* Le signal :

est la représentation physique de l'info.

* Le bruit :

tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation du signal.
إدراك

* Théorie du Signal :

est une discipline technique, a pour objectif : la description mathématique des signaux.

* Traitement du signal :

est une discipline technique, a pour objectif : l'élaboration et l'interprétation des signaux. تطوير ترجمة

* Traitement de l'information :

fournit un ensemble de concepts qui permet d'évaluer les performances des systèmes de transmission. آداءات

→ Codage de source : réduction de redondance.

→ Codage de canal : détection et correction des erreurs.

→ Cryptage : confidentialité.

* Théorie de Communication :

ensemble de concepts et méthodes développés dans le T.S et T.I.

* Fonctions du T.S : 2 Catégories :

①. Elaboration des signaux :

* Synthèse : création de signaux de forme approprié.
* Modulation ; Changement de fréq. : adapter le signal aux caractéristiques du canal de transmission.
* Codage : traduction en code binaire. (quantification)
* Compression.

②. Interprétation des signaux :

* Filtrage : élimination de certaines composantes indésirables.
* Détection : extraction du signal d'un bruit (corrélation).
* Identification : classement d'un signal dans des catégories définies.
* Analyse : isolement des composantes utiles d'un signal (TF).
* Mesure : estimation d'une grandeur caractéristiques d'un signal avec un certain degré de confiance (Valeur moyen...) تقدير

* Domaine d'application de T.S :

Tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations : إدراك

- Télécommunications
- Techniques de mesures.
- Analyses biomédicales.
- Radar, Sonar. [instrument de détection sous marine]
- Astronomie. → علم الفلك
- Seismologie. → علم الزلازل
- ... etc.

fz. daham

* Classification des signaux :

①. Classification phénoménotique :

- signaux physiques
  - déterministe
    - périodique
      - Sinusoïdale
      - Composite (complexe)
    - non périodique
      - transistoire
      - pseudo périodique (quasi)
  - aléatoire
    - stationnaire (bruit)
      - Ergodique
      - non Ergodique
    - non stationnaire (parole)

②. Classification Energétique :

- Signaux à :
  - Energie finie ($E_x < \infty$), $P_x = 0$ ⇓ les signaux transistoires
  - Puissance moyenne finie ($0 < P_x < \infty$), $P_x \neq 0$ / $E_x = \infty$ ⇓ les signaux périodiques

③. Classification dimensionnelle :

les signaux se classent selon le nombre de variables indépendantes qu'ils possèdent :

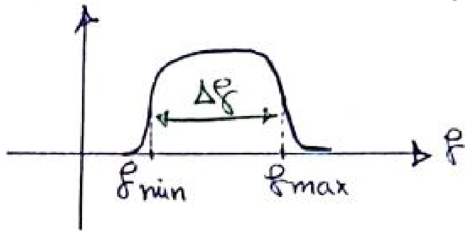
- signal :
  - Unidimensionnel $f(t)$ 1D [voie]
  - multidimensionnel
    - Bidimensionnel $f(x,t)$ 2D [image]
    - tri-dimensionnel $f(x,y,t)$ 3D [image dans l'espace]

④. Classification spectrale (fréquentielle) :

On classe les signaux selon "la largeur de bande" occupé par la distribution de son énergie ou de sa puissance (spectre de signal) en fonction de sa fréquence.

⟹ largeur de bande de fréquence :

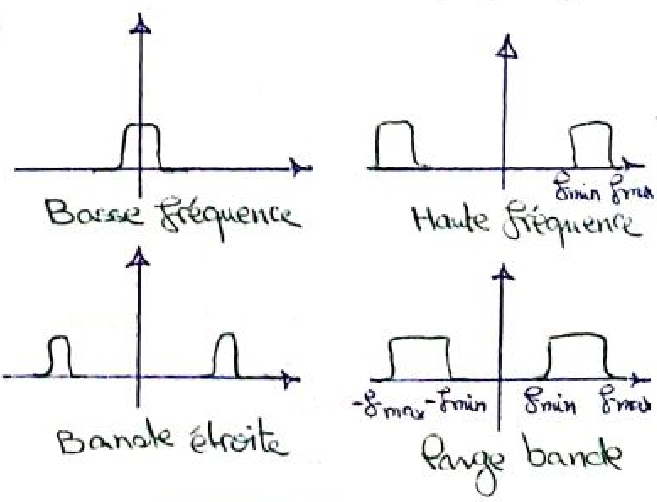
$$\begin{cases} B = \Delta f = f_{max} - f_{min} \\ f_{moy} = \dfrac{f_{max} + f_{min}}{2} \end{cases}$$



- Signaux à
  - bande étroite ($\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ petit), $f_{max} \approx f_{min}$
    - BF
    - HF
    - VHF
    - UHF
    - SHF

    ⟹ classés selon la variation de la fréq. moyen.
  - large bande ($\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ grand), $f_{max} \gg f_{min}$
    - signaux lumineux
      - infrarouge
      - visible
      - ultraviolet

    ⟹ classés selon la largeur d'onde pcq la fréq. est grande.

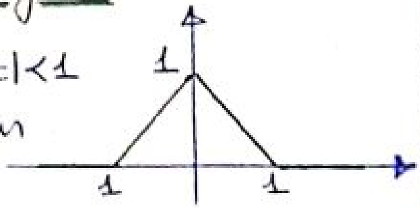


support borné = signaux à bande limité

fz. daham

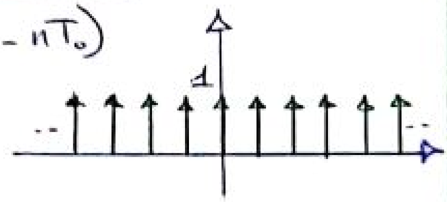
* fonction triangle :

$$tri(t) = \begin{cases} t+1 \ ; & |t|<1 \\ 0 \ ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$



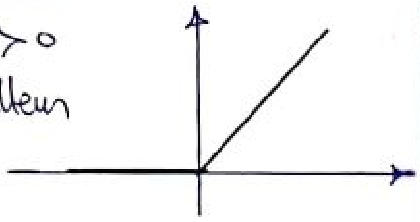
* Peigne de Dirac :

$$S_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



* fonction Rampe :

$$r(t) = \begin{cases} t \ ; & t>0 \\ 0 \ ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$



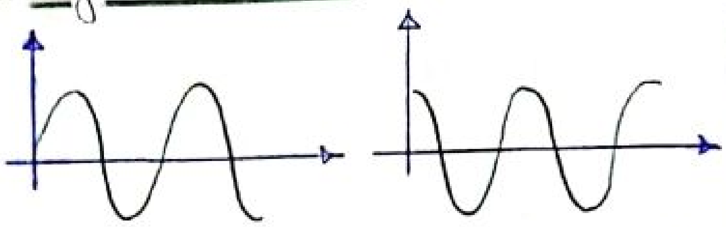
* Parité :
→ signal pair : $x(-t) = x(t)$
→ signal impair : $x(-t) = -x(t)$
* Causalité :
→ $x(t)$ est causal si : $x(t) = 0$ pour $t<0$.
* Périodicité :

$$x(t) = x(t+T)$$

* Signaux de durée finie (limité) :
* le spectre nul en dehors d'une bande de fréquence appelé : "signal à bande limité" ou "signal à spectre à support borné"

càd :
amplitude $= 0$ pour $t \notin T$
spectre $= 0$ pour $f \notin \Delta f$

* Signaux particuliers :
* Signal sinusoïdal :



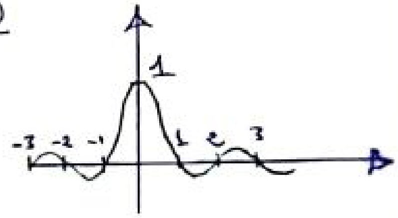
$x(t) = A\sin(\omega_0 t)$ $\qquad$ $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$

* signal exponentiel complexe :

$$\mathrm{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$$

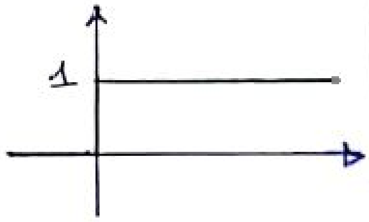
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\,dt = 1$$



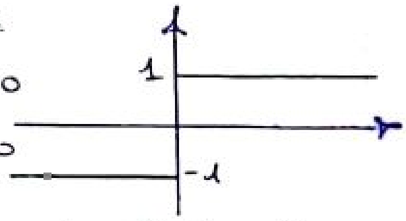
* fonction échelon unité (Heaviside) :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 \ ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$

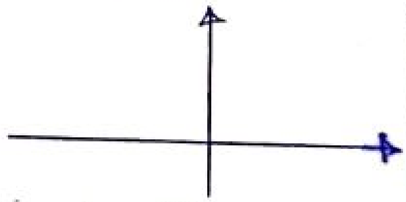


* fonction signe :

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \ ; & t<0 \\ 1 \ ; & t>0 \end{cases}$$

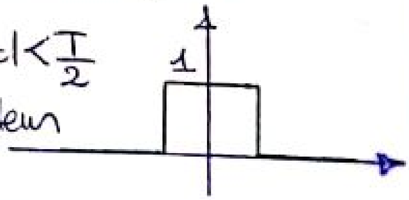


* fonction sinus cardinal (sinc) :



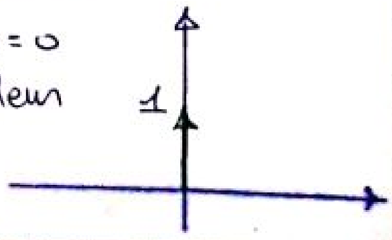
* fonction porte (rectangle) :

$$\mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 \ ; & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \ ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$



* Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 \ ; & t=0 \\ 0 \ ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Analyse des signaux périodiques :

Vers les séries de Fourier :

Joseph Fourier, qui travaillait sur la propagation de la chaleur sur des corps solides, a remarqué que la propagation de la chaleur sur un anneau ressemble à un mouvement harmonique, En physique nous donnons une expression plus générale à ce phénomène :

$$f(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

f : le déplacement périodique de la vibration de l'objet.
λ : La période dans l'espace
T : La période dans le temps
φ : la phase (cte)

⇒ Si nous fixons la variable "x", nous avons ici une fonction $f(t)$ périodique de période "T". L'idée de Fourier fut alors d'approximer le phénomène observé par une somme finie, constitué des harmoniques de la période fondamentale "T".

→ L'approximation est : (SF en cosinus)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

A_n : amplitude des harmoniques d'ordre "n".

