* le signal discret (échantillonné) :

$$x(n) \xrightarrow{TFTD} X(f)$$

* le spectre du signal discret est continue.

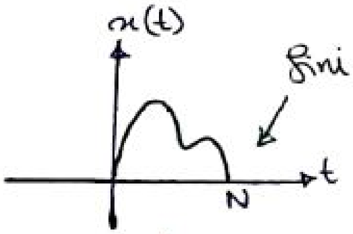
⟹ dans la pratique est impossible car le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est discrète. alors que f varie continument.

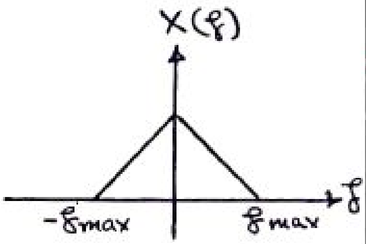
⟹ ② la solution : TFD

* limiter la durée de $x(n)$. (considérer un nombre fini N de points temporels).
* discrétiser la fréquence. (considérer un nombre fini L de points fréquentielles)

①
[Problème : le calcul la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$].

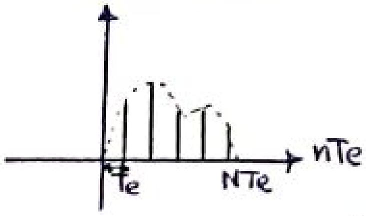
* TFD :



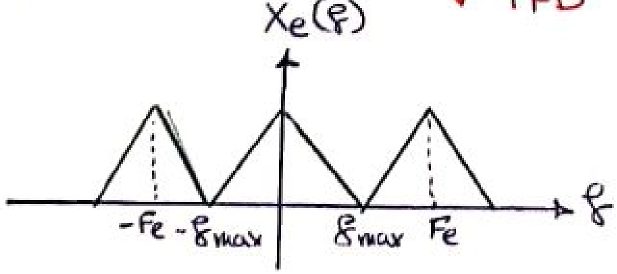


① Echantillonnage 1

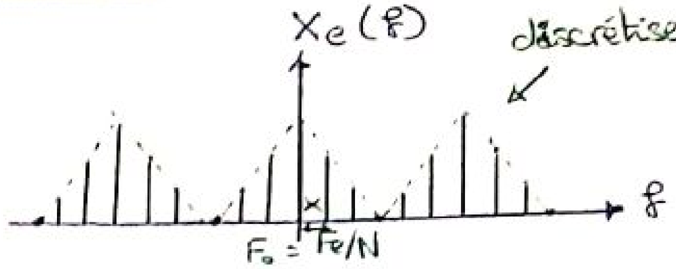
$x_e(t) = x(nTe)$



② TFTD ⇓ TFD



③ Echantillonnage 2



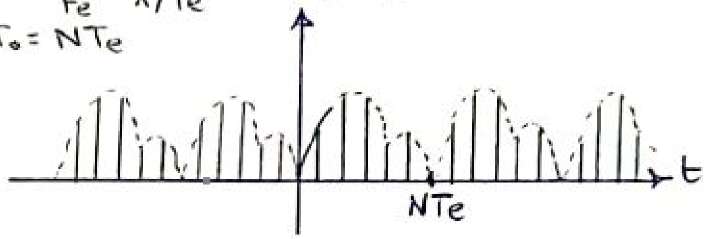
④ TFD^{-1}

$T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{Fe/N}$

$T_0 = \frac{N}{Fe} = \frac{N}{1/Te}$

$T_0 = NTe$

$x(nTe)$



⟹ signal numérique (échantillonné) :
- le pas d'échantillonnage : Te
- la période : NTe

⟹ signal fréquentiel (échantillonné) :
- le pas d'échantillonnage : $F_0 = \frac{Fe}{N} = \frac{1}{NTe}$

⟹ signal numérique récupérée :
- la période : $T_0 = \frac{1}{F_0} = NTe$

Signal temporel → Signal fréquentiel → Signal temporel

la période NTe — le pas $= \frac{1}{\text{période}}$ — la période $= \frac{1}{\text{le pas}}$

① : Echantillonnage 1 :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{Te}(t)$$
$$= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nTe)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe) \cdot \delta(t - nTe)$$
$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe) = x(nTe)$$

Signal numérique : $x(n) \leftarrow$ Si : $Te = 1$

fz.daham

② : TFTD :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \cdot e^{-j2\pi n T_e f}$$

