > \alpha_0 \Rightarrow$ la brique ne reste pas en équilibre statique sur la benne.

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}(M/\Re) \Rightarrow -mg\,sin(\alpha_0)\vec{i} - mg\,cos(\alpha_0)\vec{j} + R_t\vec{i} + R_n\vec{j} = m\gamma_x\vec{i}$

$\Rightarrow m\gamma_x = R_t - mg\,sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg\,cos(\alpha_0)$

La brique est en mouvement avec frottement $\Rightarrow \|\vec{R}_t\| = k_d\|\vec{R}_n\| \Rightarrow R_t = k_d R_n$, k_d est le coefficient de frottement dynamique.

$\Rightarrow R_t = k_d mg\,cos(\alpha_0) \Rightarrow m\gamma_x = k_d mg\,cos(\alpha_0) - mg\,sin(\alpha_0)$

$\Rightarrow \gamma_x = g(k_d\,cos(\alpha_0) - sin(\alpha_0))$

$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = |\gamma_x| = |g(k_d\,cos(\alpha_0) - sin(\alpha_0))|$

$\Rightarrow$ A.N : $\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = 4.95ms^{-2}$

2.

Le camion en mouvement rectiligne uniforme par rapport au sol avec une vitesse $\vec{v}_c$:

La boîte est considérée comme un point matériel M glissant sur la benne avec une vitesse constante $v_b = 0.5ms^{-1}$.

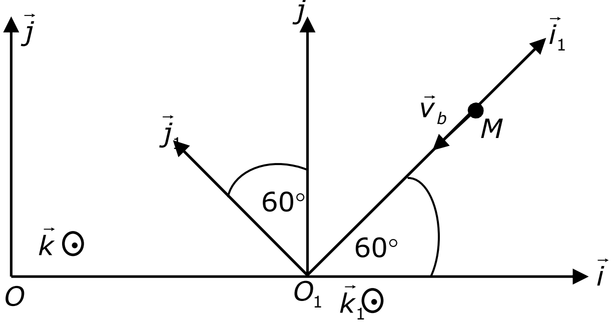
$\vec{i}_1 = cos(\omega t)\vec{i} + sin(\omega t)\vec{j}$

$\vec{j}_1 = -sin(\omega t)\vec{i} + cos(\omega t)\vec{j}$

$\vec{k}_1 = \vec{k}$

$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0}$

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$



$\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel lié au sol (absolu)

$\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ référentiel lié au camion (relatif)

$\Re_1$ est en mouvement de translation uniforme par rapport à $\Re$ de vitesse $\vec{v}_c = \overrightarrow{cte}$

O_1 est fixe dans $\Re_1 \Rightarrow \vec{v}(O_1/\Re) = \vec{v}_c$

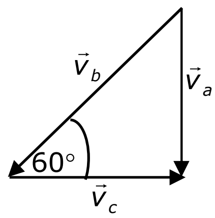
$\Rightarrow$ - $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_c$ (vitesse d'entraînement de M est égale à la vitesse du camion dans $\Re$)

- $\vec{v}_r(M) = \vec{v}_b$ (vitesse relative de M est égale à la vitesse de la boîte dans $\Re_1$)

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c$

a. Un observateur au sol voit la boîte tomber verticalement c'est-à-dire le vecteur $\vec{v}_a(M)$ est vertical au sol.

Ainsi, d'après la loi de composition des vitesses, on obtient le schéma suivant :



D'après ce schéma on obtient :

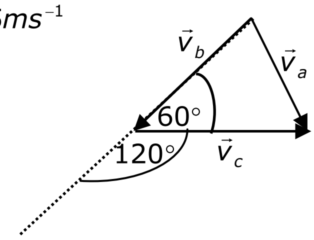
- $v_c = v_b\, cos(60°) = 0.25ms^{-1}$: vitesse du camion par rapport au sol
- $v_a = v_b\, sin(60°) = 0.43ms^{-1}$: vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte)

b. On calcule la vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte v_a), si la vitesse du camion est $v_c = 0.5m.s^{-1}$:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c \Rightarrow \left\|\vec{v}_a(M)\right\|^2 = \left\|\vec{v}_b\right\|^2 + \left\|\vec{v}_c\right\|^2 + \vec{v}_b\vec{v}_c\, cos\left(\vec{v}_b \hat{,} \vec{v}_c\right)$$

$$\left(\vec{v}_b \hat{,} \vec{v}_c\right) = 180° - 60° = 120° \Rightarrow v_a = 0.5ms^{-1}$$

Ou bien : $v_b = v_c = 0.5ms^{-1}$ et $\alpha = 60° \Rightarrow$ le triangle formé par les trois vecteurs $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$ et $\vec{v}_c$ est équilatéral $\Rightarrow v_a = v_b = v_c = 0.5ms^{-1}$



Autre méthode :