⇒ Développement de "cosinus" :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\left[\cos(2\pi n f t)\cos(\varphi_n) - \sin(2\pi n f t)\sin(\varphi_n)\right]$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = A_n\cos(\varphi_n) \\ b_n = -A_n\sin(\varphi_n) \end{cases}$$

⇒ La forme trigonométrique de la SF :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(2\pi n f t) + b_n\sin(2\pi n f t)\right]$$

→ Prenant en compte la relation trigonométrique suivante :

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)\right)$$

donc :
$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ A_0 = \frac{a_0}{2} \\ \varphi_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

⇒ Les coefficients de série de Fourier :

* $a_0 = ?$

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_0}{2}\,dt + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^T a_n \times \cos(2\pi n f t)\,dt + \int_0^T b_n \sin(2\pi n f t)\,dt\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{\cancel{2}}{T}\int_0^T \frac{a_0}{\cancel{2}}\,dt = \frac{a_0}{T}\left[t\right]_0^T = \frac{a_0}{\cancel{T}}\left[\cancel{T}-0\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$$

si on écrire :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(2\pi n f t) + b_n\sin(2\pi n f t)\right]$$

et si on écrire :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(2\pi n f t) + b_n\sin(2\pi n f t)\right]$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

* $a_n = ?$

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi n f t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_0}{2}\times\cos(2\pi n f t)\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{T}\int_0^T a_n\cos(2\pi n f t)\times\cos(2\pi n f t)\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T b_n\sin(2\pi n f t)\cos(2\pi n f t)\,dt\right]$$

* $\int_T \cos(n)\cos(m) = 0$

* $\int_T \cos(n)\sin(m) = 0$

fz. daham

$$\Rightarrow \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi n f t) = \frac{2}{T} a_n \int_0^T \cos(2\pi n f t)\cos(2\pi n f t)dt$$

$$\boxed{2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi n f t) = \frac{a_n}{T}\int_0^T 2\cos^2(2\pi n f t)$$
$$= \frac{a_n}{T}\int_0^T (1+\cos(4\pi n f t))$$
$$= \frac{a_n}{T}\left[t + \cancel{\sin()}\right]_0^T$$
$$= \frac{a_n}{\cancel{T}}\left[\cancel{T} - 0\right] = a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(2\pi n f_0 t)dt}$$

* $\underline{b_n = ?}$

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(2\pi n f t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_0}{2}\cancel{\sin()}dt$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{T}\int_0^T a_n \cancel{\cos()\sin()}dt + \frac{2}{T}\int_0^T b_n \sin()\sin()dt\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin()dt = \frac{2b_n}{T}\int_0^T \sin^2()dt$$

$$\boxed{2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin()dt = \frac{b_n}{T}\int_0^T (1-\cos(4\pi n f t))dt$$
$$= \frac{b_n}{T}\left[t - \cancel{\sin(4\pi n f t)}\right]_0^T$$
$$= \frac{b_n}{\cancel{T}}\left[\cancel{T} - 0\right] = b_n$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi n f t)dt}$$

$\Rightarrow$ **la forme exponentielle complexe :**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos() + b_n\sin()\right]$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{j2\pi n f t}+e^{-j2\pi n f t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{j2\pi n f t}-e^{-j2\pi n f t}}{2j}\right)\right]$$
$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \underline{e^{j2\pi n f t}} + a_n \underline{e^{-j2\pi n f t}} - jb_n \underline{e^{j2\pi n f t}} + jb_n \underline{e^{-j2\pi n f t}}\right]$$
$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[e^{j2\pi n f t}(a_n - jb_n) + e^{-j2\pi n f t}(a_n + jb_n)\right]$$

$$\begin{cases} a_{-n} = a_n & \text{(pair)} \\ b_{-n} = -b_n & \text{(impair)} \end{cases} \qquad -(-b_n) = +b_{-n}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - jb_n)e^{j2\pi n f t} + \sum_{-n=1}^{+\infty}(a_{-n} - jb_{-n})e^{-j2\pi n f t}\right]$$
$$= \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n.e^{j2\pi n f t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_{-n}.e^{-j2\pi n f t}\right]$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f t}}$$

* $C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).dt$
* $C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$
* $C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$
* $\underline{C_n = |C_n|e^{-j\varphi_n}}$; $|C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

la forme polaire — le module

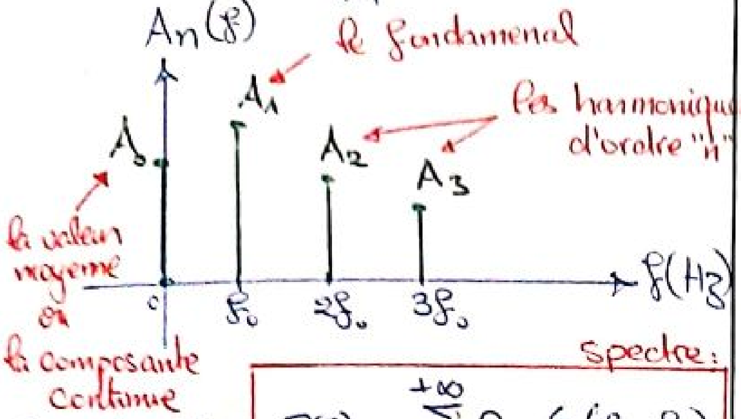
* $\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

fz. daham

* **Spectre d'amplitude : (pair)**

① **Unilatéral :** (la forme en harmoniq)

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$



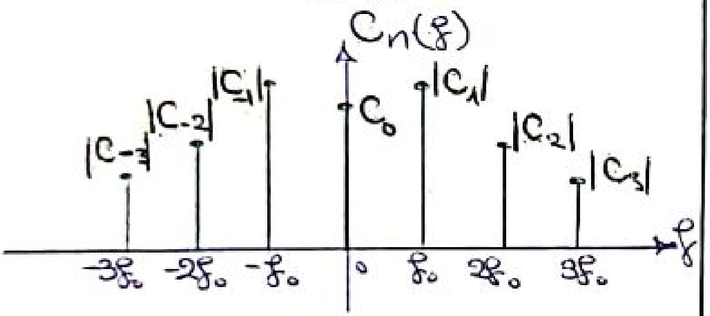
spectre :

$$\boxed{F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, \delta(f - n f_0)}$$

$$\begin{cases} A_n = A(n f_0) \\ f = n f_0 \end{cases}$$

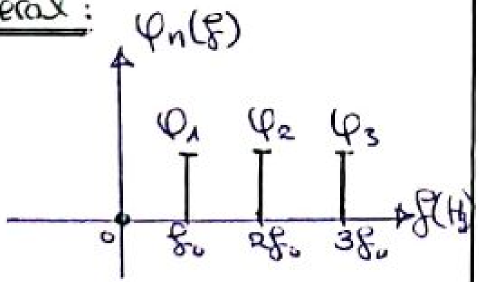
② **Bilatéral :** (la forme complexe)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f t}$$

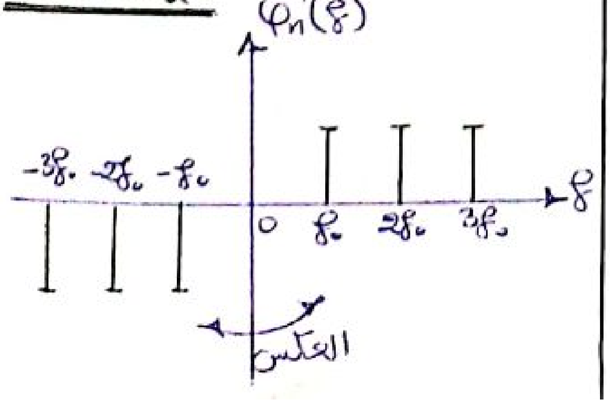


* **Spectre de Phase : (impair)**

① **Unilatéral :**



② **Bilatéral :**



* Résumé *

→ **Conditions d'existence de la SF :**

→ **Conditions de Dirichlet :**

* $f(t)$ soit une fonction intégrable (carré sommable) :

[à Energie finie] ← $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt < \infty$

* $f(t)$ soit borné : $a \leq f(t) \leq b$
* $f(t)$ possède un nombre fini de discontinuités dans l'intervalle T_0
* $f(t)$ possède un nombre fini d'extrema dans l'intervalle T_0.

* **La série de Fourier en cosinus : (harmoniq.)**

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

* $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $A_0 = \frac{a_0}{2}$
* $\varphi_n = \operatorname{arctg}(-b_n / a_n)$

* **La forme trigonométrique réelle de la SF :**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos() + b_n \sin() \right]$$

* $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \, dt$
* $a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) \, dt$
* $b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) \, dt$

* **La forme exponentielle complexe de la SF :**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f_0 t}$$

* $C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \, dt$
* $C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \, e^{-j 2\pi n f_0 t} \, dt$
* $C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$
* $|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
* $\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

fz. daham

* l'Energie :

→ $x^2(t)$ correspond à la distribution de l'énergie en fonction du temps.

→ les signaux à Energie finie et Pmoy nulle sont physiquement réalisables.

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty}$$

→ si l'energie est finie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, on dit que le signal $x(t)$ est à energie finie.

* Densité d'energie temporelle :

$$e_x = e_x(t) = |x(t)|^2$$

* la Puissance moyenne :

→ Pmoy est la distribution moyenne de l'énergie sur l'intervalle T choisi (les signaux périodiques).

→ sont des signaux physiquement irréalisables.

$$\boxed{0 < P_{moy} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty}$$

→ si la puissance moy. est finie, on dit que $x(t)$ est à puissance moy. finie.

* la puissance moy. pour un signal périodique :

$$\boxed{P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty}$$

* Densité spectrale de P : $DSP = \lim_{T \to \infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$

* la valeur efficace :

$$\boxed{x_{eff} = \sqrt{\langle P \rangle} = \sqrt{P_{moy}}}$$

* Égalité de Parseval : (Théorème)

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \overset{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

On a la forme réelle trigonométrique :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos() + b_n \sin()]$$

$$\times x(t) = \times x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) \times x(t) = \frac{a_0}{2} \times x(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \times x(t) \cdot \cos() + b_n \times x(t) \cdot \sin()]$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{a_0}{2} \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos() dt + b_n \frac{1}{T_0} \int x(t) \sin() dt \right]$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \times \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos() dt}_{a_n} + b_n \times \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin() dt}_{b_n} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_0} \int_0^{T} x^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \right]$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T} x^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \right]$$

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}$$

$$\begin{cases} C_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \\ |C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ |C_n|^2 = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) \end{cases}$$

→ le passage de la SF à la TF :

la forme complexe de la SF :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-j 2\pi n f_0 t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{T_0}}_{df} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-j 2\pi n f_0 t} \cdot dt \right] e^{j 2\pi n f_0 t}$$

si $T_0 \to \infty$; $n T_0 = T \to \infty$

donc $f_0 \to df_0$; $n f_0 = f \to df$; $f = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow x(t) = \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} \cdot dt}_{TF = X(f)} \Big] e^{j 2\pi f t} df}^{TF^{-1} = x(t)}$$

$$\begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j 2\pi f t} \cdot dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j 2\pi f t} \cdot df \end{cases}$$

fz. daham

→ Analyse des signaux non périodiques :

* **Transformé de Fourier :**

$$\boxed{X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt}$$

* **Transformé de Fourier inverse :**

$$\boxed{x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{j2\pi f t}\,dt}$$

* **Spectre d'amplitude :**

Ce spectre est complexe, a partie réel et partie imaginaire :

$$\begin{cases} Re[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot \cos(2\pi f t)\,dt \\ Im[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot \sin(2\pi f t)\,dt \end{cases}$$

⇒ spectre d'amplitude :

$$|X(f)| = \sqrt{Re[X(f)]^2 + Im[X(f)]^2}$$

* **Spectre de phase :**

$$\varphi(f) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-Im[X(f)]}{Re[X(f)]}\right)$$

* **Condition d'existance de la transformé de Fourier :**

Afin qu'un signal $x(t)$ ait une transformé de Fourier, il faut et il suffit qu'il vérifié les "Conditions de Dirichlet" :

* $x(t)$ soit une fonction borné :

$$a \leqslant x(t) \leqslant b$$

* $x(t)$ soit une fonction "sommable" ou "carré sommable" ou "intégrable" :

TF existe et réciproque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

(égale une valeur finie)

⇒ cela signifie que $x(t)$ et $X(f)$ sont à Energie finie.

