- بسم الله الرحمن الرحيم -

M 01 - Electronique des systèmes embarqués

Cours : Traitement avancé de Signal

Chapitre 01 : Rappels sur les filtres numériques (RIF et RII)

1) Transformé en Z :

$$Z[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) Z^{-n}$$

2) Representation d'un filtre numérique :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$X(Z)$ $H(Z)$ $Y(Z)$

• fonction de transfert en Z.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j Z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i Z^{-i}}$$

$$= \frac{B(Z)}{A(Z)} \Big| a_0 = 1$$

• Réponse impulsionnel (Transformée en Z inverse de $H(Z)$)

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) Z^{-n}.$$

* Equation aux différences.

$$y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$$

3) Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) :

$$H(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)=1} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j Z^{-j}}{1}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j Z^{M-j}}{Z^M}$$

c'est un filtre d'ordre M

$\Rightarrow$ un pôle d'ordre M à l'origine

$\rightarrow$ M zéro.

RIF est toujours stable

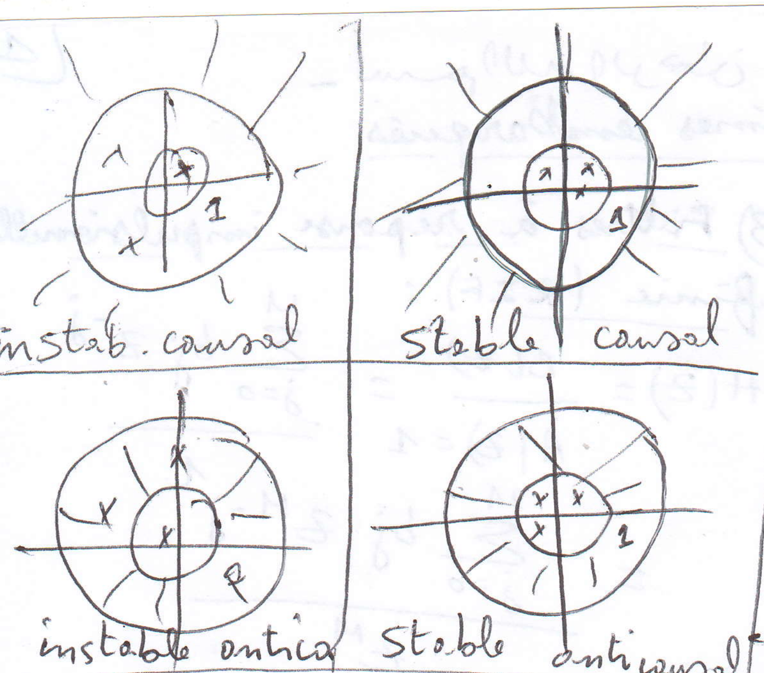
4) Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) :

$$H(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j Z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i Z^{-i}}$$

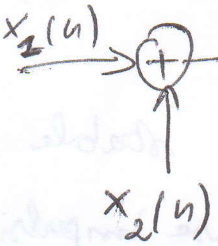
$N \neq 0$ au moins un des $a_i \neq 0$

c'est un filtre d'ordre N (RII). le RII est stable si tous les N racines de $A(Z)$, qui sont des pôles, sont à l'interieur à cercle unité c-à-d leurs modules sont < 1

* si les zéros sont aussi $\in$ au cercle d'unité le filtre est à phase minimale



Structures pour la réalisation des filtres numériques :