Pour la question **2.** , on peut faire un calcul direct sans utiliser la loi de composition des vitesses.

$$\vec{v}_a = \vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}}_{0} \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}(O_1/\Re) + \vec{v}(M/\Re_1)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = v_c\vec{i} - v_b\vec{i}_1 = v_c\vec{i} - v_b\, cos(\alpha)\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_a = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j}$$

a. si la boîte est tombée verticalement $\Rightarrow \vec{v}_a \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_a = -v_a\vec{j}$

$$\Rightarrow -v_a\vec{j} = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j}$$
$$\Rightarrow v_a = v_b\, sin(\alpha) \text{ et } v_c = v_b\, cos(\alpha)$$
$$\Rightarrow v_a = 0.43ms^{-1} \text{ et } v_c = 0.25ms^{-1}$$

b. si la vitesse du camion est $v_c = 0.5m.s^{-1}$:

$$-v_a\vec{j} = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j} \Rightarrow v_a = \sqrt{(v_c - v_b\, cos(\alpha))^2 + v_b^2\, sin^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_c^2 + v_b^2 - 2v_cv_b\, cos(\alpha)} \Rightarrow v_a = 0.5ms^{-1}$$

Série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit une tige homogène (O_1A) de longueur ℓ, en mouvement autour de l'axe ($O\vec{k}$) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que le plan ($x_1O_1y_1$) reste constamment parallèle au plan (xOy) et $\vec{k}_1=\vec{k}$. L'origine O_1 de $\Re_1$ se déplace le long de l'axe ($O\vec{k}$) tel que $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}at^2\vec{K}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans R_1 par $\overrightarrow{O_1M}=x_1(t)\vec{i}_1$.
(a et ω étant des constantes positives).

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

- **a.** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re$.
- **b.** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$.
- **c.** le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$.
- **d.** le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2. Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.

4. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.

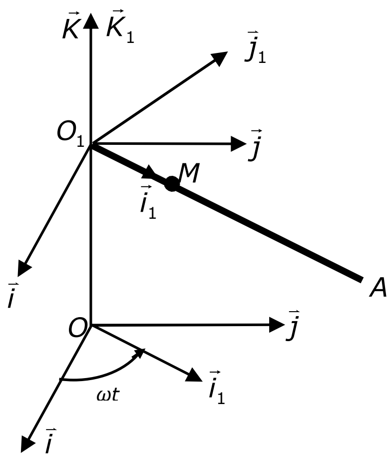
5. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re$.

6. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$.

7. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$.

8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.

9. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.



Exercice 2

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (yOz) étant le plan vertical. Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R, en mouvement de translation dans le plan (yOz) tel que $\overrightarrow{OO_1}=b\vec{j}+\frac{1}{2}at^2\vec{k}$ ((yOz) étant le plan du cerceau, a et b étant des constantes positives non nulles). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i}_1=\vec{i}$, $\vec{j}_1=\vec{j}$ et $\vec{k}_1=\vec{k}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans $\Re_1$ par l'angle θ (voir la figure ci-dessous). On suppose qu'à t = 0, $\theta=0$ et $E_p(M/\Re)=E_p(M/\Re_1)=0$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$:

- **a.** les vecteurs de la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
- **b.** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re$, $\vec{v}(M/\Re)$.
- **c.** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{v}(M/\Re_1)$.

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$

e. le poids de M et les forces d'inertie.

2. Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re$.

4. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$.

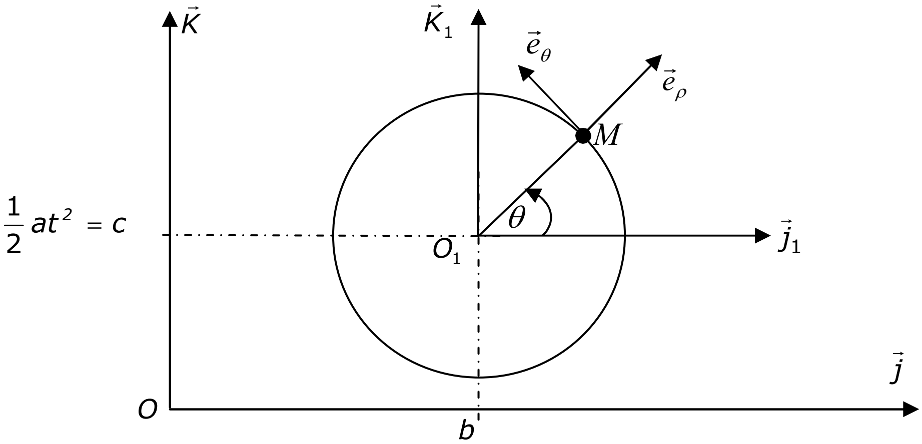
5. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

6. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par le cerceau, dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

7. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.

8. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.

9. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.