⇒ touts les signaux physiques vérifient ces Conditions. [x لأنها طاقة في زمن محدد]

sur temps fini

* $x(t)$ possède un nombre fini d'extrema (de minima et de maxima).
* $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités.

* **Propriétés de la TF :**

* **linéarité :**

$$a\,x(t) + b\,y(t) \xrightarrow{TF} a\,X(f) + b\,Y(f)$$

* **Homothétie (temps échelle) :**

$$x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$x(at)$ ↓ dilatation du temps ; $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$ ↓ compression des fréquences

[changement d'échelle en dilatation du temps]

⇒ fréquence échelle (changement d'échelle en dilatation fréquentille) :

$$X(af) \xrightarrow{TF^{-1}} \frac{1}{|a|}\, x\left(\frac{t}{a}\right)$$

* **Translation :**

⇒ dans le temps :

$$x(t-t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j2\pi f t_0}\, X(f)$$

$x(t-t_0)$ ↓ translation ; $e^{-j2\pi f t_0}$ ↓ déphasage

⇒ dans la fréquence :

$$X(f-f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} e^{j2\pi f_0 t}\, x(t)$$

$X(f-f_0)$ ↓ translation ; $e^{j2\pi f_0 t}$ ↓ modulation

* **Inversion du temps :**

$$x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$$

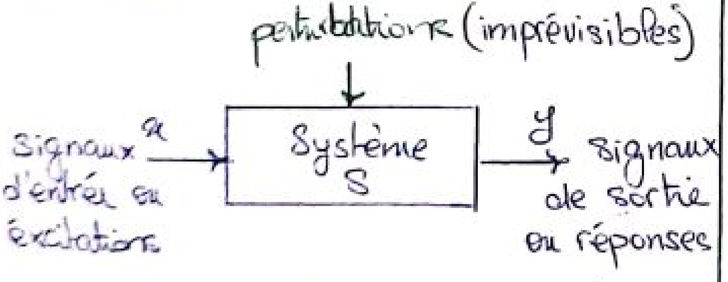
fz. daham

* Classification des systèmes :

- Système
  - S. statique
  - S. dynamique
    - S. Monovariable SISO
      - S. stochastique
      - S. déterministe
        - S. linéaire
          - S. à temps variant
          - S. à temps invariant LTI
            - S. à temps discret
            - S. à temps continu
        - S. non linéaire
    - S. Multivariable MIMO

* Définition :

Un système est un ensemble d'éléments fonctionnels interagissant entre eux et qui établit un lien de cause à effet entre ses signaux d'entrée et ses signaux de sortie.



* **S. statique** : la réponse du système à une excitation est instantanée.
* **S. dynamique** : la réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées.
* **S. monovariable** : système à une entrée et une sortie.
* **S. multivariable** : plusieurs d'entrée et sortie.

* Systèmes de transmission LIT ou filtres *

$$\underset{\text{(Excitations)}}{e(t)/x(t)} \longrightarrow \boxed{\quad S.T \quad} \longrightarrow \underset{\text{(Réponses)}}{s(t)/y(t)}$$

* Un système de transmission LIT ou filtre est un instrument (dispositif) ou un modèle physique associant (linéairement) un signal d'entrée à un signal de sortie, représenté par un modèle mathématique qui apporte une déformation au signal.
* Exemple de S.T : instrument de mesure, capteur, système optique, amplificateur, -- etc.

$\longrightarrow s(t) = S[e(t)]$

* Propriétés des S.T (LIT) :

①. Linéarité :

Un système est dit "linéaire" si justifie du principe de "superposition" :

$$\boxed{\sum_i \alpha_i x_i(t) \xrightarrow{S.T} \sum_i \alpha_i y_i(t)}$$

* homogénité :

une variation dans l'amplitude au signal d'entré "produit" une "même" variation au signal de la sortie :

$$x(t) \xrightarrow{S.T} y(t)$$
$$\alpha x(t) \xrightarrow{S.T} \alpha y(t)$$

* additivité :

si on applique 2 signaux à l'entrée, la sortie est : la somme individuelle de leur réponse :

$$x_1(t) \xrightarrow{S.T} y_1(t)$$
$$x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{S.T} y_1(t) + y_2(t)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{la superposition}}$

②. Invariance dans le temps :

Un système est dit "invariant dans le t" si son comportement est indépendant de l'origine des temps choisie.

$\longrightarrow$ "invariant dans le temps" = "Stationnaire"

$$x(t-t_0) \xrightarrow{S.T} y(t-t_0)$$

$\longrightarrow$ la même translation du signal à l'entrée et à la sortie.

③. Causalité : il faut le système LTI

$$\begin{cases} h(t) = 0 & ; \quad t < 0 \\ h(t-t_0) = 0 & ; \quad t < t_0 \end{cases}$$

④. Stabilité : il faut le système LTI stable

* **Un système est mathématiquement stable si à ∀te entrée bornée lui correspond une sortie bornée (cela implique que tous les pôles de la fct de transf sont à parties réelles et négatives.**
* **Un système est physiquement stable si l'aptitude à revenir à sa position d'équilibre après une perturbation.** $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt < \infty$

⑤. Continuité :

$$\lim_{n \to +\infty} e_n(t) \xrightarrow{S.T} \lim_{n \to +\infty} s_n(t)$$

⑥. Réponse Impulsionnelle :

Une "impulsion de Dirac" $\delta(t)$, injectée à l'entrée d'un système : causal, continu, linéaire et invariant dans le t, donne en sortie : un signal de durée finie appelée "réponse impulsionnelle", noté $h(t)$.

fz. daham

* Produit de Convolution :

soit un système, ayant pour entrée une impulsion de Dirac $\delta(t)$ et de sortie la réponse impulsionnelle $h(t)$.

(1)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(t)$$

⟹ Un système LIT est modélisé par sa réponse impulsionnelle :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Système (1)}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t)$$

la réponse $y(t)$ est une superposition de réponse impulsionnelle amplifié par les valeurs de $x(t)$ ⟹ cette opération appelé

⟹ la convolution, noté par : $(*)$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \end{aligned}}$$

⟹ Réponse d'un s. LTI à une entrée quelconque :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$y(t) = S[x(t)] = ?$$

⟹ élément neutre de convolution :

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$$

⟹ $y(t) = S[x(t)]$

$$= S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

⟹ propriété de linéarité du système :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, S[\delta(t-\tau)]d\tau$$

⟹ propriété d'invariance temporelle :

$$S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$$

⟹ $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

* Propriétés :

* **Commutativité :** $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
* **Associativité :**

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

* **Distributivité p/r à l'addition :**

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

* **Element neutre (impulsion de Dirac) :**

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

* **Translation temporelle :**

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

fz. daham

Systèmes et TF :

Soit un système de réponse impulsionnelle à signal d'entrée : $x(t) = A e^{j2\pi f t}$

$\rightarrow y(t) = ?$

$$\Rightarrow y(t) = S[x(t)] = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot A e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot A e^{j2\pi f t} \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot d\tau$$
$$= A e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot d\tau}_{TF[h(\tau)] = H(f)}$$

$$\rightarrow S[A e^{j2\pi f t}] = H(f) \cdot A e^{j2\pi f t}$$

* Du la sortie de sys à la TF :

$\rightarrow$ Si le signal d'entrée est quelconque on peut l'exprimer sous la forme de la TF inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \cdot dt$$

$\rightarrow y(t) = ?$

$$\Rightarrow y(t) = S[x(t)] = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \cdot df\right]$$
linéarité
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S[X(f) \cdot e^{j2\pi f t}] df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [X(f) \cdot e^{j2\pi f t} * h(t)] df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)} \cdot d\tau\right] df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot X(f)\, e^{j2\pi f t} \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau\right] df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau\right]}_{H(f)} df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f) \cdot H(f)}_{Y(f)} \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi f t} dt \leftarrow TF^{-1}$$

* Théorème de Plancherel :

① $x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(f) \cdot Y(f)$

② $x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{TF} X(f) * Y(f)$

* Démonstration :

①

$$TF[x(t) * y(t)] = TF\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j2\pi f t} dt \times \frac{e^{-j2\pi f \tau}}{e^{-j2\pi f \tau}}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot e^{j2\pi f \tau} \cdot dt$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-j2\pi f (t-\tau)} \cdot d(t-\tau)}$$
$$= X(f) \cdot Y(f)$$

$$\rightarrow x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(f) \cdot Y(f)$$

②

$$TF^{-1}[X(f) * Y(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\, Y(f-\tau)\, d\tau \times e^{j2\pi f t} df \times \frac{e^{j2\pi \tau t}}{e^{j2\pi \tau t}}$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \cdot e^{j2\pi \tau t} \cdot d\tau}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\tau)\, e^{j2\pi t (f-\tau)}\, d(f-\tau)}$$
$$= x(t) \cdot y(t)$$

$$\rightarrow X(f) * Y(f) \xleftrightarrow{TF^{-1}} x(t) \cdot y(t)$$

fz. daham

* Corrélation :

→ la relation entre la corrélation et la convolution :

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(\tau)}$$

* Autocorrélation : التشابه

définie la similarité entre le signal et sa copie retardé.

⇒ pour un signal à Energie finie :

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt}$$

⇒ pour un signal à puissance moyen. finie (un signal périodique) :

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt}$$

* Intercorrélation :

définie la dépendance entre les événements de chacun, et la mésure de similarité entre eux.

⇒ pour deux signaux à Energie finie :

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t+\tau)\, dt}$$

⇒ pour deux signaux à Puissance moyen. finie (deux signaux périodiques) :

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, y^*(t+\tau)\, dt}$$

* l'inégalité de Cauchy-schwartz :

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0)\, C_{yy}(0)$$

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$$

→ l'autocorrélation est maximale et borné

⇒ $C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t+0)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$

$\boxed{C_{xx}(0) = E_x}$ (l'Energie)

$C_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t+0)\, dt$

$= \int x(t)\, y^*(t)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,|y(t)|\, dt$

$\boxed{C_{xy}(0) = E_x}$

⇒ $C_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x^*(t+0)\, dt$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x^*(t)\, dt$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2\, dt$

$\boxed{C_{xx}(0) = P_{moy\,(xx)}}$

$\boxed{C_{xy}(0) = P_{moy\,(xy)}}$

⇒ $C_{xy}(0)$ et $C_{xx}(0)$ = l'Energie pour les signaux à énergie finie.

⇒ $C_{xy}(0)$ et $C_{xx}(0)$ = la Puissance moyenne pour les signaux à P_{moy} finie càd les signaux périodiques.