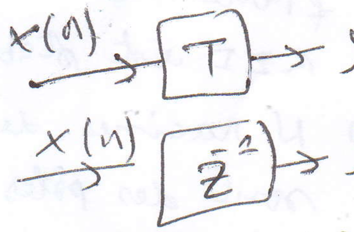


$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$

Additionneur

$y(n) = a\,x(n)$

Multiplieur



$y(n) = x(n-1)$

$y(n) = x(n-1)$

Retard / Delay

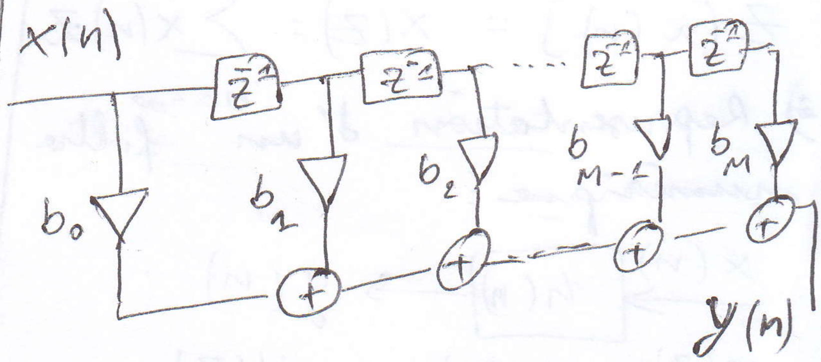
- Réalisation des filtres RIF

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-(M-1)} + \dots b_1 z^{-1} + b_0$$

$$\Rightarrow Y(z) = b_M z^{-M} X(z) + b_{M-1} z^{-(M-1)} X(z)$$

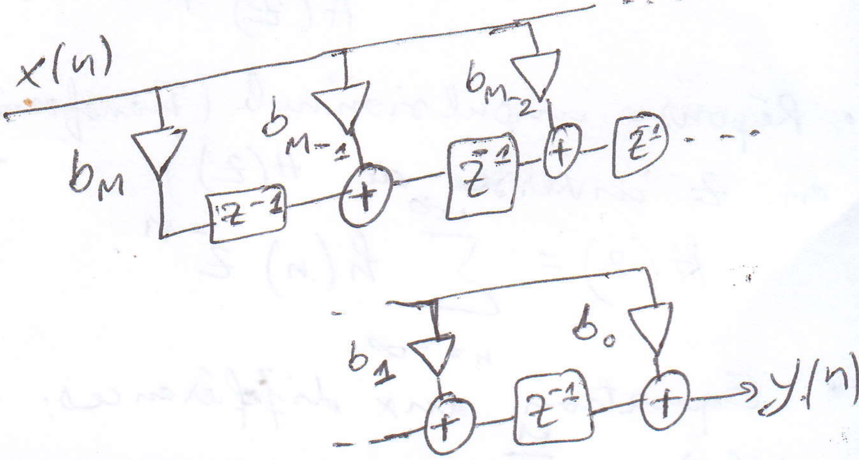
$$\dots + b_1 x(n-1) + b_0 x(n)$$

A) Structure canonique (non recursive) :



B) Structure transposée :

$$Y(z) = \Big(\big(b_M X(z) z^{-1} + b_{M-1} X(z)\big) z^{-1} + \dots b_1 X(z)\Big) z^{-1} + b_0 X(z)$$

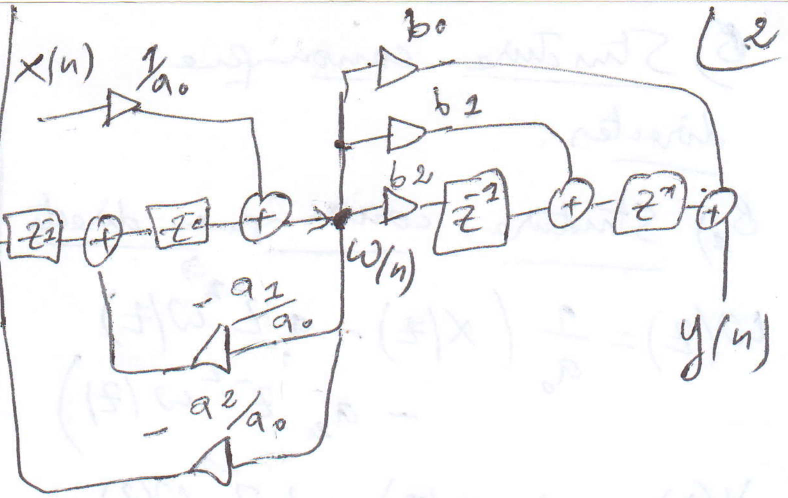


Structure des filtre RII :