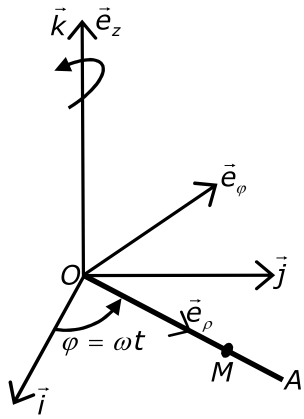


__**Exercice 3**__ :

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), ($\vec{i},\vec{j}$) étant le plan horizontal. Soit une tige horizontale (OA), en mouvement autour de l'axe ($O\vec{k}$) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ le repère lié à la tige (repère relatif). Soit un anneau assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (OA) et repéré dans $\Re$ par ses coordonnées polaires ρ et φ (voir la figure ci-contre). On suppose que $\rho(t=0)=\rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0)=0$.

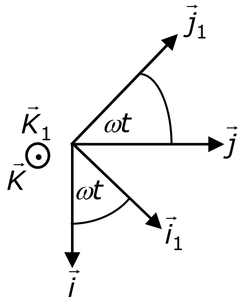
1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M. Donner la solution de cette équation en fonction de ρ_0 et ω.

2. Maintenant l'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point M. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$, établir la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige en fonction de $\ddot{\rho}$, ρ, ρ_0, k, m et ω.



Solution de série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1



$$\vec{i}_1 = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{k}_1 = \vec{k}$$
$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \omega\vec{j}_1\,,\quad \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = -\omega\vec{i}_1\,,\quad \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{k} = \omega\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \frac{1}{2}at^2\vec{k} + x_1(t)\vec{i}_1 = \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{i}_1 \quad (a \text{ est une constante})$$

1. On exprime dans la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

a. la vitesse du point M par rapport au repère R :

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{i}_1\right)}{dt/\Re} = at\vec{k}_1 + \dot{x}_1\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}_1$$
$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}_1 + at\vec{k}_1$$

b. la vitesse du point M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{v}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = \frac{d\left(x_1(t)\vec{i}_1\right)}{dt/\Re_1} = \dot{x}_1\vec{i}_1$$
$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re_1) = \dot{x}_1\vec{i}_1$$

c. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$:

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1)$$
$$\overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = x_1\vec{i}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i} = \vec{0}_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \vec{0}$$

d. le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1$: poids de M
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2/\Re} = \frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2/\Re} = a\vec{k} = a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \omega\vec{k}_1 \wedge \left(\omega\vec{k}_1 \wedge x_1\vec{i}_1\right) = \omega\vec{k}_1 \wedge \omega x_1\vec{j}_1 = -\omega^2 x_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = a\vec{k}_1 - \omega^2 x_1\vec{i}_1$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega\vec{k}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i}_1 = 2\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1\,,\quad \vec{F}_c = -2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

2. Le repère $\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe $\Re$ (galiléen)

$\Rightarrow \Re_1$ est non Galiléen.

3. Théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R_1\vec{i}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

N.B : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement $\Rightarrow$ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_1 = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit :

$$m\ddot{x}_1\vec{i}_1 = -mg\vec{k}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1 + mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1 - 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2)\vec{i}_1 + (mg - R_3 + ma)\vec{k}_1 - (R_2 - 2m\omega\dot{x}_1)\vec{j}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2 = 0 \\ R_2 - 2m\omega\dot{x}_1 = 0 \\ mg - R_3 + ma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 - x_1\omega^2 = 0 \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \\ R_3 = mg + ma \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Equation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur M par la tige : $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

4. Théorème du moment cinétique dans le repère R_1 :

N.B : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\Re_1$, il est préférable de choisir un point fixe dans $\Re_1$. Pour un point mobile A dans $\Re_1$, ce théorème, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_A(\vec{F}_e) + \vec{m}_A(\vec{F}_c) + m\vec{v}(M/\Re_1) \wedge \vec{v}(A/\Re_1)$$

$\Re_1$ est non galiléen et O_1 est fixe dans $\Re_1 \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = x_1\vec{i}_1 \wedge (-mg\vec{k}_1) = mgx_1\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = x_1\vec{i}_1 \wedge R_2\vec{j}_1 + x_1\vec{i}_1 \wedge R_3\vec{k}_1 = x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_e = x_1\vec{i}_1 \wedge (mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1) = max_1\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_c = x_1\vec{i}_1 \wedge (-2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1) = -2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow mgx_1\vec{j}_1 + x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1 + max_1\vec{j}_1 - 2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (mgx_1 + max_1 - x_1R_3)\vec{j}_1 + (x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1)\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgx_1 + max_1 - x_1R_3 = 0 \\ x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = mg + ma \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On retrouve la réaction $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