* Propriétés :

* $x^*(-t) = x(t)$
* $x^*(t) = x(-t)$

⇒ $C^*_{xy}(-\tau) = C_{xy}(\tau)$

⇒ $C^*_{xy}(\tau) = C_{xy}(-\tau)$

* $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$
* $C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$

fz. daham

* Densité Spectrale d'Energie :

$\Longrightarrow$ est la TF d'autocorrélation :

$$DSE_x(f) = S_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t+\tau)\,dt\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$
$$\times\, e^{-j2\pi f t}\, e^{j2\pi f t}$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} . dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t+\tau)\underbrace{\left[e^{-j2\pi f(t+\tau)}\right]^* . d(t+\tau)}$$

$$\boxed{S_{xx}(f) = X(f).X^*(f) = |X(f)|^2}$$

* Densité inter-spectrale d'Energie :

$\Longrightarrow$ est la TF d'intercorrélation des signaux à Energie finie :

$$DSE_{xy}(f) = S_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau).\, e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t+\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} . dt d\tau$$
$$\times\, e^{-j2\pi f t}\, e^{j2\pi f t}$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} . dt}\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t+\tau)\underbrace{.\left[e^{-j2\pi f(t+\tau)}\right]^*}$$

$$\boxed{S_{xy}(f) = X(f)\, Y^*(f)}$$

* Densité spectrale de Puissance :

$\Longrightarrow$ est la TF d'autocorrélation d'un signal à Puissance moyenne finie :

$$DSP_x(f) = S_{xx}(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau).\, e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t+\tau)\,dt\; e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$\times\, e^{-j2\pi f t}\, . e^{j2\pi f t}$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t+\tau)\left[e^{-j2\pi f(t+\tau)}\right]^* . d(t+\tau)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-t)\, e^{-j2\pi f(\tau-t)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,|X(f)|^2}$$

$$* \quad P_{x(moy)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, df$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

* Densité inter-spectrale de Puissance :

$\Longrightarrow$ est la TF d'intercorrélation des signaux périodiques à puissance moy. finie :

$$DSP_{xy}(f) = S_{xy}(f) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t+\tau)\,dt\, e^{-j2\pi f\tau} . d\tau$$
$$\times\, e^{j2\pi f t}\, e^{-j2\pi f t}$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\, e^{-j2\pi f t} . dt}\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t+\tau)\underbrace{\left[e^{-j2\pi f(t+\tau)}\right]^* d\tau}$$

$$\boxed{S_{xy}(f) = X(f).\, Y^*(f)}$$

fz. daham

* Filtrage Analogique *

⟹ Un filtre est un circuit permettant de sélectionner une "bande de fréquence", qu'il laissera passer ou éliminera.

appelé : "la bande passante" (BP) ou "Largeur de bande" (LB)

appelé : "la fréquence de coupure" (f_c)

⟹ les filtres Analog. se divisent en 2 :

⟹ Types des filtres :

* Filtre passif : est une combinaison de résistance (R), de condensateur (C) et/ou bobine (L).

* Filtre actif : est composé d'élément amplificateur (transistor, OP_Amp ...) et d'élément dépendant de la fréquence (C, L, ..).

amplification de puissance

les éléments actifs.

⟹ [si on a un signal périodique, on peut l'écrire par une forme de somme sinusoïdales, donc on a :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos() + b_n \sin()]$$

⟹ $n=1 \rightarrow x_1(t) = a_1 \cos() + b_1 \cdots$

$n=2 \rightarrow x_2(t) = a_2 \cos() + b_2 \cdots$

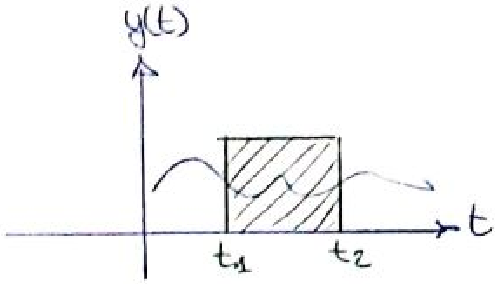
$\vdots \qquad \vdots$

les harmoniques

⟹ Filtrer un signal revient à choisir parmi ses harmoniques ceux qu'on désire transmettre et éliminer les autres.]

* Filtrage temporel :

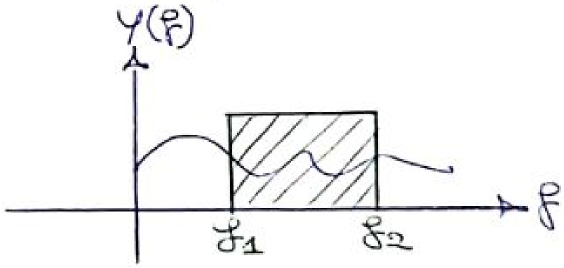
⟹ atténuation ou interruption du signal au cours du temps.



* $y(t) = x(t) . h(t)$ ⟶ multiplication temporelle
* $Y(f) = X(f) * H(f)$ ⟶ Convolution fréquentielle

* Filtrage fréquentielle :

⟹ sélection ou atténuation de certaines fréquences.



* $y(t) = x(t) * h(t)$ ⟶ convolution temporelle
* $Y(f) = X(f) . H(f)$ ⟶ multiplication fréquentielle

⟶ le filtrage est une forme de TS.

⟹ il peut s'agir soit :

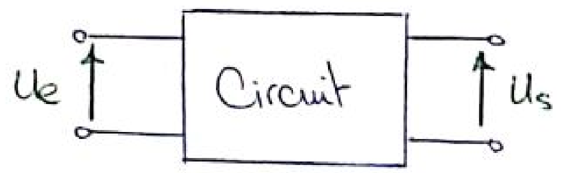
* éliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables.
* isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

⟹ Applications :

* systèmes de télécommunications.
* sys. d'acquisition de TS physiques.
* alimentation électrique

fz. daham

* Schéma générale du Filtre :



⟹ le filtre en générale est un quadripôle.

⟹ U_s, U_e : sont des fonctions sinusoïdales en fct du temps :

$$U_e(t) = U_{e\max} \sin(\omega t + \varphi_e)$$
$$U_s(t) = U_{s\max} \sin(\omega t + \varphi_s)$$

Filtre
- Analogique
  - Passif :
    - L, R, C
    - utilisé pour les hautes fréqs.
    - pas d'alimentation.
    - non intégrable
  - Actif :
    - R, C, AIL
    - facile à conseveir
    - moin coûteux
    - limités en fréq. (<1MHz à cause de AIL).
    - besoin d'alimentation
    - tension filtrée faible (<12 V).
- Numérique

* fonction de transfert :

$$H = G = \frac{V_s}{V_e}$$

* le Gain (le module) :

$$|H| = |G| = \left|\frac{V_s}{V_e}\right|$$

* le Gain en décibel :

$$H_{dB} = 20 \log(|H|)$$

* la phase :

$$\varphi = \arg(H)$$

* l'Atténuation :

$$A = \frac{1}{H} = \frac{V_e}{V_s}$$

* Classification des filtres par fonction :

⟹ filtre passe bas
⟹ filtre passe haut
⟹ filtre passe bande
⟹ filtre coupe bande

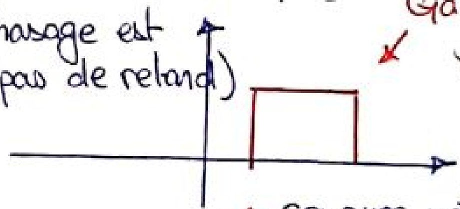
* Classification par caractéristiques :

⟶ filtre idéal.
⟶ filtre réel (réalisable)

* filtre idéale : présente :

- un affaiblissement nul dans la bande passante.
- un affaiblissement infini dans la bande atténué (la bande coupée).
- le déphasage est nul. (pas de retard)

Gabarit قالب

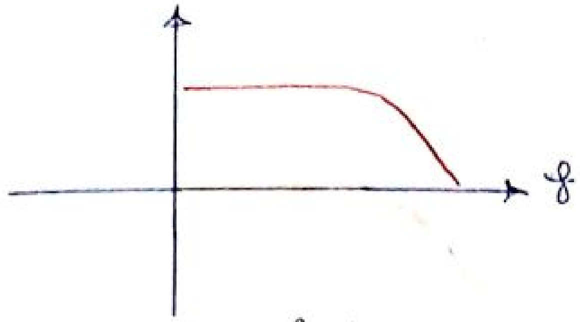


⟹ coupure nette

* filtre réel :

- la bande que l'on désire éliminer ne disparaît jamais, elle est seulement atténuée
- le déphasage non nul, car le passage d'un signal dans filtre provoque forcement un retard sur ce signal.

fz. daham



→ En pratique, la réalisation du filtre idéal est impossible, pour approcher à cette réponse idéale on définir un gabarit et en précisant :

* Amax : atténuation maximum tolérée en bande passante.
* Amin : atténuation minimum en bande coupée.
* fp : fréquence de coupure.
* fa : fréquence de frontière.

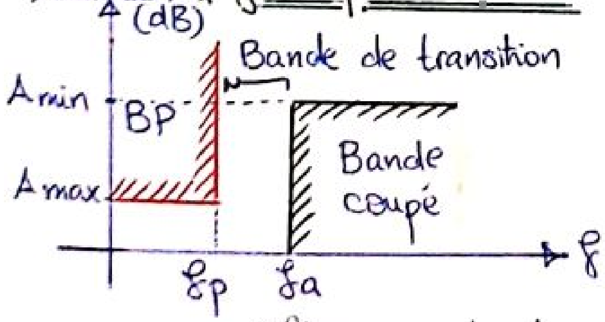
et en conservant l'atténuation A :

⇒ inférieure à Amax (b. passante)

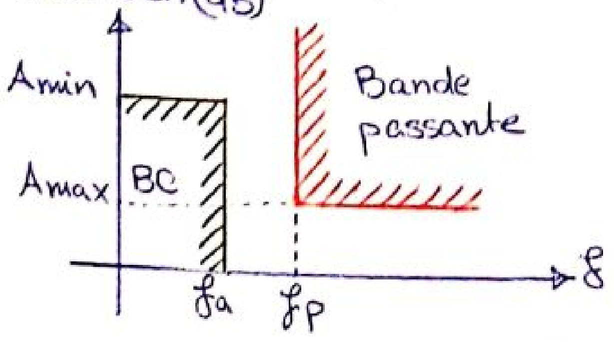
⇒ supérieure à Amin (b. atténué).