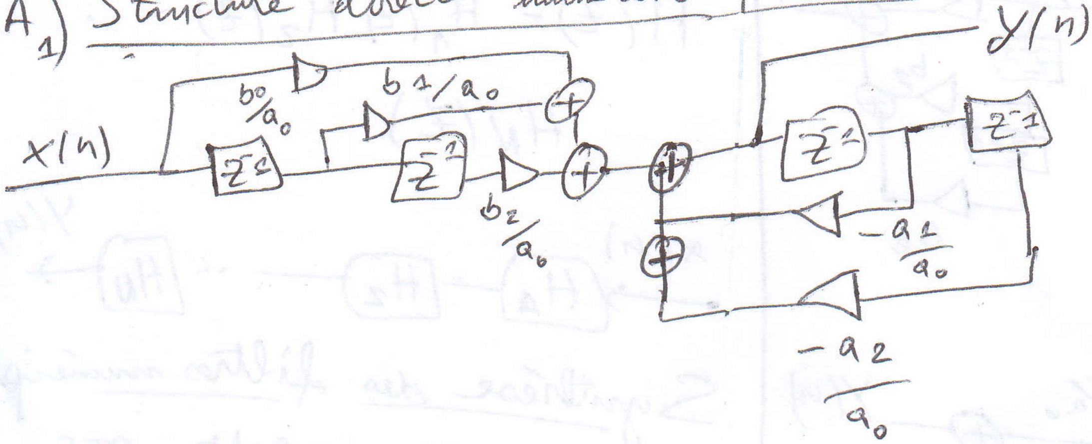
A) Structure directe non canonique.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}$$

$$\frac{a_2}{a_0} z^{-2} Y(z) + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} Y(z) + Y(z) = \frac{b_2}{a_0} z^{-2} X(z) + \frac{b_1}{a_0} z^{-1} X(z) + \frac{b_0}{a_0} X(z)$$



A1) Structure directe immediate



A 1

A2) Structure directe transposé

$$Y(z) = \underbrace{\frac{X(z)}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}}_{W(z)} \left(b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0 \right)$$

$$Y(z) = W(z) \left(b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0 \right)$$

$$W(z) = X(z) \frac{1}{a_0} + \left(\frac{-a_2}{a_0} z^{-1} W(z) + \frac{-a_1}{a_0} W(z) \right) z^{-1}$$

$$Y(z) = W(z) b_0 + \left(b_2 z^{-1} W(z) + b_1 W(z) \right) z^{-1}$$

$$X(z) = W(z) \left(a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0 \right)$$

$$\frac{X(z)}{a_0} = \frac{a_2}{a_0} z^{-2} W(z) + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} W(z) + \frac{a_0}{a_0} W(z)$$

$$W(z) = \frac{1}{a_0} X(z) + \frac{-a_2}{a_0} z^{-2} W(z) + \frac{-a_1}{a_0} z^{-1} W(z).$$

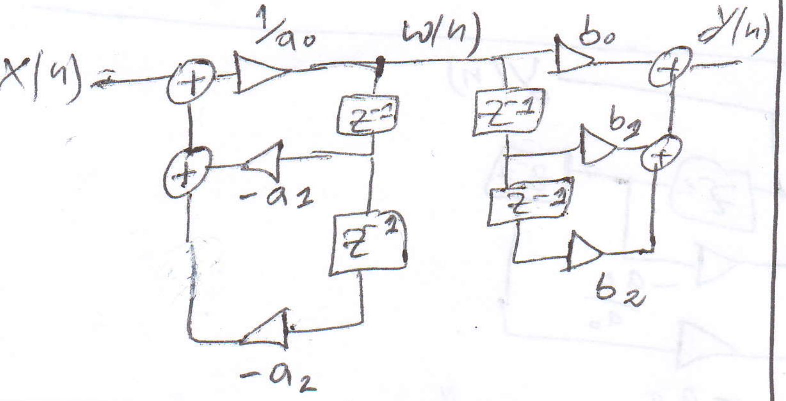
$$\boxed{W(z) = \frac{1}{a_0} X(z) + \left(\frac{-a_2}{a_0} z^{-1} W(z) + \frac{-a_1}{a_0} W(z) \right) z^{-1}}$$