5. Energie potentielle de M par rapport au repère $\Re$:

Dans le repère $\Re$, la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de M ($\vec{P}$). Ainsi l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re$ est :

$$E_P(M/\Re) = E_P(\vec{P}/\Re)$$

$$dE_P(M/\Re) = dE_P(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_P(M/\Re) = mgdz \Rightarrow E_P(M/\Re) = mgz + cte$$

Ou bien

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \rightarrow -mg\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg\,(1),\ \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0\,(2),\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0\,(3)$$

$$(1) \rightarrow E_p = mgz + cte(x,y)$$

$$(2) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial cte(x,y)}{\partial x} = 0 \rightarrow cte(x,y) = cte(y) \rightarrow E_p = mgz + cte(y)$$

$$(3) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial cte(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow cte(y) = cte$$

$$\Rightarrow E_p(M/\Re) = mgz + cte$$

6. <u>Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$</u> :

$$\vec{F}_e = mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & mx_1\omega^2 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \wedge & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & & -ma \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \Re_1$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re_1) = E_p(\vec{F}_e/\Re_1) + E_P(\vec{P}/\Re_1)$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -dW(\vec{F}_e/\Re) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{O_1M} = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1)\ \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -mx_1\omega^2dx_1$$

$$\Rightarrow E_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P(\vec{P}/\Re_1) = -dW(\vec{P}/\Re_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = mg\vec{k}_1(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1)\ \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_P(\vec{P}/\Re_1) = mg\vec{k}_1dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_P(\vec{P}/\Re_1) = 0$$

$$\Rightarrow E_P(\vec{P}/\Re_1) = cte$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

7. <u>Energie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$</u> :

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(M/\Re_1)\|^2$$

$$\Rightarrow E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2$$

8. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow$ $dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\sum \vec{F}_{ext} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$

($dW\left(\vec{F}_c / \Re_1\right) = 0$ voir le cours)

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ avec $\vec{R} = R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

$$\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\vec{P} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{R} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{P} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{R} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P\left(\vec{P} / \Re_1\right) + P\left(\vec{R} / \Re_1\right) + P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$$ (P : puissance)

$$\frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{x}_1\ddot{x}_1$$

$$P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = \vec{P}\vec{v}(M/\Re_1) = -mg\vec{k}_1\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re_1) = \left(R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = \vec{F}_e\vec{v}(M/\Re_1) = \left(mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i} = mx_1\omega^2\dot{x}_1$$

$$\Rightarrow m\dot{x}_1\ddot{x}_1 = mx_1\omega^2\dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \omega^2 x_1$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

9. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$:

> Rappel :
> Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen $\Re_1$
> $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$ si $\vec{F}_e$ est non conservative
> Si $\vec{F}_e$ est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$
> en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans le référentiel $\Re_1$.

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow$ $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$ en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans le référentiel $\Re_1$ ($\vec{F}_e$ est conservative dans $\Re_1$)

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)}{dt} = P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_P(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

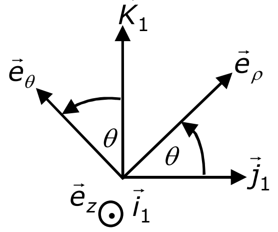
$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{x}_1\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1\dot{x}_1$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right) = P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re_1) = \left(R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{x}_1\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Exercice 2



$$\vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1$$

$$\vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1$$

$$\vec{e}_z = \vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta\,,\quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho\,,\quad \frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re_1} = \vec{0}$$

$\Re_1$ est en translation par rapport à $\Re \Rightarrow \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k} + R\vec{e}_\rho$ (*a* et *b* sont des constantes positives non nulles)

$\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = b\vec{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + R\vec{e}_\rho$

1. On exprime dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) :

a. les vecteurs de la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1 \\ \vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos(\theta)\vec{e}_\rho = cos^2(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)sin(\theta)\vec{k}_1 \\ sin(\theta)\vec{e}_\theta = -sin^2(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)cos(\theta)\vec{k}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow cos(\theta)\vec{e}_\rho - sin(\theta)\vec{e}_\theta = \vec{j}_1$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1 \\ \vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sin(\theta)\vec{e}_\rho = sin(\theta)cos(\theta)\vec{j}_1 + sin^2(\theta)\vec{k}_1 \\ cos(\theta)\vec{e}_\theta = -cos(\theta)sin(\theta)\vec{j}_1 + cos^2(\theta)\vec{k}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta = \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{j}_1 = cos(\theta)\vec{e}_\rho - sin(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{k}_1 = sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{i}_1 = \vec{e}_z \end{cases}$$

b. le vecteur vitesse du point *M* par rapport au repère $\Re$:

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{OM}}_{\vec{0}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re_1}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \frac{d\left(b\vec{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + R\vec{e}_\rho\right)}{dt/\Re_1} = at\vec{k}_1 + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = at\vec{k}_1 + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = at\left(sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta\right) + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = at\,sin(\theta)\vec{e}_\rho + \left(R\dot{\theta} + at\,cos(\theta)\right)\vec{e}_\theta$$

c. le vecteur vitesse du point *M* par rapport au repère R_1 :

$$\vec{v}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = \frac{d(R\vec{e}_\rho)}{dt/\Re_1} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(M/\Re_1) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$:

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M}\wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = R\vec{e}_\rho\wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \frac{d\left(mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z\right)}{dt/\Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z$$

e. le poids de *M* et les forces d'inertie :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\,cos(\theta)\vec{e}_\theta$: poids de *M*
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2/\Re} = \frac{d^2\left(b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2/\Re} = a\vec{k} = a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = a\vec{k}_1 = a\sin(\theta)\vec{e}_\rho + a\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}_r(M) = \vec{0} \wedge R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = -ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{F}_c = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ le poids de M et les forces d'inertie sont :

$\vec{P} = -mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta$, $\vec{F}_e = -ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta$, $\vec{F}_c = \vec{0}$

2. $\vec{\gamma}(O_1/\Re) = a\vec{k} \Rightarrow \|\vec{\gamma}(O_1/\Re)\| = a > 0 \Rightarrow$ le point O_1 a un mouvement rectiligne accéléré suivant $\vec{k}_1$.

Le point O_1 est un fixe dans $\Re_1$ et $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$ $\forall t \Rightarrow \Re_1$ est en translation non uniforme par rapport à $\Re$, donc $\Re_1$ est un référentiel non galiléen.

3. Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re$:

Dans le repère $\Re$, la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de *M* ($\vec{P}$). Ainsi l'énergie potentielle du poids de *M* par rapport au repère $\Re$ est :

$$E_P(M/\Re) = E_P(\vec{P}/\Re)$$

$$dE_P(M/\Re) = dE_P(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow dE_P(M/\Re) = mgdz \Rightarrow E_P(M/\Re) = mgz + cte$$

$$\overrightarrow{OM} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k} + R\vec{e}_\rho = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k} + R\cos(\theta)\vec{j} + R\sin(\theta)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (b + R\cos(\theta))\vec{j} + \left(\frac{1}{2}at^2 + R\sin(\theta)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow y = b + R\cos(\theta) \text{ et } z = \frac{1}{2}at^2 + R\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re) = \frac{1}{2}mgat^2 + Rmg\sin(\theta) + cte$$

A $t = 0$: $\theta = 0$ et $E_p(M/\Re) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re) = \frac{1}{2}mgat^2 + Rmg\sin(\theta)$$

4. Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$:

$$\vec{F}_e = -ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta = -ma\vec{k}_1 \quad , \quad \vec{k}_1 = \sin(\theta)\vec{e}_\rho + \cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \wedge & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & & -ma \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \Re_1$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re_1) = E_p(\vec{F}_e/\Re_1) + E_P(\vec{P}/\Re)$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = -dW\left(\vec{F}_e / \Re\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{O_1M} = ma\vec{k}_1\left(dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right)$$
$$\left(M \in \left(y_1 o z_1\right) \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0 \right)$$
$$\Rightarrow dE_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = madz_1$$
$$\Rightarrow E_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = maz_1 + cte$$
$$z_1 = R\sin(\theta) \Rightarrow E_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = maR\sin(\theta) + cte$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = -dW\left(\vec{P} / \Re_1\right) = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = mg\vec{k}_1\left(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right)$$
$$M \in \left(y_1 o z_1\right) \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0 \Rightarrow dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mg\vec{k}_1\left[dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right]$$
$$\Rightarrow dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgdz_1$$
$$\Rightarrow E_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgz_1 + cte$$
$$\Rightarrow E_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgR\sin(\theta) + cte$$

Alors l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$ est :

$$\Rightarrow E_P\left(M / \Re_1\right) = maR\sin(\theta) + mgR\sin(\theta) + cte$$
$$A\ t = 0 :\ \theta = 0 \text{ et } E_p\left(M / \Re_1\right) = 0 \Rightarrow cte = 0$$
$$\Rightarrow E_P\left(M / \Re_1\right) = mR\sin(\theta)(a + g)$$

5. Energie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$:

$$E_c\left(M / \Re_1\right) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2\left(M / \Re_1\right) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}\left(M / \Re_1\right)\right\|^2$$
$$\Rightarrow E_c\left(M / \Re_1\right) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

6. Théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow m\vec{\gamma}\left(M / \Re_1\right) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$