③ : Echantillonnage 2 :

$$X_e(f) = X_e(f) \cdot \delta_{F_e/N}(f)$$

$$= X_e(f) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \delta\left(f - k\frac{F_e}{N}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} X_e\left(k\frac{F_e}{N}\right) \cdot \delta\left(f - k\frac{F_e}{N}\right)$$

$$X_e(f) = \sum_{n=0}^{N-1} X_e\left(k\frac{F_e}{N}\right) = X_e\left(k\frac{F_e}{N}\right)$$

$$\Rightarrow f = k\frac{F_e}{N}$$

$\Rightarrow$ TFTD $\longrightarrow$ TFD :

$$X_e\left(f = k\frac{F_e}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) \cdot e^{-j2\pi n T_e k \frac{F_e}{N}}$$

$$= \sum x(nT_e)\, e^{-j2\pi n \cancel{T_e} \cdot \frac{k}{\cancel{T_e} N}}$$

$T_e = 1$, $F_e = 1$: $\boxed{X_e(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}}$

notation

TFD[$x(n)$] = TFTD [$x(n)$], calculer en $f = \frac{k}{N}$

k : la fréquence discrète : $0 \leq k \leq N-1$

④ : TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_e(k) \cdot e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$$

TFD :	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$
TFD^{-1} :	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$

* Convolution de TFD :

TFTD [$x(n) * h(n)$] = TFTD [$x(n)$] . TFTD [$h(n)$]

Convolution linéaire

TFD [$x(n) * h(n)$] $\neq$ TFD[$x(n)$] . TFD[$h(n)$]

$\Downarrow$

* Produit de convolution circulaire :

x et h : signaux discrets de période : N

$\tilde{x}$ et $\tilde{h}$: leurs versions périodiques (période N)

$$\Rightarrow \boxed{x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{h}(n-k)}$$

Convolution circulaire

$\Rightarrow$ TFD [$x(n) \otimes h(n)$] = TFD [$x(n)$] . TFD [$h(n)$]

$= X(k) \cdot H(k)$

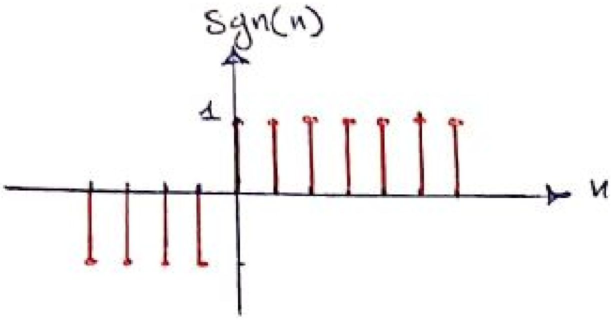
$= Y(k)$

fz.daham

* Signaux discrets (Numériques) :

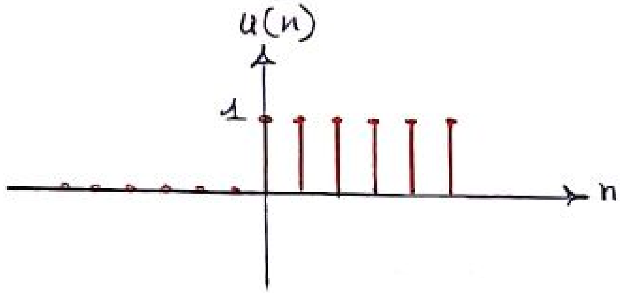
* Fonction Signe :

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & ; \; n \geq 0 \\ -1 & ; \; n < 0 \end{cases}$$



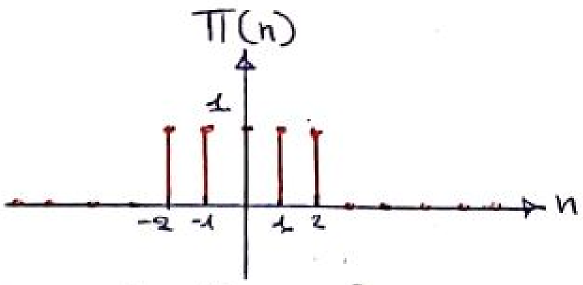
* Fonction échelon d'unité :

$$u(n) = \Gamma(n) = \begin{cases} 1 & ; \; n \geq 0 \\ 0 & ; \; n < 0 \end{cases}$$



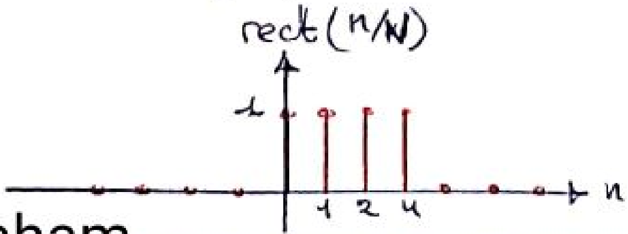
* Fonction porte :