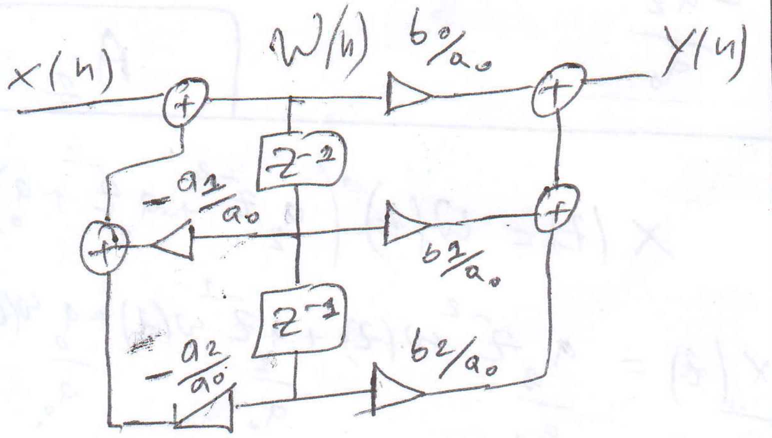
B) Structure canonique directes :

B_1) Structure canonique directe

$$W(z) = \frac{1}{a_0}\left(X(z) - a_1 z^{-1} W(z) - a_2 z^{-2} W(z) \right)$$

$$Y(z) = b_0 W(z) + b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z).$$

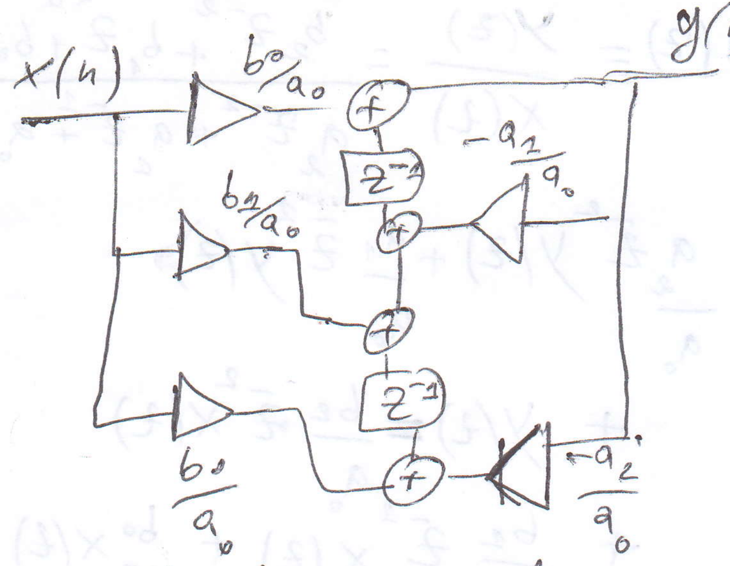




B_2) Structure canonique directe transposée :

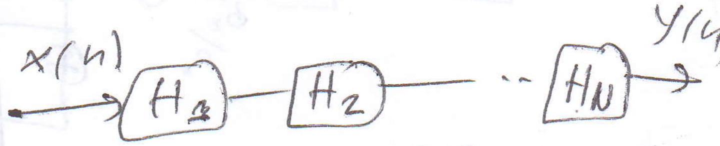
$$Y(z)\left(a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0\right) = X(z)\left(b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0\right).$$

$$Y(z) = \frac{b_0}{a_0} X(z) + \left(\frac{b_1}{a_0} X(z) - \frac{a_1}{a_0} Y(z) + \left(\frac{b_2}{a_0} X(z) - \frac{a_2}{a_0} Y(z) z^{-1} \right) z^{-1}\right)$$