N.B : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\right)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement $\Rightarrow$ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_\theta = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit donc :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho = -mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta + R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z - ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$
$$\Rightarrow \left(mR\ddot{\theta} + mg\cos(\theta) + ma\cos(\theta)\right)\vec{e}_\theta + \left(mg\sin(\theta) + ma\sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho - R_z\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta} + mg\cos(\theta) + ma\cos(\theta) = 0 \\ mg\sin(\theta) + ma\sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2 = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R}\cos(\theta) \\ R_\rho = m\sin(\theta)(g+a) - mR\dot{\theta}^2 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Equation différentielle du second ordre en *t* vérifiée par θ : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R}\cos(\theta)$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur *M* par le cerceau : $\vec{R} = m\left(\sin(\theta)(g+a) - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho$

7. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow dE_c\left(M/\Re_1\right) = dW\left(\sum \vec{F}_{ext} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$

$$(dW(\vec{F}_c / \Re_1) = 0 \text{ voir le cours})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} \text{ avec } \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW(\vec{P} / \Re_1) + dW(\vec{R} / \Re_1) + dW(\vec{F}_e / \Re_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{P} / \Re_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R} / \Re_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{F}_e / \Re_1)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{P} / \Re_1) + P(\vec{R} / \Re_1) + P(\vec{F}_e / \Re_1) \quad (P : \text{puissance})$$

$$\frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P(\vec{P} / \Re_1) = \vec{P}\vec{v}(M / \Re_1) = (-mg\, sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\, cos(\theta)\vec{e}_\theta)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -mg\, cos(\theta)R\dot{\theta}$$

$$P(\vec{R} / \Re_1) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = (R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 0$$

$$P(\vec{F}_e / \Re_1) = \vec{F}_e\vec{v}(M / \Re_1) = (-ma\, sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\, cos(\theta)\vec{e}_\theta)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -ma\, cos(\theta)R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\, cos(\theta)R\dot{\theta} - ma\, cos(\theta)R\dot{\theta} \Rightarrow R\ddot{\theta} = -g\, cos(\theta) - a\, cos(\theta)$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R} cos(\theta)$

8. <u>Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$</u> :

$\Re_1$ est non galiléen et $\vec{F}_e$ est conservative dans $\Re_1 \Rightarrow dE_m(M/\Re_1) = dW(\vec{F}_{ncon} / \Re_1)$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{F}_{ncon} / \Re_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon} / \Re_1)$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_P(M/\Re_1) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\, sin(\theta)(a+g)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR(a+g)\dot{\theta}\, cos(\theta)$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P(\vec{F}_{ncon} / \Re_1) = P(\vec{R} / \Re_1) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = 0$$

$$\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR(a+g)\dot{\theta}\, cos(\theta) \Rightarrow R\ddot{\theta} + (a+g)cos(\theta)$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R} cos(\theta)$

9. <u>Théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$</u> :

$\Re_1$ est non Galiléen et O_1 est fixe dans $\Re_1 \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = R\vec{e}_\rho \wedge (-mg\, sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\, cos(\theta)\vec{e}_\theta) = -Rmg\, cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = R\vec{e}_\rho \wedge (R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z) = -RR_z\vec{e}_\theta$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_e = R\vec{e}_\rho \wedge (-ma\, sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\, cos(\theta)\vec{e}_\theta) = -Rma\, cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_c = \vec{0}$$

$$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z = -Rmg\, cos(\theta)\vec{e}_z - RR_z\vec{e}_\theta - Rma\, cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow (mR^2\ddot{\theta} + Rmg\, cos(\theta) + Rma\, cos(\theta))\vec{e}_z + RR_z\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR^2\ddot{\theta} + Rmg\, cos(\theta) + Rma\, cos(\theta) = 0 \\ RR_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\ddot{\theta} + g\, cos(\theta) + a\, cos(\theta) = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R}cos(\theta)$

Exercice 3

1. Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}$:

Vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère $\mathfrak{R}$:

- $\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\mathfrak{R}} = \dfrac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\mathfrak{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$
- $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \dfrac{d\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{dt/\mathfrak{R}} = \dfrac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt/\mathfrak{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

Energies mécanique de M par rapport au repère $\mathfrak{R}$:

- $E_c(M/\mathfrak{R}) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}(M/\mathfrak{R})^2 \Rightarrow E_c(M/\mathfrak{R}) = \dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \dfrac{1}{2}m\rho^2\omega^2$
- $dE_{Pg} = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{e}_z(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = mgdz$, $dz = 0 \rightarrow E_{Pg} = Cte \Rightarrow E_p(M/\mathfrak{R}) = Cte$

$E_m(M/\mathfrak{R}) = E_c(M/\mathfrak{R}) + E_p(M/\mathfrak{R}) \qquad \Rightarrow \qquad E_m(M/\mathfrak{R}) = \dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \dfrac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte$

Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}$:

$\dfrac{dE_m(M/\mathfrak{R})}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\mathfrak{R})$, $P(\vec{F}_{ncon}/\mathfrak{R}) = P(\vec{R}/\mathfrak{R}) = \vec{R}\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z)(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = R_\varphi\rho\omega$

$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$, mouvement sans frottement $\rightarrow \quad R_\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$