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1 & ; \; -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & ; \; \text{ailleurs} \end{cases}$$



* Fonction rectangle causal :

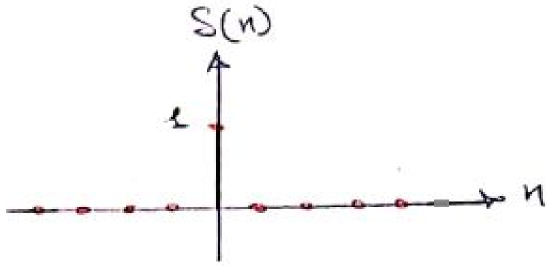
$$\mathrm{rect}(n/N) = \begin{cases} 1 & ; \; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \; \text{ailleurs} \end{cases}$$



fz.daham

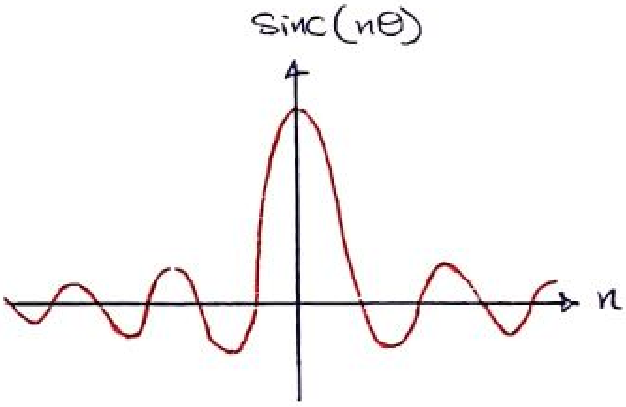
* Fonction Dirac : (impulsion unité)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; \; n = 0 \\ 0 & ; \; n \neq 0 \end{cases}$$



* Fonction Sinus Cardinal :

$$\mathrm{Sinc}(n\theta) = \frac{\sin(\pi n \theta)}{n\pi\theta}$$



* Energie :

⟹ pour les signaux non périodiques.

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2}$$

⟹ si E_x = cte (finie) ⟶ existe et Converge, alors le signal est dit à Energie finie.

* Puissance :

$$\boxed{P_x = \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N-1} |x(n)|^2}$$

⟹ la puissance moyenne :

$$\boxed{P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N-1} |x(n)|^2}$$

⟹ Pour les signaux périodiques comme sinus, échelon (unité), peigne (Dirac)...

⇒ signal rampe ni d'énergie finie ni de puissance finie.

⇒ [Energie finie, puissance nulle] ou [Puissance finie, Energie infinie].

* **auto-corrélation :**

⇒ pour les signaux à énergie finie :

$$\boxed{R_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, x^*(n-k)}$$

⇒ pour $k=0$: $R_{xx}(0) = E_x$
($R_{xx}(0)$ est maximale)

⇒ pour les signaux à puissance moyenne finie (signaux périodiques) :

$$\boxed{R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-n} x(n)\, x^*(n-k)}$$

* **inter-corrélation :**

⇒ pour les signaux à énergie finie (signaux non périodique) :

$$\boxed{R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, y^*(n-k)}$$

⇒ pour les signaux à puissance moyenne finie :

$$\boxed{R_{xy}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{N/2-1} x(n)\, y^*(n-k)}$$

* **Système discret :**

Système linéaire et invariant discret (SLID)

* Un système est discret si à la suite d'entrée discrète $x(n)$ correspond une suite de sortie discrète $y(n)$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{S.D} \longrightarrow y(n)$$

* Un système est linéaire, si :

⇒ à l'entrée : $k\,x(n) \xrightarrow{S} k\,y(n)$

⇒ $x_1(n) + x_2(n) \xrightarrow{S} y_1(n) + y_2(n)$

* Un système est invariant dans le temps (stationnaire), si :

⇒ le système ne dépend pas l'origine du temps :

$$x(n-k) \xrightarrow{S} y(n-k)$$

* **Convolution :**

⇒ si la linéarité et l'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le sys. par sa réponse impulsionnelle. $h(n)$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

⇒
$$\boxed{\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k) \end{aligned}}$$

⇒ la réponse impulsionnelle $h(n)$ est le signal qu'on obtient en sortie, si on applique en entrée une "impulsion de Dirac" : $y(n) = h(n)$
$x(n) = \delta(n)$

* **la relation entre la corrélation et la convolution :**

$$R_{xy}(k) = x(n) * y^*(-n)$$

→ les filtres analogiques définis par des équations différentiels.