* **Gabarit du filtre par l'atténuation des fréqs :**

Atténuation (dB) * **filtre passe bas :**

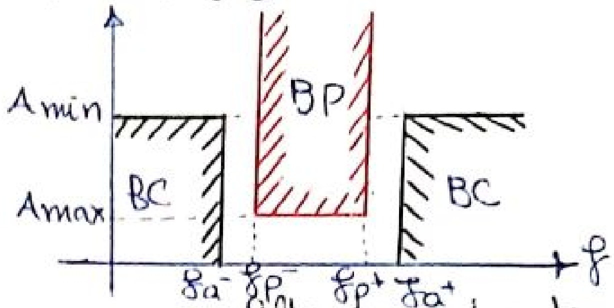


Atténuation (dB) * **filtre passe haut :**

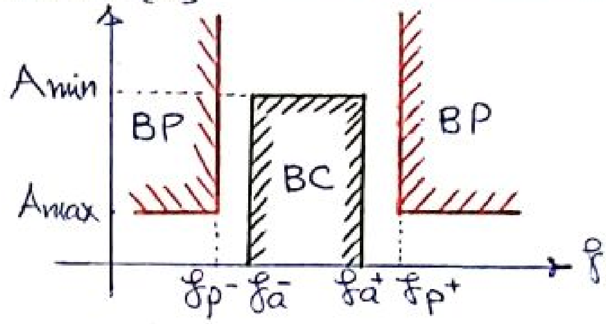


* **filtre passe bande :**

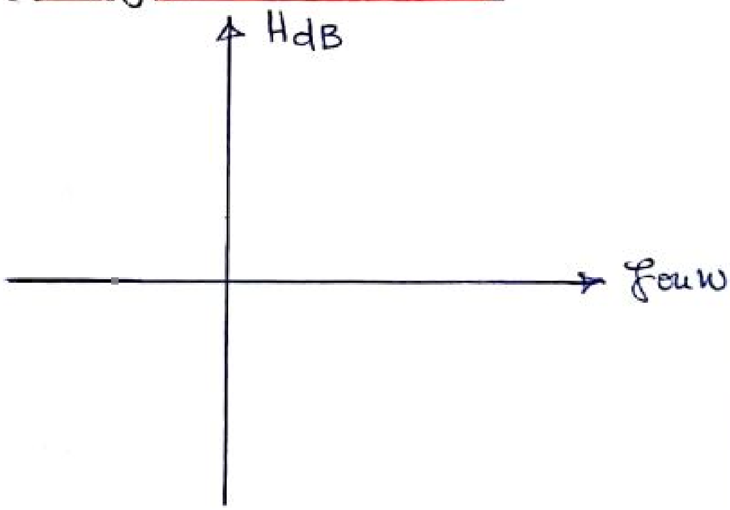
Atténuation (dB)



Atténuation (dB) * **filtre coupe bande :**



* **Diagramme de Bode :**



L'échelle : des fréquences ou des pulsations est en décade ou octave :

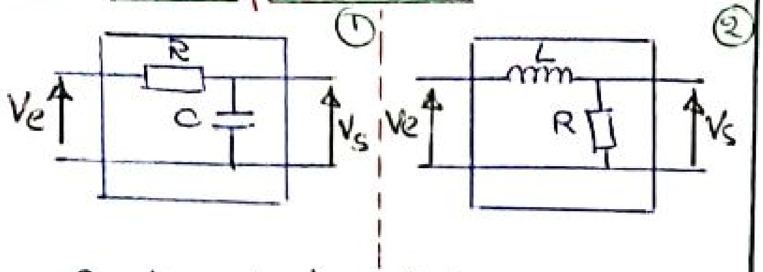
* **octave** : intervalle de fréq. Δf entre une fréq. et la double ou la moitie de cette fréq.
* **décade** : intervalle de fréq. Δf entre une fréq. et une autre fréq. qui est dix fois plus grande ou dix plus petite que cette fréq.

fz. daham

* Filtre Passif :

→ Filtres passifs pédagogiques :

①. Filtre passe bas :



* fonction de transfert :

①: diviseur de tension :

$\rightarrow \; V_e = U_R + V_s^{= U_C}$ — ①

$\quad\; = R\,I_R + V_s \;\rightarrow\; I_R = ?$

$* \; I_R = I_C = C.\dfrac{dV_s}{dt} = j\omega C V_s$ — ②

$\dfrac{dV_s}{dt} = j\omega V_s$

② × ① $\Rightarrow \; V_e = R.j\omega C V_s + V_s$

$1.\; V_e = V_s\,(j\omega RC + 1)$

$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

②: $\Rightarrow \; V_e = U_L + V_s^{= U_R}$

$V_e = L.\dfrac{dI_L}{dt} + V_s$

$V_e = L.j\omega I_L + V_s$ — ①

$I_L = I_R = \dfrac{U_R}{R} = \dfrac{V_s}{R}$ — ②

② → ① $\Rightarrow \; V_e = \dfrac{L}{R}\,j\omega V_s + V_s$

$V_e = V_s\left(j\omega \dfrac{L}{R} + 1\right)$

$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}}$$

→ la forme générale :

$$\boxed{H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

$A = 1$

$\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ ou $\omega_0 = \dfrac{R}{L}$ (pulsation propre)

fz. daham

→ le module :

$$\boxed{|H| = \left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

② → le module en décibel :

$H_{dB} = 20 \log(|H|)$

$= 20 \log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$

$= 20 \cancel{\log(1)}^{\,0} - 20 \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)^{1/2}$

$= -20 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(-20 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)\right)$

$$\boxed{H_{dB} = -10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

$\Rightarrow$ on pose : $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (pulsation réduite) :

$* \; x \to 0 : \; H \to 1 \rightarrow$ domaine passif

$\lim\limits_{x \to 0} H_{dB} = 0 \Rightarrow$ on a une asymptote horizontale à 0 dB.

خط مقارب أفقي

$* \; x \to \infty : \; H \to 0 \rightarrow$ domaine actif.

$\lim\limits_{x \to \infty} H_{dB} = -\infty$

lorsque : $x \to \infty$ càd : $\omega \to \infty$ [1 dans le plot]

$\Rightarrow H_{dB} = -10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$

$H_{dB} \simeq -10 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$\Rightarrow H_{dB} = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ فيصبح لدينا:

$\Rightarrow$ si on parcourt une décade : de ω à $10\,\omega$:

$H_{dB} = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

نفكك الـ log

$\Rightarrow H_{dB} = -20 \log\left(\frac{10\omega}{\omega_0}\right)$

$= -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20 \underbrace{\log(10)}_{1}$

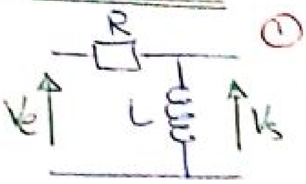
$= -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20$ (dB)

$\Rightarrow$ le passage d'une décade à l'autre retire 20 dB à l'asymptote, nous avons une asymptote à −20 dB/décade.

②. Filtre passe haut :

* **1er ordre :**

①



②

① :

→ Fonction de transfert :

$$V_e = u_R + V_s \quad (= u_L)$$

$$u_R = R I_R \Rightarrow I_R = I_L = ?$$

$$u_L = V_s = L \frac{dI_L}{dt} = j\omega L I_L$$

$$\Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = \frac{V_s}{L} = j\omega I_L$$

$$\Rightarrow \quad V_e = j\omega R \frac{V_s}{L} + V_s$$

$$V_e = V_s \left(j\omega \frac{R}{L} + 1 \right)$$

$$H = \frac{V_s}{V_e} =$$

fz. daham

→ Du signal continu au numérique :

* Numérisation :

a pour but de préparer le signal au codage puis à la transmission.
permet d'effectuer les traitements sur les machines informatiques (DSP).

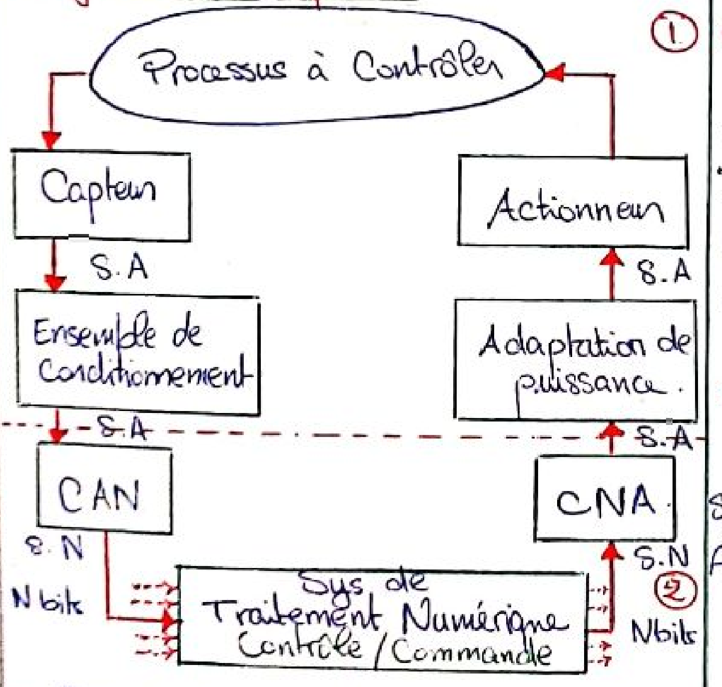
* Avantages :

- Capacité de stockage.
- Facilité de traitement et de transfert.
- Immunité contre les bruits.

→ 3 opérations :

* Echantillonnage
* Quantification
* Codage.

* Système numérique :



* **Processus à contrôler** : grandeur physique (mouvement mécanique, variation de température, ..)
* **Capteur** : transforme le grandeur physique en un signal analogique → la mesure.
* **Signal analogique** : exp :
  - tension issue d'un capteur de température.
  - tension issue d'un capteur d'humidité.
  ... etc

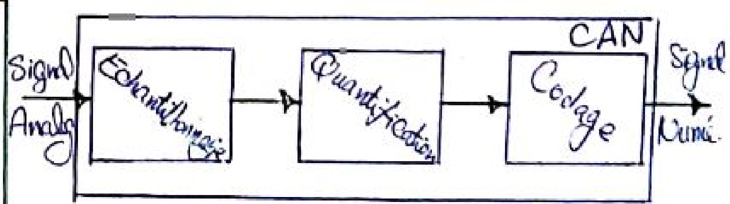
* **Ensemble de conditionnement** : amplificateurs, filtres, ... etc.
* **CAN** : transforme le signal analogique en signal numérique.
* **Système de traitement numérique** : assure le traitement numérique de l'info. ce sys. est constitué d'un microprocesseur ou d'un microcontrôleur, DSP, calculateur numérique, FPGA ... ordinateur
[Contrôle / commande]

* **CNA** : transforme (convertie) le signal numérique de N bits en provenance du microprocesseur en un signal (tension ou courant) analogique.
* **Adaptation de puissance** : variateur, distributeur, électrovanne, contacteur, ... etc.
* **Actionneur** : transforme le signal Analog en grandeur physique.

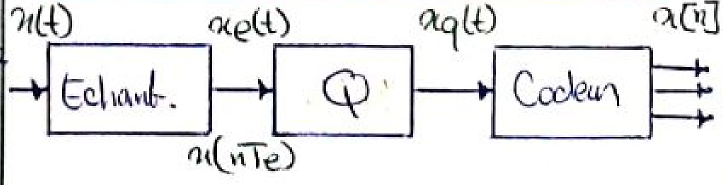
①. domaine analogique.
②. domaine numérique.

Rem. : les qualités du traitement numérique de l'info = son développement pour résoudre les problèmes de contrôle / commande de procédés industriels.

* Synoptique du principe de Numérisation :



* Réalisation pratique de Numérisation :

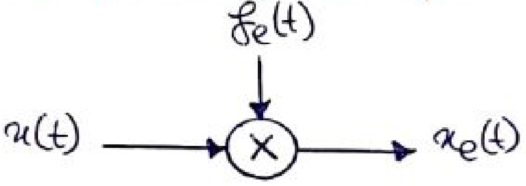


fz. daham

I. L'Echantillonnage :

- Prélèvement de la valeur du signal $x(t)$ à des intervalles de temps T_e (pas ou période d'echantillonnage).
- découpage temporel du signal à des instants réguliers (T_e).
- est une modulation d'amplitude.
- est réalisé par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur.

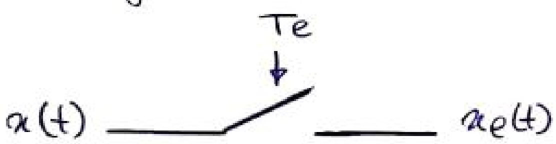
→ discrétisation du temps



$x(t)$: le signal analogique

$f_e(t)$: la fct d'echantillonnage.

$x_e(t)$: le signal échantillonné.