Théorème du moment cinétique ou P.F.D $\Rightarrow$ $R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$ $\Rightarrow$ $P(\vec{F}_{ncon}/\mathfrak{R}) = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$

$$\frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte\right)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$\rightarrow \ m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho} = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2 \rightarrow \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 2\rho\omega^2 \ \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$

La solution de cette équation est sous la forme : $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$\rho(t=0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0 \rightarrow A + B = \rho_0$ et $A\omega - B\omega = 0 \rightarrow A = B = \dfrac{\rho_0}{2} \rightarrow \rho(t) = \dfrac{\rho_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 coh(\omega t)$

2. Application du principe fondamental de dynamique dans $\mathfrak{R}$:

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$

$\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$ (réaction de la tige sur M), $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ (poids de M)

$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho$:force de rappel (force appliquée par le ressort sur M)($d\ell = \rho - \rho_0$)

$\rightarrow -mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z - k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

$\rightarrow R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$ et $-k(\rho - \rho_0) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)$

$\Rightarrow \ \ddot{\rho} + (\dfrac{k}{m} - \omega^2)\rho = \dfrac{k}{m}\rho_0$: la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige lorsque M soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0.

Série N° 5
Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

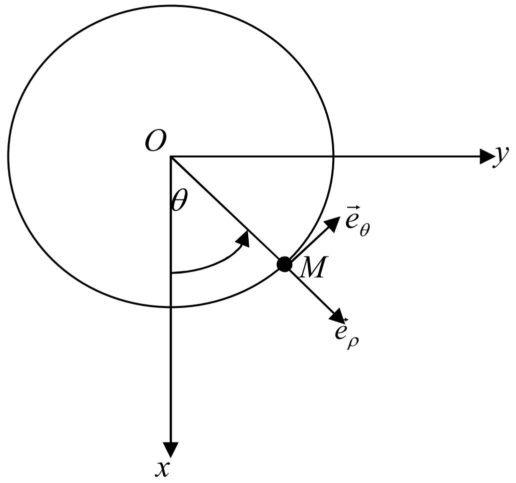
Exercice 1

Soit une particule M de masse m en mouvement, dans le plan xOy (plan vertical), sans frottement sur un cerceau (C) de rayon R et de centre O. La position de M est définie par l'angle θ (voir figure ci-dessous).

1. Calculer l'énergie potentielle de M dans le repère $\Re(O,x,y,z)$ (on suppose que $E_p(\theta = 0) = 0$).

2. Déterminer les positions d'équilibre de M.

3. Etudier leur stabilité.



Exercice 2

On considère le repère fixe $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ($xOy$) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $R_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base O.N.D $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k} = \vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) ($0<\alpha<\pi/2$).

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_1$.

Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) soit O.N.D.

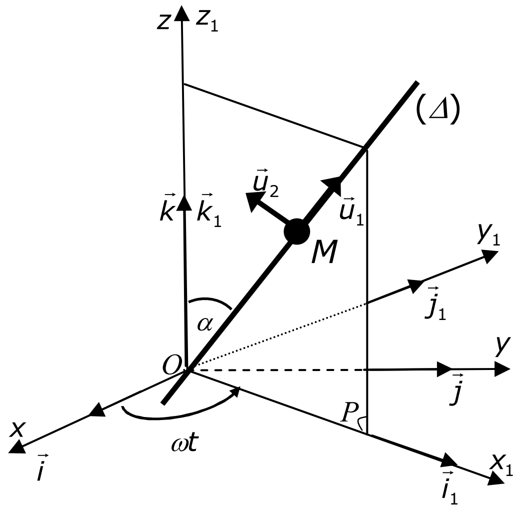
1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, le poids de M et les forces d'inertie.

2. Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1**.**

3. Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre relatif r_{eq} de l'anneau sur la tige que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

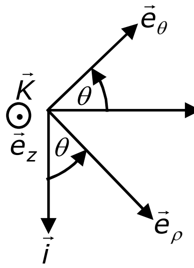
4. Déterminer la position d'équilibre relatif r_1 de l'anneau sur la tige pour une vitesse angulaire $\omega_1 \geq \omega_0$.