→ les filtres numériques définis par des équations aux différences.

fz.daham

* Transformé de Z *

* <u>TF</u> : analyse et traitement des signaux, à temps continue.
* <u>TZ</u> : traitement des système, signaux discrets.
* <u>TZ</u> : est un outil qui permet de :
  - Calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une éq aux différences finies.
  - interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréqs.

* <u>TZ</u> : (est la génération de TFTD)

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}}$$

$$\boxed{= \cdots + x(-1).z^{1} + x(0).z^{0} + x(1).z^{-1} + \cdots}$$

avec : $z = re^{jw} = re^{j2\pi f}$
(z est une variable complexe).

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).r^{-n}.z^{-jnw}}$$

* <u>existance</u> :

⇒ TZ existe si : $x(n).r^{-n}$ est absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).r^{-n}| < \infty$$

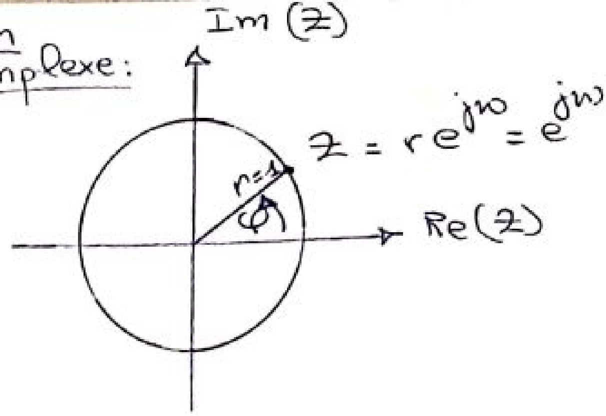
⇒ TZ existe si la série converge. l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles cette série converge :

RDC : Région de Convergence

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).r^{-n}| < \infty \right\}$$

⇒ TZ est une série infinie.

⇒ Plan Complexe :



* <u>Région de Convergence</u> :

→ théorème de Cauchy :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \text{ converge si : } \lim_{n\to\infty} |x(n).z^{-n}|^{1/n} < 1}$$

⇒ on décompose la TZ en 2 parties : causal et anticausal, pour obtenir 2 rayons de convergence :

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n).z^{-n}}_{\text{anticausal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n}}_{\text{causal}}}$$

* <u>Transformée bilatérale</u> :

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}}$$

* <u>Transformée monolatérale</u> :

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n}}$$

⇒ <u>Convergence de la partie Causal</u>.

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

⇒ Condition de convergence : Critère de Cauchy :

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |x(n).z^{-n}|^{1/n} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n}.|z^{-\cancel{n}}|^{1/\cancel{n}} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n}.\frac{1}{|z|} < 1$$

fz.daham

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n}}_{R_1} < |z|$$

$$\Longrightarrow \boxed{|z| > R_1}$$

* z est à l'extérieur d'un cercle de rayon R_1.

$\Longrightarrow$ Convergence de la partie anticausale :

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n).z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n).z^{n}$$

$\Longrightarrow$ théorème de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} |x(n).z^n|^{1/n} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n} . |z^{\cancel{n}}|^{1/\cancel{n}} < 1$$

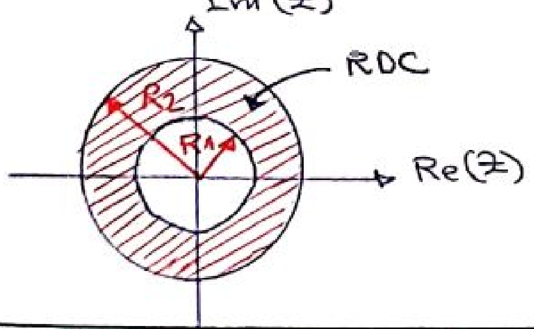
$$\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n} < \frac{1}{|z|}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n}}}_{R_2} > |z|$$

$$\Longrightarrow \boxed{|z| < R_2}$$

* z est à l'intérieur d'un cercle de rayon R_2.