* Echantillonnage Idéal :

- prélèvement pendant un temps infiniment court des valeurs de $x(t)$ à $t = nT_e$ (multiple d'entier de T_e).

→ est la multiplication du $x(t)$ et d'une suite d'impulsion (Peigne de Dirac) de période d'echant. T_e.

$$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_e(t) = x(nT_e)$$

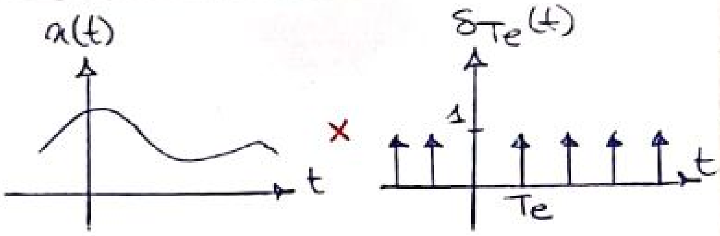
$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

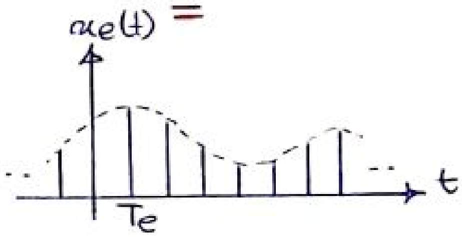
$$\Rightarrow x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$$

$$= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_e)$$

$$\boxed{x_e(t) = x(nT_e)}$$





* Spectre du signal échantillonné :

le signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$$

TF : ↓ ↓ ↓ ↓

$$X_e(f) = X(f) * \delta_{F_e}(f)$$

théorème de Plancherel

⇒ **la TF de $\delta_{T_e}(t)$:**

puisque $\delta_{T_e}(t)$ est périodique, on calcul la décomposition de la série de Fourier de la fct de Pagne de Dirac :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \begin{cases} 1 \; ; & t = nT_e \\ 0 \; ; & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Rightarrow DSF[\delta_{T_e}(t)] = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{j2\pi n f t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} 0 \cdot e^{-j2\pi n f t} \, dt = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow C_n = \frac{1}{T_e} \left[1 \cdot \cancel{e^{-j2\pi n f t}}^{\,1} \right]_{t=0}$$

$$C_n = \boxed{\frac{1}{T_e}}$$

$$DSF[\delta_{T_e}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{j2\pi n f t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} e^{j2\pi n f t}$$

$$\boxed{DSF[\delta_{T_e}(t)] = \underbrace{\frac{1}{T_e}}_{F_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f t} = f(t)}$$

$$\boxed{TF[f(t)] = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)}$$

fz. daham

$\Rightarrow$ $TF[x_e(t)] = TF[x(t).\delta_{Te}(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nTe) . e^{-j2\pi f t} . dt \quad \times e^{-j2\pi nTe} \times e^{j2\pi nTe}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(nTe) . e^{-j2\pi nTe} . d(nTe) . \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nTe) e^{-j2\pi f(t-nTe)} . d(t-nTe)$$

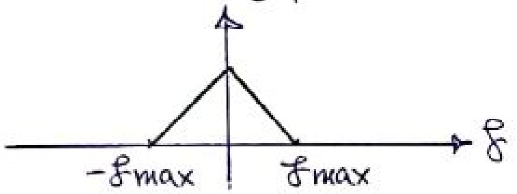
$$= \underbrace{TF[x(nTe)] . TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nTe)\right]}_{\text{Convolution}}$$

$$\Rightarrow Xe(f) = X(f) * \delta_{Fe}(t)$$

$$= X(f) * Fe \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nFe)$$

$$\boxed{Xe(f) = Fe \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f-nFe)}$$

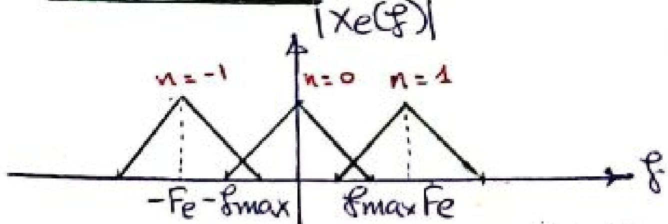
Exemple : si on a le spectre suivant du signal $x(t)$:



$\Rightarrow$ $X(f)$ est borné : $|f| > f_{max} \Rightarrow |X(f)| = 0$

* le spectre du signal échantillonné :

①. si : $Fe < 2f_{max}$:



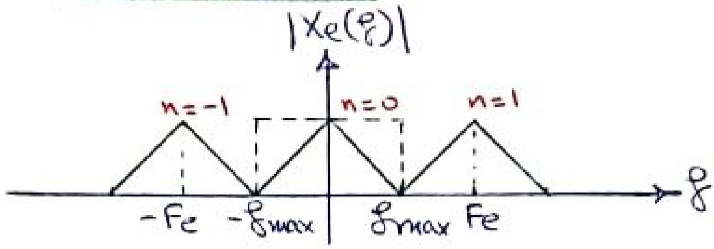
$\Rightarrow$ il y a chevauchement = recouvrement des motifs تداخل
(n : le motif élémentaire)

$\Rightarrow$ on appelle ça : "repliment de spectre" (aliasing)

$\Rightarrow$ on appelle ce spectre : "sous-échantillonné".

$\Rightarrow$ on ne peut pas récuperer le spectre $X(f)$ par le filtrage donc pas de signal initial $x(t)$.

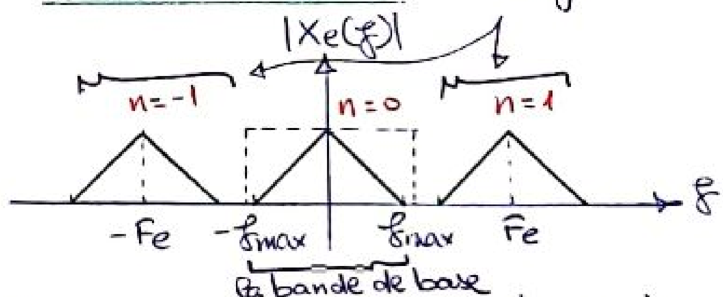
②. si $Fe = 2f_{max}$:



$\Rightarrow$ on peut récuperer le spectre $X(f)$ par le filtrage (un filtre idéal passe bas) et reconstruire le signal initial $x(t)$ à partir de la connaissance de son échantillonné $x_e(t)$.

$\Rightarrow$

③. Si $Fe > 2f_{max}$:



$\Rightarrow$ on peut récuperer le spectre $X(f)$ par le filtrage, et reconstruire le signal initial $x(t)$. [pas de recouvrement].

$\Rightarrow$ on appelle ce spectre : "sur-échantillonné".

* Théorème d'échantillonnage = Théorème de Shanon : (Conditions de Shanon)

pour échantillonner un signal :

* il faut le signal $x(t)$ à bande passante limité : $|X(f)| = 0$, $|f| > 0$.

* la fréquence d'échantillonnage soit supérieur à double de fréquence maximale.

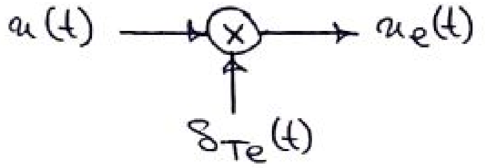
$$Fe \geq 2f_{max}$$

fz. daham

* $f_N = \frac{Fe}{2} \geq f_{max}$; f_N : appelé la fréquence de Nyquiste (Shanon), est la fréquence maximale pour éviter les distorsions de spectre.
تشويه

Rem. : l'échantillonnage a introduit une périodicité dans l'espace des fréquences.

* Démonstration de Spectre du signal Echant :



$$\Rightarrow x_e(t) = x(t).\delta_{Te}(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe)$$

$$\left[x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)\right]$$

$$\boxed{x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\delta(t-nTe)}$$

⟹ Spectre :

$$TF[X_e] = X_e(f) = TF[x(t).\delta_{Te}(t)]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe).e^{-j2\pi ft}.dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(nTe)\sum\delta(t-nTe).e^{-j2\pi ft}.dt \times \frac{e^{-j2\pi fnTe}}{e^{-j2\pi fnTe}}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(nTe).e^{-j2\pi fnTe}.dnTe \int_{-\infty}^{+\infty}\sum\delta(t-nTe).e^{-j2\pi f(t-nTe)}.dt$$

$$\boxed{X_e(f) = X(f) * \delta_{Fe}(f)}$$

th. Plancherel

Suite

$$X_e(f) = X(f) * \delta_{Fe}(f)$$

$$\delta_{Fe}(f) = TF[\delta_{Te}]$$

* $\delta_{Te}(t) = DSF[\delta_{Te}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_n.e^{-j2\pi nFet}$

$$\delta_n = C_n = \frac{1}{Te}\int_{-Te/2}^{T/2}\delta_{Te}(t).e^{-j2\pi nFet}$$

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe) = \begin{cases} 0 \ ; & \text{ailleurs} \\ 1 \ ; & t = nTe \end{cases}$$

$$\rightarrow \delta_n = \frac{1}{Te}\left[1.e^{-j2\pi nFe(0)}\right]_{t=0}$$

$$\delta_n = \frac{1}{Te} = Fe$$

[puisque $\int_{-T/2}^{T/Te} = 0$ sauf à $t=0$ $\delta(t) = 1$]

$$\rightarrow \delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{Te}}_{= Fe} e^{-j2\pi nFet}$$

$$\rightarrow TF[\delta_{Te}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{Te}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi nFet}.e^{-j2\pi ft}.dt$$

linéarité

$$= Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi t(f-nFe)}.dt$$

* pour $f = nFe$:

$$\delta_{Fe}(f) = Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi t\overbrace{(nFe-nFe)}^{0}}.dt$$
$$= Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}1.dt$$
$$= Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[t]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{(+\infty-(-\infty))}_{+\infty}$$

$$\boxed{\delta_{Fe}(f) = Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nFe)}$$

$$\Rightarrow X_e(f) = X(f) * \delta_{Fe}(f)$$
$$= X(f) * Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nFe)$$
$$= Fe\ X(f) * \sum\delta(f-nFe)$$

$$\boxed{X_e(f) = Fe\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-\underbrace{nFe}_{=\frac{n}{Te}})}$$

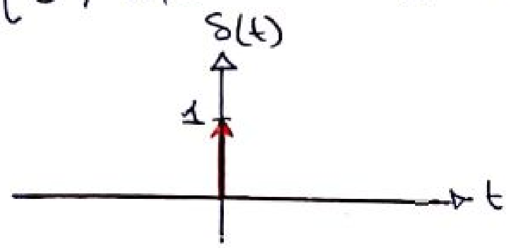
$$\left[\begin{array}{l} x(t) * \delta(t) = x(t) \\ x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \end{array}\right]$$

fz. daham

* Distribution de Dirac :

* aussi appelé : Impulsion ou Pic de Dirac.
* appelé par abus langage "fonction de Dirac".
* introduite par Paul Dirac.
* peut être considérée comme une fonction qui prend une valeur infinie en "0", et nulle partout ailleurs, la valeur infinie en zéro correspond à une "masse = 1", donc :

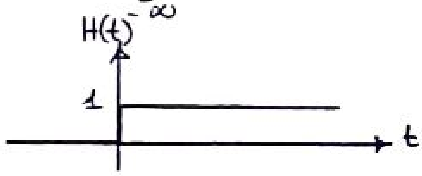
$$\underset{\text{delta}}{\delta(t)} = \begin{cases} +\infty \ ; \ t=0 \\ 0 \ ; \ t\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} 1 \ ; \ t=0 \\ 0 \ ; \ t\neq 0 \end{cases}$$



* Dirac est égale à la dérivée de la fonction de Heaviside (échelon d'unité) :

$$\delta(t) = H'(t) = u'(t)$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



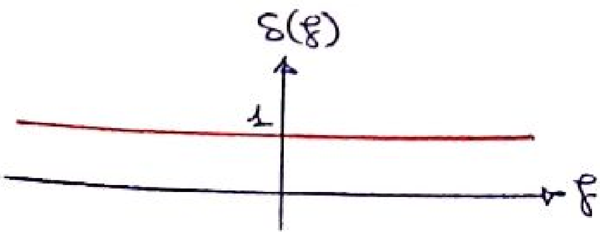
* En physique on s'intéresse principalement à l'Energie ou à la Puissance du signal, on représente souvent le spectre d'amplitude du Pic du Dirac avec "une valeur unité".

$$TF[\delta] = \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,.\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= \left[\underbrace{\delta(0)}_{1}\,.\,\underbrace{e^{-j2\pi f(0)}}_{1}\right]_{t=0}$$

$$\boxed{\delta(f) = 1}$$

⇒ dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$; $t=0$ est le seul terme non nulle.