5. Etudier la stabilité de l'équilibre relatif.



Solution série N° 5
Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

Exercice 1



$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$
$$\vec{e}_z = \vec{k}$$
$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta,\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho,\ \frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{i} = \cos(\theta)\vec{e}_\rho - \sin(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{j} = \sin(\theta)\vec{e}_\rho + \cos(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{k} = \vec{e}_z$$

$$\Re'(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z),\ \Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \Rightarrow \vec{\Omega}(\Re'/\Re) = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

Bilan des forces :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{i} = mg\cos(\theta)\vec{e}_\rho - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta$

Réaction : $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$ (mouvement sans frottement $\Rightarrow R_\theta = 0$)

1. Energie potentielle de M par rapport au repère $\Re$:

On a $E_P(M/\Re) = E_P(\vec{P}/\Re)$

$$dE_P(M/\Re) = dE_P(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = -mg\vec{i}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$
$$\Rightarrow dE_P(M/\Re) = -mgdx \Rightarrow E_P(M/\Re) = -mgx + cte$$
$$x = R\cos(\theta) \Rightarrow E_P(M/\Re) = -mgR\cos(\theta) + cte$$
$$E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow cte = mgR$$
$$\Rightarrow E_P(M/\Re) = mgR(1 - \cos(\theta))$$

2. Positions d'équilibre de M :

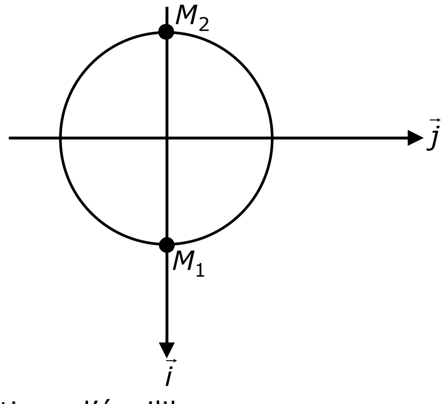
Une position d'équilibre est une position où l'énergie potentielle est optimale (maximale ou minimale). C'est-à-dire à cette position on aura :

$$\frac{dE_P}{d\theta} = 0\ (\ E_P(M/\Re) = E_P(\theta)\ )$$

$$\frac{dE_P}{d\theta} = mgR\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = k\pi\ (\ k \in Z\ )$$

$\Rightarrow$ Sur la trajectoire circulaire de M, on a deux positions d'équilibre qui correspondent aux valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre sont : $M_1(\rho = R, \theta = 0)$ et $M_2(\rho = R, \theta = \pi)$ en coordonnées polaires ou $M_1(R,0)$ et $M_2(-R,0)$ en coordonnées cartésiennes.



3. Etude de la stabilité des positions d'équilibre :

Pour étudier la stabilité, on détermine le signe de la dérivée seconde de la fonction $E_P(\theta)$ par rapport à θ en ces deux positions d'équilibre M_1 et M_2.

$$\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = mgR\cos(\theta)$$

$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_P}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgR > 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est minimale en $M_1 \Rightarrow M_1$ est une position d'équilibre stable.

$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_P}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgR < 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est maximale en $M_2 \Rightarrow M_2$ est une position d'équilibre instable.

Exercice 2

1. le poids de M et les forces d'inertie **:**

- $\vec{P} = -mg\vec{k}_1$

- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$, $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/R) + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}\right] = -r\omega^2\sin(\alpha)\vec{i}_1$

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}_1 \qquad \Rightarrow \vec{F}_e = mr\omega^2\sin(\alpha)\vec{i}_1$$

- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$, $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}(M/R_1) = 2\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{j}_1$

2. Energie potentielle de M par rapport au repère R_1, en fonction de r :

$x_1 = r\sin(\alpha) \rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2 x_1\vec{i}_1 \rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \rightarrow E_{Pe}$

$dE_{Pe} = -dw\left(\vec{F}_e/R_1\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{OM} = -m\omega^2 x_1\vec{i}_1\left(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = -m\omega^2 x_1 dx_1$

$$\rightarrow E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_1^{\,2} + Cte \Rightarrow E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2(\alpha) + Cte$$

$dE_{Pg} = -dw\left(\vec{P}/R_1\right) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{K}_1\left(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = mgdz_1$

$\rightarrow E_{Pg} = mgz_1 + Cte$, $z_1 = r\cos(\alpha) \Rightarrow E_{Pg} = mgr\cos(\alpha) + Cte$

$$\Rightarrow E_p(M/R_1) = mgr\cos(\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2(\alpha) + Cte$$

3. si r_{eq} est une position d'équilibre, on aura : $\left.\frac{dE_p(M/R_1)}{dr}\right|_{r=r_{eq}} = 0$

$$\rightarrow g\cos(\alpha) - \omega^2 r_{eq}\sin^2(\alpha) = 0 \rightarrow r_{eq} = \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}$$

$$r_{eq} \le L \rightarrow \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)} \le L \rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}}$$

4. la position d'équilibre r_1 pour une vitesse angulaire $\omega_1 \ge \omega_0$ est : $r_1 = \frac{g\cos(\alpha)}{\omega_1^{\,2}\sin^2(\alpha)}$

5. $\frac{dE_p(M/R_1)}{dr} = mg\cos(\alpha) - m\omega^2 r\sin^2(\alpha) \rightarrow \frac{d^2E_p(M/R_1)}{dr^2} = -m\omega^2\sin^2(\alpha) < 0$

$\Rightarrow$ l'équilbre est instable quelque soit r_{eq} .