$\Longrightarrow$ la série converge d'un anneau du plan complexe z :



* Transformé de z signaux usuels :

* Echellon unité :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n < 0 \end{cases}$$

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1.z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-n}} = \boxed{\frac{z}{z-1}}$$

$$R_1 = \lim_{n\to+\infty} |u(n)|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} |1|^{1/n} = \boxed{1}$$

$$\boxed{1 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1}{1-r} \;,\; |r|<1}$$

* Impulsion de Dirac :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

$$TZ[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n).z^{-n}$$

$$= 0 + \delta(0).z^0$$

$$= 1.1 = \boxed{1}$$

* signal exponentiel :

$$x(n) = a^n.u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n.u(n).z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.1.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a.z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{1}{\frac{z-a}{z}}$$

$$X(z) = \boxed{\frac{z}{z-a}}$$

Remarque :

* $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$

* $x(n) \xrightarrow{TFTD} X(f) = \sum x(n).e^{-j2\pi f n T_e}$

$$\Longrightarrow \boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f n T_e}} = X(f)}$$

fz.daham

Quelques TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n U(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n U(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n U(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 nT_e)U(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 nT_e)U(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 nT_e)U(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n\sin(\omega_0 nT_e)U(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

* Valeur initial :

$$x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

* Valeur final :

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{n \to 1} X(z)(z-1)$$

* TZ inverse :

pour inverser une transformé en z, on utilise le théorème de Cauchy :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} = \begin{cases} 1 & ; \ k=0 \\ 0 & ; \ \text{autrement} \end{cases}}$$

C : est le contour qui entour l'origine du plan.

⇒ En prenant la définition de TZ :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

⇒ En multipliant les deux membres par : z^{k-1}

$$X(z) \cdot z^{k-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n+k-1}$$

⇒ En intégrant le long d'un contour :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{k-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n+k-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} \right]$$

⇒ d'après la théorème de Cauchy, on a :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} = \begin{cases} 1 & ; \ k=n \\ 0 & ; \ \text{autrement} \end{cases}$$

⇒ alors finalement :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot 1$$

fz.daham

⇒ TZ^{-1} :

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1}}$$

⇒ Cette formule est utilisé rarement en pratique.

⇒ Dans la pratique, on utilise 3 méthodes :

①. inversion par le théorème des résidus (intégration) : permet de calculer cette intégrale comme la somme des résidus des pôles situés à l'intérieur du contour d'intégration.

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz = \sum_{i=1}^{Np} \operatorname{Res}\left[X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i}}$$

* pour un pôle d'ordre k :

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-p_i)^k \cdot X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i}}$$

Exp 1 : $X(z) = \dfrac{z}{z-e^a}$, $p_i = e^a$

⇒ ordre : $k=1$

$$\operatorname{Res}\left[X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i} = \left[(z-p_i) X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i}$$

$$= \left[\cancel{(z-e^a)} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-e^a}} \cdot z^{n-\cancel{1}}\right]_{z=p_i}$$

$$= \left[z^n\right]_{z=p_i=e^a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = e^{na} u(n)}$$

* pour un pôle simple : $k=1$

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[X(z) \cdot z^{n-1}\right]_{z=p_i} = \left[X(z) \cdot z^{n-1} (z-p_i)\right]_{z=p_i}}$$

Scanné avec CamScanner

Exp 2 : $X(z) = \dfrac{1}{1-bz^{-1}} = \dfrac{z}{z-b}$

$\Rightarrow$ RDC : $|z| > 0$ avec $0 < b < 1$

$K = 1$, $p_i = b$

$$x(n) = \sum_{i=1}^{N_p} \text{Res}\left[X(z).z^{n-1}\right]_{z=p_i}$$

$$= \left[(z-p_i).X(z).z^{n-1}\right]_{z=p_i}$$

$$= \left[\cancel{(z-b)}.\frac{z}{\cancel{z-b}}.z^{n-\cancel{1}}\right]_{z=p_i}$$

$$= \left[z^n\right]_{z=p_i=b}$$

$\Rightarrow \boxed{x(n) = b^n u(n)}$ car : $|z| > b$

②. inversion par division polynômiale :

Calcul la TZ^{-1} selon les puissances croissantes de z^{-1} (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal) :

Exemples :

* $X(z) = \sum_n C_n . z^{-n} = \sum_n x(n).z^{-n}$

$\downarrow TZ^{-1}$

$\boxed{x(n) = C_n}$

* $y(n) = y(n-3) + x(n)$

$H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$; $Y(z) = Y(z).z^{-3} + X(z)$

$Y(z) - Y(z).z^{-3} = X(z)$

$Y(z)\left[1 - z^{-3}\right] = X(z)$

$Y(z) = \dfrac{X(z)}{1-z^{-3}}$

$$H(z) = \frac{\cancel{X(z)}}{(1-z^{-3})\cancel{X(z)}} = \frac{1}{1-z^{-3}} = \frac{1}{1-r}$$

$$= 1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[z^{-k}\right]^3 = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots +$$

$\downarrow TZ^{-1}$

$$\boxed{h(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-3k)}$$

* $X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, pour : $|z| > a$

$\Rightarrow |z| > a \Rightarrow$ domaine de convergence extérieur à un cercle $\Rightarrow$ signal causal