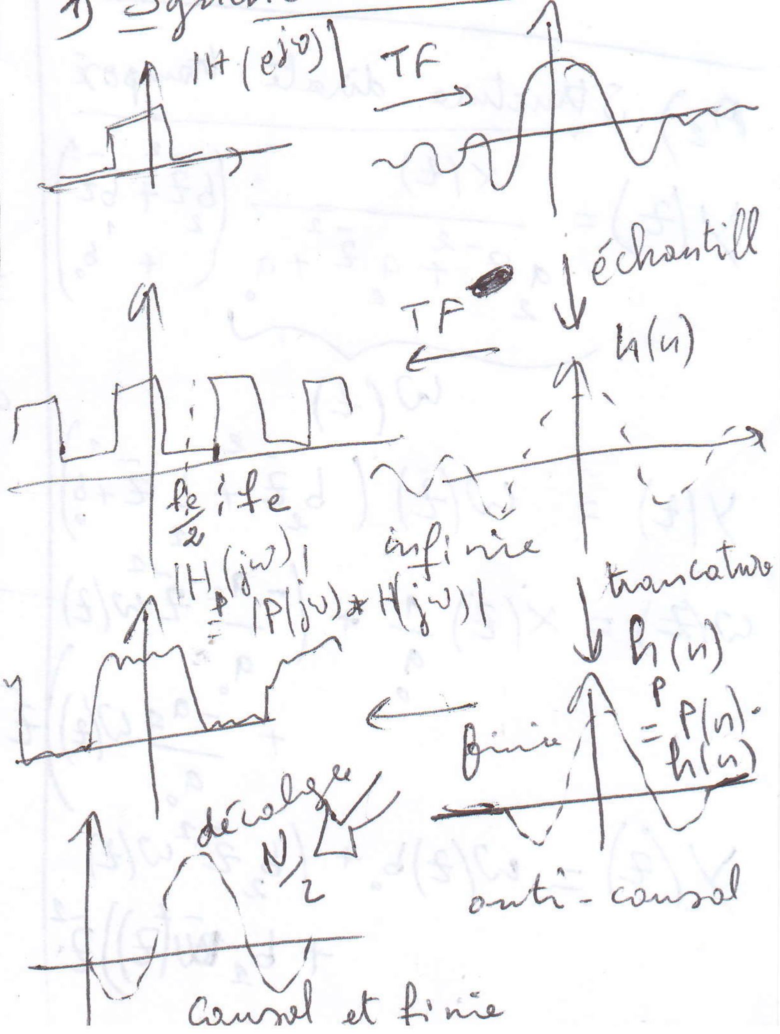
c) Structure cascade

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \cdots H_N(z).$$



Synthèse des filtres numériques

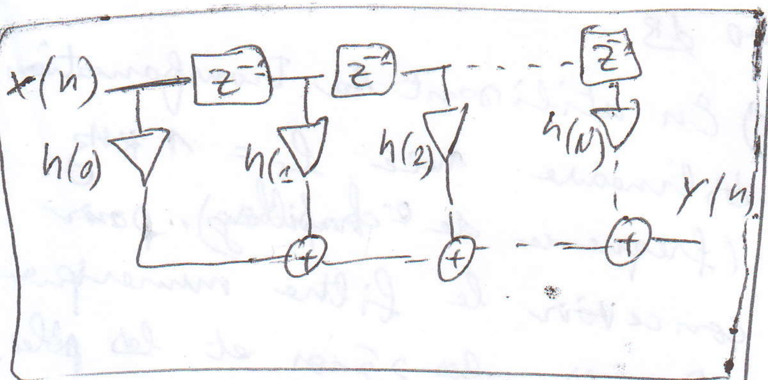
1) Synthèse de filtres RIF



Lorsque on décale le signal dans la domaine temporelle il donne un déphasage linéaire dans la domaine fréquentielle. $h_p(n)$ $(0 ... N)$