* Propriétés :

* $\delta(-t) = \delta(t)$; δ est une fct paire.
* $x(t)\,.\,\delta(t) = x(t)$
* $x(t)\,.\,\delta(t-t_0) = x(t_0)$
* $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$
* $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$ / $\delta(t-t_0) = \begin{cases} 1 \ ; \ t=t_0 \\ 0 \ ; \ t\neq t_0 \end{cases}$
* $\langle x(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,.\,\delta(t)\,.\,dt = x(0)$
* $\langle x(t), \delta(t-t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,.\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t_0)}_{\text{cte}}\,\overbrace{\delta(t-t_0)\,dt}^{1} = x(t_0)$$

* $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,.\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$
* $x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,.\,\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau$

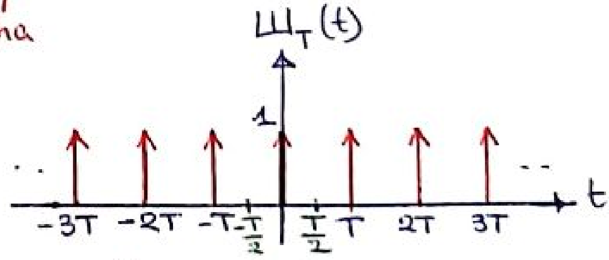
$$= x(t-t_0)$$

* $TF[\delta(t)] = 1$

* Peigne de Dirac : (distribution)

– est une somme de distribution de Dirac espacées de T (séparés par un pas de temps T) ⇒ périodique

$$\underset{\text{cha}}{Ш_T(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



* TF de Peigne de Dirac :

puisque $Ш_T(t)$ est périodique, on peut la développer en Série de Fourier :

$$DSF[Ш_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underset{C_n}{\delta_n}\, e^{j2\pi n f_0 t}$$

fz. daham

$$\Rightarrow \delta_n = C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Ш_T(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\,.dt$$

Piriodité

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum \delta_{nT}(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\,.dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-nT)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\,.dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(0-0T)\, e^{-j2\pi(0) f_0 (0)}\Big|_{t=0,\ n=0}$$

$$\boxed{\delta_n = \frac{1}{T}}$$

$\Rightarrow$ sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, seul le terme pour $(n=0)$ et $(t=0)$ est non nul (les autres sont nuls).

$$\Rightarrow Ш_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\, e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$\Rightarrow TF\left[Ш_T(t)\right] = TF\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\sum e^{j2\pi n f_0 t}\,.e^{-j2\pi f t}\,.dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int e^{-j2\pi t(f-nf_0)}\,.dt$$

$\Rightarrow f = nf_0$:

$$Ш_T(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{0}}^{=1}\,.dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum \left[t\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{T}(+\infty+\infty)$$

$$= \frac{1}{T}(+\infty)$$

$$Ш_T(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0)$$

$\Rightarrow f \neq nf_0$:

$$Ш_T(f) = 0$$

$\Rightarrow$ <u>Théorème</u> : <u>Formule Sommatoire de Poisson</u> :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F\left(\frac{n}{T}\right)}$$

* Lorsqu'on effectue l'échantillonnage d'un signal dans son domaine temporel, sa reconstruction risque d'être déformée si le pas d'échantillonnage Te est plus grand, ce qui résulte la perte de l'info.

$\Rightarrow$ pour préserver l'information des pertes dues à l'échantillonnage dans le domaine temporel, on étudie le signal dans le domaine spectral.

fz. daham

* Reconstitution d'un signal :

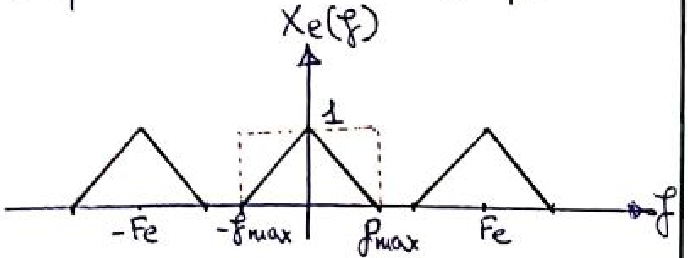
le signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe)$$

$$\downarrow TF \qquad\qquad \downarrow TF$$

$$X_e(f) = Fe X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe)$$

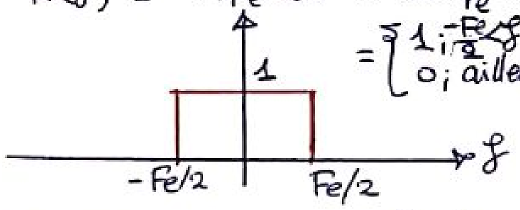
le spectre échantillonné : (exp)



$$X_e(f) \longrightarrow \boxed{\text{Filtre passe-bas}} \longrightarrow Y(f)$$

⇒ Filtrage fréquentielle :
- multiplication fréquentielle.
- convolution temporelle.

$$H(f) = \Pi_{Fe}(f) = rect_{Fe}(t) = \begin{cases} 1 ; -\frac{Fe}{2} < f < \frac{Fe}{2} \\ 0 ; \text{ailleurs} \end{cases}$$



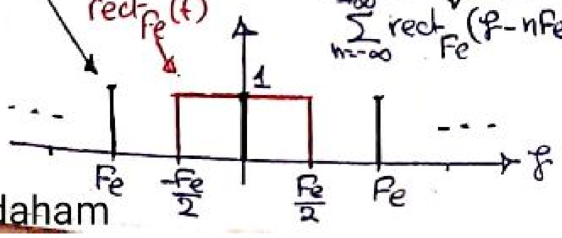
$$\left[Fe = 2 f_{max} \Rightarrow f_{max} = \frac{Fe}{2} \right]$$

$$Y(f) = Xe(f) \cdot H(f)$$

$$= Fe\, X(f) * \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe) \cdot rect_{Fe}(f)}_{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect_{Fe}(f - nFe) = 1}$$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe)$

rect$_{Fe}(t)$



fz.daham

$$\Rightarrow Y(f) = Fe \cdot X(f)$$

$$y(t) = TF^{-1}[Y(f)] = TF^{-1}[Fe \cdot X(f)]$$

$$= TF^{-1}[Xe(f) \cdot H(f)]$$

$$\Rightarrow TF^{-1}[Fe\, X(f)] = TF^{-1}[Xe(f) \cdot H(f)]$$

th. Plancherel

$$Fe \cdot x(t) = TF^{-1}[Xe(f)] * TF^{-1}[H(f)]$$

$$= x_e(t) * h(t)$$

$$= \underbrace{x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe)}_{} * Fe\, \text{sinc}(\pi Fe t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe) \cdot \delta(t - nTe) * \underbrace{Fe\, \text{sinc}(\pi Fe t)}_{}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi Fe \tau)\, \delta(t - nTe - \tau)\, d\tau = \text{sinc}(\pi Fe(t - nTe))$$

$$\Rightarrow \cancel{Fe} \cdot x(t) = \cancel{Fe} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe) \cdot \text{sinc}(\pi Fe(t - nTe))$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe)\, \text{sinc}(\pi Fe(t - nTe))}$$

⇒ la quantité : $\text{sinc}(\pi Fe(t - nTe))$ est dite : "l'interpolation de Shannon".

⇒ il existe diverses méthodes pour reconstituer le signal, on peut citer :
- interpolation
- extrapolation.

⇒ la condition pour reconstituer le signal est la fréquence d'echantillonnage soit supérieure ou égale à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le spectre : Condition (th.) de Shannon :

$$Fe \geq 2 f_{max}$$

$$h(t) = TF^{-1}[H(f)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} rect_{Fe}(t) \cdot e^{+j2\pi tf}\, df$$

$$= \int_{-Fe/2}^{Fe/2} 1 \cdot e^{j2\pi tf}\, df$$

$$= \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j2\pi tf} \right]_{-Fe/2}^{Fe/2}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j\pi Fe t} - e^{-j\pi Fe t} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi t} \sin(\pi Fe t) \times \frac{Fe}{Fe} = \boxed{Fe\, \text{sinc}(\pi Fe t)}$$

* Echantillonnage Réel :

- l'échantillonnage idéal : le signal × Peigne de Dirac (pas de largeur "τ")

$\Downarrow$

physiquement irréalisable

- l'échantillonnage réel est réalisé par une impulsion rectangulaire de largeur "τ" finie (signal porte).
- il y a 3 principales méthodes sont généralement utilisées :

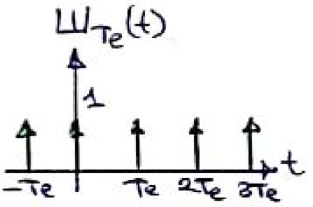
1. Echantillonneur naturel :

- le signal échantillonné sera constitué d'une suite d'impulsions distantes de "Te" et de largeur "τ" (signal porte) multiplié par un signal analogique ($x(t)$).