$\Rightarrow$ division pour avoir une série en z^{-1}

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\hline
-(1 - az^{-1}) & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\
0 + az^{-1} & x[0] \quad x[1] \quad x[2] \\
-(az^{-1} - a^2z^{-2}) & \\
0 + a^2z^{-2} & \\
-(a^2z^{-2} - a^3z^{-3}) & \\
a^3z^{-3} & \\
\vdots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n} = x(0).z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + a^n.z^{-n}$$

$\Rightarrow \boxed{x(n) = a^n.u(n)}$

* $X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$, pour : $|z| < a$

$\Rightarrow |z| < a \Rightarrow$ région de convergence intérieur à un cercle $\Rightarrow$ signal anti-causal $\Rightarrow$ division pour avoir une série en z.

$$\begin{array}{l|l}
z & -a + z \\
\hline
-(+z - a^{-1}z^2) & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 \leftarrow \dots \\
0 + a^{-1}z^2 & x[-1] \qquad x[-\infty] \\
-(a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3) & \\
0 + a^{-2}z^3 & \\
-(a^{-2}z^3 - a^{-3}z^4) & \\
0 + a^{-3}z^4 & \\
\vdots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 \dots - a^{-n}.z^n$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n).z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n).z^n$$

$$\boxed{x(n) = -a^n.u(-n-1)}$$

fz.daham

* Propriétés TZ :

①. Linéarité :

$$x(n) = a\,x_1(n) + b\,x_2(n)$$

$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X(n) = a\,X_1(z) + b\,X_2(z) \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ ROC_1 \qquad\qquad ROC_2 \\ \Rightarrow ROC = ROC_1 \cap ROC_2 \end{array}}$$

Exp : $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n ; & n \geq 0 \quad \text{—①} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n ; & n < 0 \quad \text{—②} \end{cases}$

$$\Rightarrow x(n) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)}_{①} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(-n-1)}_{②}$$

$n < 0 :]-\infty, -1]$

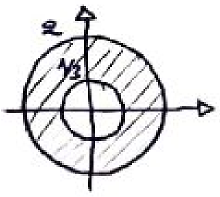
$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + (2)^n u(-n-1)$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{z}{z-2}$$

$ROC_1 : z > \left|\frac{1}{3}\right|$ $\qquad$ $ROC_2 : z < |2|$

$\Rightarrow ROC : ROC_1 \cap ROC_2$

$\frac{1}{3} < z < 2$



②. Décalage temporel :

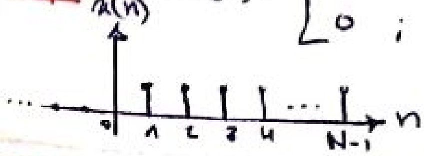
$$\boxed{x(n-K) \xrightarrow{\;z\;} z^{-K} \cdot X(z)}$$

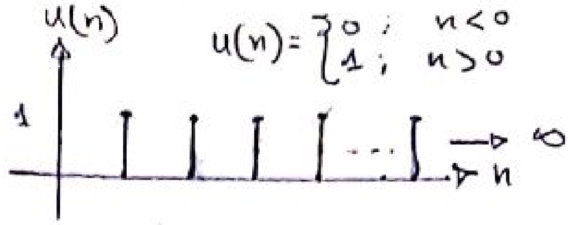
Si : $K < 0 \Rightarrow ROC : z \in \mathbb{C} - \infty$

$K > 0 \Rightarrow ROC : z \in \mathbb{C} - 0$

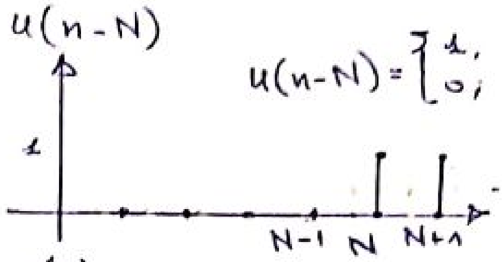
$K = 0 \Rightarrow ROC : z \in \mathbb{C}$

Exp : $x(n) = \begin{cases} 1 ; & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 ; & \text{ailleurs.} \end{cases}$





$u(n) = \begin{cases} 0 ; & n < 0 \\ 1 ; & n > 0 \end{cases}$



$u(n-N) = \begin{cases} 1, & n \geq N \\ 0 ; & n < N \end{cases}$

$$\Rightarrow x(n) = u(n) - u(n-N)$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-N} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$ROC_1 : z > 1$ $\qquad$ $ROC_2 : K = N$