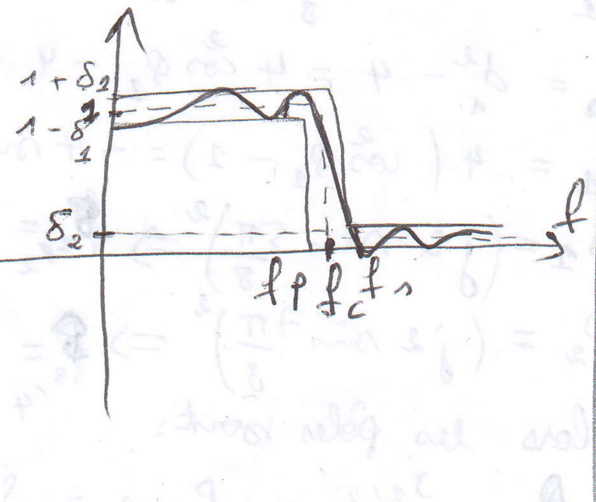
$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_p(n)} \longrightarrow y(n).$$

$$y(n) = x(n) * h_p(n)$$
$$= \sum_{m=0}^{N} h(m)\, x(n-m).$$
$$= h(0)\, x(n) + h(1)\, x(n-1) \ldots h(N)\, x(n-N).$$



c'est la Méthode des fenêtres

Gabarit réel continu



filtre caractérisé par :

- La bande passante BP
- La bande atténuée (ou coupée)
- La largeur $\Delta f = f_s - f_p$ de la zone de transition
- l'amplitude des oscillations en bande passante δ_1
- l'amplitude des oscillations en bande ~~passante~~ δ_2 atténuée δ_2

$$\boxed{N \simeq \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{1}{10\,\delta_1 \delta_2}\right) \frac{F_e}{\Delta f}}$$

recherche fenêtre de troncature

La synthèse des filtres RII : par la transformation bilinéaire

principe :

- Calculer un filtre analogique $H(S)$.
- transformer le filtre analogique en un filtre numérique équivalent $H(Z)$

$$H(Z) = H(S)\Big|_{S = \frac{2}{T_e}\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}}$$

T_e : période d'échan

pôles : $z = \dfrac{\frac{2}{T_e} + s}{\frac{2}{T_e} - s}$

Déformations des fréquences

$$f_a = \frac{1}{\pi T_e} tg(\pi f_d T_e)$$

$$f_d = \frac{1}{\pi T_e} arctg(\pi f_a T_e)$$

Distortion harmonique.

Filtre passe-bas de Butterworth d'ordre N :

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2N}}}$$

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1+S^{2N}}}$$ Normalisée

$$\boxed{H(s) = \prod_{i=1}^{N/2} \frac{1}{S^2 + d_i S + 1}}$$ pour N pair

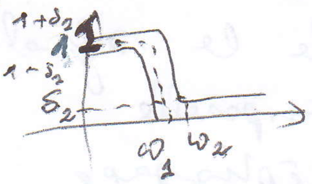
$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{i=1}^{(N+1)/2} \frac{1}{s^2 + d_i s + 1}}$$ pour N impair

$d_i = -2\cos\varphi_i$; $i = 1, \frac{N}{2}$

$\varphi_i = \frac{\pi}{2N}(N + 2i - 1)$, $i = 1, N$.

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$\boxed{N \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_2\sqrt{\delta_1}}\right)}{\log \frac{\omega_2}{\omega_1}}}$$



ω_1 ou ω_p	passe
ω_2 ou ω_s	stop

Exemple

pour $N = 4 \rightarrow \Omega_c = 200\pi$ rd/s

a) Determine les zéros et les pôles de la fct de transfert $H(s)$

b) quelle est ~~(la)~~ l'attenuation dans les bandes passante atténuée ?

b) quelles sont les fréquences de la bande passante ω_1 et de la bande atterné ω_2 si l'attenuation dans la bande passante est 1dB et de la BS (BA, atténuée) et 40 dB.

c) En utilisant la transformation bilinéaire avec $f_s = 1$ KHz (fréquence de échantillonage), pour concevoir le filtre numérique. Donner les zéros et les pôles.