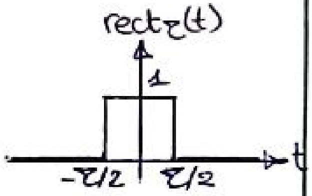
- Suite d'impulsions rectangulaire :

$$y(t) = rect_\tau(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe)$$

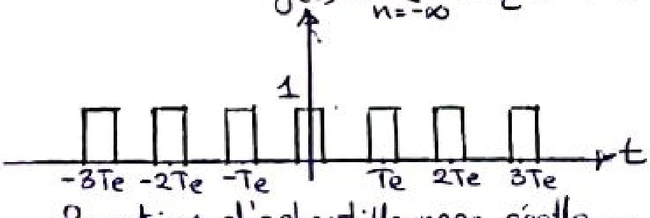
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect_\tau(t - nTe)$$



*



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect_\tau(t - nTe)$$



– fonction d'echantillonnage réelle –

- sa transformé de Fourier, en utilisant le théorème de Plancherel :

$$Y(f) = TF\{y(t)\}$$

$$= TF\left[rect_\tau(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe)\right]$$

$$= TF[rect_\tau(t)] \cdot TF\left[\sum \delta(t - nTe)\right]$$

$$= \tau \cdot \mathrm{sinc}(\tau f) \cdot Fe \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe)$$

$\Rightarrow$ le signal échantillonné devient :

$$x_e(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect_\tau(t - nTe)$$

$\Rightarrow$ Sa transformé de Fourier devient :

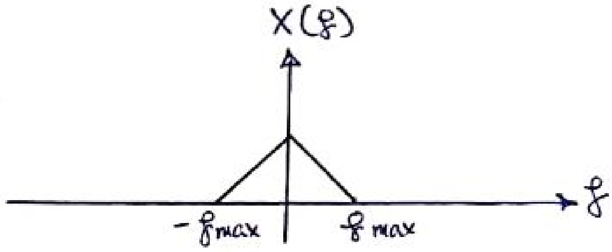
$$X_e(f) = TF[x_e(t)] = TF[x(t) \cdot y(t)]$$

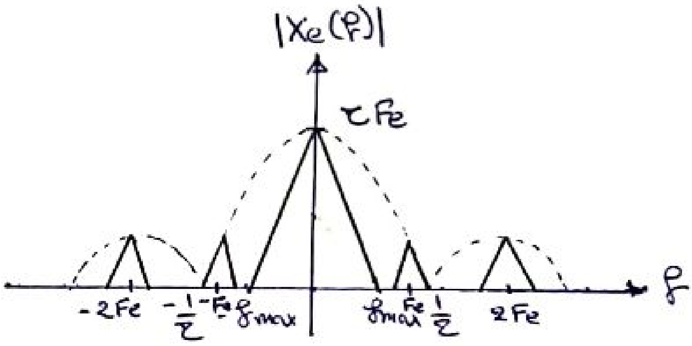
$$= X(f) * Y(f)$$

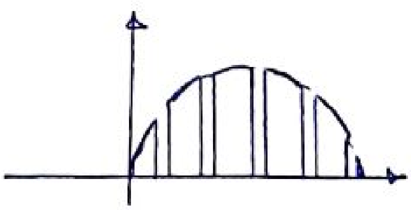
$$= X(f) * \tau\, \mathrm{sinc}(\tau f) \cdot Fe \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe)$$

$$\boxed{X_e(f) = \tau Fe\, \mathrm{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nFe)}$$

On retrouve la même allure de spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.







→ Pour se rapprocher d'un échantillonnage idéal et qu'ainsi le signal soit facilement reconstructible, il faut que "τ" soit le plus petit possible.

dans le cas où "τ" est du même ordre de grandeur que Fe, il faudra : $Fe > 2f_{max}$

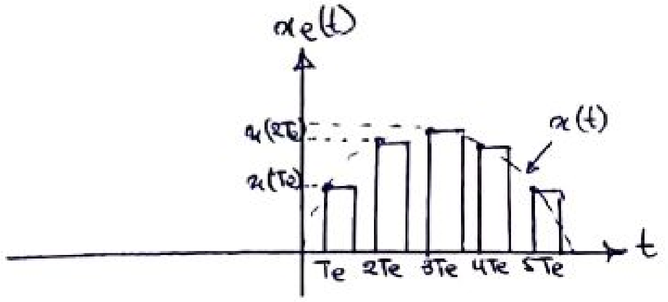
fz. daham

⟹ Exemples d'échantillonneurs :

le signal échantillonné réel est constitué d'impulsions distantes de "Te" et de largeur "τ". L'amplitude de ces impulsions sera fonction du procédé d'échantillonnage utilisé :

* **Echantillonneur Bloqueur ou Régulier :**

l'amplitude d'un échantillon de $x(t)$ pendant la durée "τ" est égale à : $x(nTe)$.

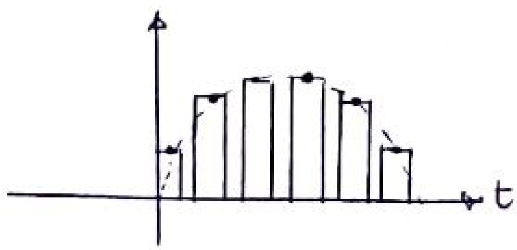


$$x_e(t) = [x(t) \cdot Ш_{Te}(t)] * rect_\tau(t)$$

* **Echantillonneur Moyenneur :**

consiste à utiliser des impulsions de largeur finie "τ" et ensuite de considérer la valeur moyenne de $x(t)$ pendant la durée "τ" de l'impulsion.

$$x_e(t) = \frac{1}{\tau}[x(t) * rect_\tau(t)] \cdot Ш_{Te}(t)$$



⟹ amplitude égale à la moyenne de $x(t)$ sur l'intervalle.

⟹ les échantillonnages Moyenneur et Bloqueur sont très proche de l'échant. idéal, parceque la durée de l'impulsion d'échantillonnage est très petite relativement بالنسبة ل à la période du signal à échantillonné.

②. La Quantification :

* est une discrétisation d'amplitude après une discrétisation du temps (échantillonnage)

* est une opération qui consiste à faire une approximation de chaque valeur du signal échantillonné $x_e(t)$ par un multiple entier d'une quantité élementaire "q" (appelé : "pas de quantification" ou "quantum de conversion", ⟹ par une loi qui est obtenue en subdivisant la plage de conversion en intervalles de valeur càd

⟶ l'amplitude maximale du signal est découpée en intervalles identiques de valeur "q".

* si "q" est constant quelle que soit l'amplitude du signal ⟹ on parle de "quantification uniforme" et la plus utilisée en pratique.

* dans tous les cas, la quantification est une perte d'information.

* autrement, si la plage de conversion est subdivisée en "pas de quantification" égaux ⟹ on parle de quantification uniforme.

* nombre de valeurs représenté :

nombre de bits de la représentation numérique ↘

$$2^B = \frac{V}{q}$$

↖ la plage de quant (Volts)

↖ pas de quant. (Volts)

* le système réalisant l'opération de quantification uniforme n'est pas linéaire.

fz.daham

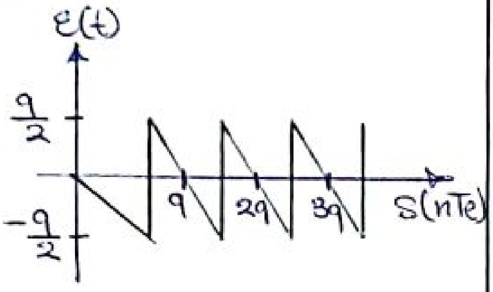
* bruit de quantification (distorsion) :

erreur → $\varepsilon(t) = e_q(nTe) - e(nTe)$

(est une fonction).

⇒ dans la quantification uniforme peut atteindre au maximum la valeur : $\left|\frac{q}{2}\right|$

⇒ si $s(nTe) = N_n q$ ⇒ le bruit de quantification est nul.



* Avantges du traitement numériques :

- Simplicité
- Flexibilité
- Précision et stabilité
- Robustesse aux bruits
- Possibilités de traitement accrues (il est possible de réaliser en num. des opérations non linéaires).

fz.daham

* Signaux discrets :

le signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(nTe) = x(t).\delta_{Te}(t)$$
$$= x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\delta(t-nTe)$$

* TFTD : (l'origine)

$$X_e(f) = TF[x_e(t)] = TF[x(t).\delta_{Te}(t)]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe)\,e^{-j2\pi ft}.dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum \underbrace{x(nTe)}_{cte}.\delta(t-nTe).e^{-j2\pi ft}.dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nTe).e^{-j2\pi ft}.dt$$

* $x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$
* $e^{-j2\pi ft}.\delta(t-t_0) = e^{-j2\pi ft_0}.\delta(t-t_0)$

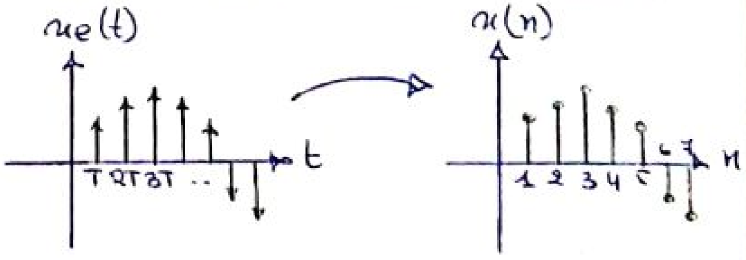
$\Rightarrow e^{-j2\pi ft}.\delta(t-nTe) = e^{-j2\pi fnTe}.\delta(t-nTe)$

$$\Rightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnTe}.\delta(t-nTe).dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\,e^{-j2\pi fnTe}.\,1\Big|_{t=nTe}$$
$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe).\,e^{-j2\pi fnTe}$$

Te = 1 :

TFTD	$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-j2\pi nf}$
TFTD	$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f).e^{j2\pi nf}.df$

$x_e(t)$



$$\Rightarrow x_e(t) = x(n) = x[n]$$

* $x(n)$ ($x[n]$) est appelé "séquence" on peut la stocker dans la mémoire ou dans un fichier.

* TF : pour les signaux finis (non périodique) et qui ont Amplitude et temps continues

* TFTD : pour les signaux finis et ont Amplitude continue et temps discret ⟹ signal échantillonné.

$(T_e \neq 1) \Rightarrow$ la forme générale

* TFTD :

$$\boxed{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi n f}} \quad ①$$

le spectre du $x(n)$

* spectre d'amplitude :

$$|X(f)|_{dB} = 20 \log_{10} |X(f)|$$

* spectre de phase :

$$\theta(f) = \arg(X(f))$$

* $X(f) \in \mathbb{C}$

* TFTD Inverse : (TFTDI)

$$\boxed{x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi n f}\, df} \quad ②$$

⟹ la relation de la TFTD est appelée : " la relation d'analyse" ①

⟹ la relation de la TFTD inverse est appelée : " la relation de synthèse" ②.

→ $x(n)$: est un signal numérique (ou discret).

→ Résumé :

$$x_e(t) = x(t).\, \delta_{T_e}(t)$$

$$= x(t).\, \sum \delta(t - nT_e)$$

$$= \sum x(nT_e).\, \delta(t - nT_e)$$

TF

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t).\, e^{-j2\pi f t}.dt$$

$$= \int \sum \underbrace{x(nT_e)}_{cte}.\, \delta(t - nT_e).\, e^{-j2\pi f t}.dt$$

$$= \sum x(nT_e) \int \delta(t - nT_e).\, e^{-j2\pi f t}.dt$$

$$= \sum x(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e).\, \underbrace{e^{-j2\pi f n T_e}}_{cte}.dt$$

$$= \sum x(nT_e).\, e^{-j2\pi f n T_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\, dt = \begin{cases} 1, & t = nT_e \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e).\, e^{-j2\pi f n T_e}}$$

* l'échantillonnage est périodise le spectre $X_e(f)$.

si le signal $x(t)$ est périodique :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n.\, e^{j2\pi n f_0 t}$$

et le spectre :

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t).\, e^{-j2\pi n f_0 t}.dt$$

→ donc si le spectre $X_e(f)$ est périodique

$$\boxed{X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{-j2\pi n T_e f}}$$

et le signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(nT_e) = C_n$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_e(f).\, e^{j2\pi n T_e f}.df}$$

* la TFTD appliquée aux signaux discrets $x_e(t)$ / $x(nT_e)$ / $x(n)$ est donc est une fonction à " fréq. continue". périodique de période " f_e " ⟹ $X_e(f)$

fz.daham