$z - 0$

$\Rightarrow z > 1$

$$ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = z > 1$$

③. Facteur d'échelle (mise à l'échelle) :

On a : $x(n) \xrightarrow{\;z\;} X(z)$

$ROC : r_1 < |z| < r_2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} a^n \cdot x(n) \xrightarrow{\;z\;} X\left(\frac{z}{a}\right) \\ ROC : |a| r_1 < z < |a| r_2 \end{array}}$$

Dém.
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot x(n) \cdot z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot z)}_{z_1}^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z_1^{-n}$$
$$= X(z_1)$$

$$\Rightarrow X(z) = X(z_1) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$ROC : r_1 < |z_1| < r_2$

$r_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < r_2$

$|a| r_1 < |z| < |a| r_2$

fz.daham

Exp : $x(n) = \underbrace{(0,5)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{a^n \cdot x_1(n)}$, $\underset{\text{ROC}}{|z|>1}$

$$x_1(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \xrightarrow{z} \frac{z\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

$ROC_1 : |z|>1$

$$x(n) = a^n \cdot x_1(n) \xrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$x(n) = (0,5)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \xrightarrow{z} \frac{\frac{z}{1/2}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{z}{1/2}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{1/2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{2z \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4z^2 - 4z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

ROC : $\left|\frac{z}{1/2}\right| > 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

④. inversion de l'axe temporel :

On a :

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z) \text{ , ROC : } r_1 < |z| < r_2$$

$$\boxed{x(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1}) \qquad \text{ROC : } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_2}}$$

Exp : ①. $x(n) = u(-n)$

$$z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1} \text{ , } |z|>1$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} - 1 > 0$$

$$\frac{1}{z} > 1$$

$$1 > |z|$$

$\Rightarrow$ ROC : $|z| < 1$

②. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{\left(\frac{z}{1/2}\right)^{-1}}{\left(\frac{z}{1/2}\right)^{-1} - 1} = \frac{(2z)^{-1}}{(2z^{-1})-1}$$

ROC $\{u(-n)\}$: $|z|<1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$

⑤. dérivation dans l'espace :

$$\boxed{n^n x(n) \xrightarrow{z} -z\,\frac{d^n X(z)}{dz^n} \qquad \text{ROC : } r_1 < |z| < r_2}$$

Exp : ①. $x(n) = n\,u(n)$

$$X(z) = -z\,\frac{d\, z\{u(n)\}}{dz^n}$$

$$= -z \cdot \frac{d\left(\frac{z}{z-1}\right)}{dz}$$

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{1\cdot(z-1) - 1\cdot z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow X(z) = -z\cdot\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) = \boxed{\frac{z}{(z-1)^2}}$$

ROC : $|z|>1$

②. $x(n) = n\cdot \underbrace{a^n u(n)}_{x_1(n)}$

$$X_1(z) = \frac{z}{z-a}$$

ROC : $|z|>a$

$$\Rightarrow X(z) = z^{-1}\,\frac{d\left(\frac{z}{z-a}\right)}{dz}$$

$$\left(\frac{z}{z-a}\right)' = \frac{1\cdot(z-a) - 1(z)}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

$$\Rightarrow X(z) = -z\cdot\frac{(-a)}{(z-a)^2} = \boxed{\frac{az}{(z-a)^2}}$$

ROC : $|z|>a$

⑥. Théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

Exp : Trouver la valeur initial de :

$$X(z) = \frac{2}{z^2 + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}}$$

$$X(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \frac{2}{\infty + \frac{1\infty}{6} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\infty} \to 0$$

$$X(0) = \boxed{0}$$

fz.daham

7. Théorème de la valeur finale :

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)}$$

Exp :

$$X(z) = \frac{2}{z^2 + \frac{1}{6} z - 1}$$

$$X(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot \frac{2}{z^2 + \frac{1}{6} z - 1}$$

$$= (1-1) \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{6} - 1}$$

$$X(\infty) = \boxed{0}$$

8. Convolution :

$$\boxed{\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) \end{aligned}}$$

$$\boxed{Y(z) = X(z) \cdot H(z)}$$

Dem. $Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) \cdot z^{-n}$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) \cdot z^{-n}$$

$m = n - k$

$\Rightarrow n = m + k$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot h(m) \cdot z^{-(m+k)}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} h(m)\, z^{-m}}_{Z\{h(m)\}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}}_{Z\{x(k)\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(z) = X(z) \cdot H(z)}$$

Exp :

$x_1(n) = [1, 0, 1]$

$x_2(n) = [1, 2]$

$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = ?$

$\Rightarrow X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{2} x(n) \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}$$