Solu : $N = 4$

$$H(s) = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{s^2 + d_i s + 1} = \frac{1}{(s^2 + d_1 s + 1)(s^2 + d_2 s + 1)}$$

$d_1 = -2\cos\frac{5\pi}{8}$; $d_2 = -2\cos\frac{7\pi}{8}$

$\Delta_1 = d_1^2 - 4 = 4\cos^2\varphi_1 - 4$

$\Delta_1 = 4(\cos^2\varphi_1 - 1) = -4\sin^2\varphi_1$

$\Delta_1 = \left(j2\sin\frac{5\pi}{8}\right)^2 \Rightarrow P_{1,2} = e^{\pm j\frac{5\pi}{8}}$

$\Delta_2 = \left(j2\sin\frac{7\pi}{8}\right)^2 \Rightarrow P_{3,4} = e^{\pm j\frac{7\pi}{8}}$

Alors les pôles sont :

$P_{1/2} = \frac{S_{1/2}}{\omega_c} \Rightarrow P_{1/2}\,\omega_c = S_{1/2}$

$s_{3,4} = p_{3,4} \cdot \omega_c$.

$$\begin{cases} S_{1,2} = 200\pi \, e^{\pm j\frac{5\pi}{8}} \\ S_{3,4} = 200\pi \, e^{\pm j\frac{7\pi}{8}} \end{cases}$$

les zéro sont à ∞ $S \to \infty$

b) les fréquences de la bande passante ω_1 et la bande atténué ω_2:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$20 \log |H(\omega_1)| = -1 \text{ dB}$$

$$|H(\omega_1)| = 10^{-1/20}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^8} = 10^{-2/20}$$

$$1 = \left[1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^8\right] 10^{-1/10}$$

$$1 = \frac{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^8}{10^{1/10}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_1 = \left(10^{1/10}-1\right)^{1/8} \cdot 200\pi}$$

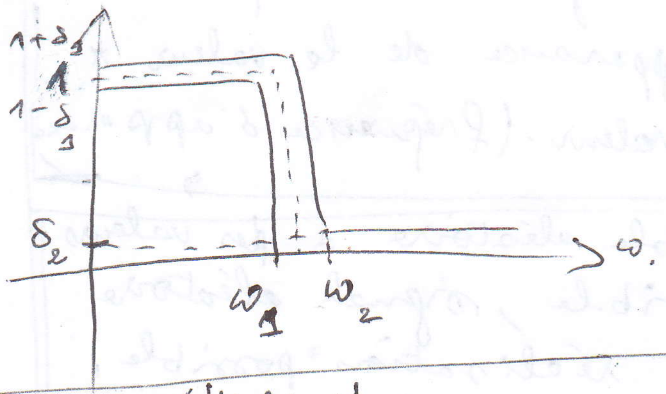
$\simeq 530,673$ rd/s

même méthode on trouve :

$$\boxed{\omega_2 = 1386,89 \text{ rd/s}}$$

c) On utilise simplement l'expression

$$z = \frac{\frac{2}{T_e}+s}{\frac{2}{T_e}-s}$$



- $1-\delta_1 \leq |H(j\omega)| \leq 1+\delta_1$
  $|\omega| \leq \omega_1$
- $0 \leq |H(j\omega)| \leq \delta_2$
  $|\omega| \geq \omega_2$

La bande de transition $= \omega_2 - \omega_1$

δ_1 et δ_2 sont des amplitudes maximales ondulation dans BP et BA.

Les atténuations maximales α_1 dans BP et α_2 dans BA.

$$\alpha_1 = -20 \log_{10}(1-\delta_1) \Rightarrow \boxed{\delta_1 = 1-10^{\frac{-\alpha_1}{20}}}$$

$$\alpha_2 = -20 \log_{10}(\delta_2) \Rightarrow \boxed{\delta_2 = 10^{-\alpha_2/20}}$$

*__Exemple__ Soient : $\alpha_1 = 0,01$ dB et $\alpha_2 = 70$ dB

On calcule δ_1 et δ_2 :

$\delta_1 = 0,00115$; $\delta_2 = 0,000316$

CHAPITRE 02

Signaux aléatoires et processus stochastiques