$\Rightarrow X_1(z) = 1 + z^{-2}$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{1} x(n) \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1}$$

$\Rightarrow X_2(z) = 1 + 2z^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(z) &= X_1(z) \cdot X_2(z) \\ &= (1 + z^{-2})(1 + 2z^{-1}) \\ &= 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3} \\ &= \underbrace{1 \cdot z^{-0}}_{x(0)} + \underbrace{2 \cdot z^{-1}}_{x(1)} + \underbrace{1 \cdot z^{-2}}_{x(2)} + \underbrace{2\, z^{-3}}_{x(3)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(n) = [1, 2, 1, 2]$

9. Conjugué :

$$\boxed{x^*(n) \xrightarrow{Z} X^*(z^*)}$$

* **TZ rationnelles :**

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une TZ rationnelle (fonction de transfert ou la réponse fréquentielle $H(z)$).

→ l'équation aux différences :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} \cdot X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k} Y(z)$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{a_0 = 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

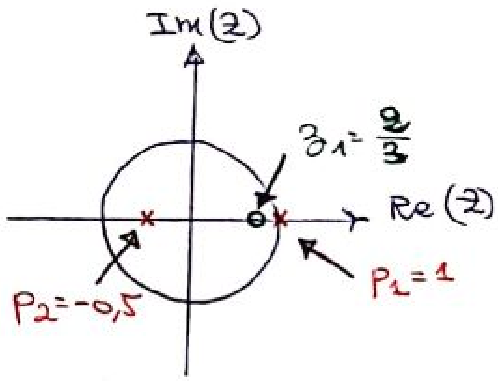
$$= \frac{b_0 \cdot \cancel{z^0}^{\,1} + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{a_0 \cdot \cancel{z^0}_{\,1} + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}}$$

$$= \frac{b_0 \cdot z^{-M}(z-z_1)\cdots(z-z_M)}{a_0 \cdot z^{-N}(z-p_1)\cdots(z-p_N)}$$

$$\boxed{H(z) = \alpha \cdot z^{N-M} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}}$$

* $\alpha = \frac{b_0}{a_0}$: le facteur d'amplitude.
* $H(z)$ possède M zéros finis en $z_1 \cdots z_M$
* $H(z)$ possède N pôles finis en : $p_1 \cdots p_N$
* si $N > M$, $H(z)$ possède $N-M$ zéros en $z=0$.
* si $M > N$, $H(z)$ possède $M-N$ pôles en $z=0$.
* si $H(z)=0$, on a des pôles en $z=\infty$.
* si $H(z)=\infty$, on a des zéros en $z=\infty$.
* la position les "pôles" et les "zéros" et le "facteur d'amplitude" ⇒ fournir une description de $H(z)$ (le comportement du système) :

Exp : $H(z) = \dfrac{3z-2}{(z-1)(z+0{,}5)}$



⇒ zéros : $z_1 = \frac{2}{3}$

⇒ pôles : $p_1 = 1$, $p_2 = -0{,}5$

* la région de convergence de $H(z)$ exclue tous les pôles (ne contenir pas de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles.

* $h(n)$: converge si : $|p_k| < 1$.
* $h(n)$: diverge si : $|p_k| > 1$.

* $N(z) = 1$ → le filtre possède des pôles, donc le filtre est : RII.
* $D(z) = 1$ → le filtre possède des zéros, donc le filtre est : RIF.

* Système Numérique (= Filtre) :

* le signal numérique s'écrit :

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot \delta(n-k)}$$

* Système linéaire invariant dans le temps :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = S\left[x(n)\right]$$

$$= S\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot\delta(n-k)\right]$$

linéarité

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot S\left[\delta(n-k)\right]$$

invariant

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(n-k)$$

changement de variable

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot x(n-k)$$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n)} \rightarrow \text{Conv. discret}$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(n)$$

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(n-k)$$

* Equations aux différences :

pour les systèmes linéaire invariant dans le temps et causal :

$$\boxed{y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)}$$

⇒ Si $N \geq 1$:

* $y(n)$ dépend de N précédents échantillons de sortie.
* le système est dit récursif.
* la réponse impulsionnelle est infinie (RII).

⇒ Si $N = 0$:

* $y(n)$ dépend seulement de l'entrée courante $x(n)$ et de ses M échantillons précédents.
* le système est dit non récursif.
* réponse impulsionnelle est finie (RIF)

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, \delta(n-k)$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\cdot x(n-k)}$$

* Classification des filtres numériques :

⇒ selon la réponse fréquentielle :

* Filtre passe-bas
* " " -haut
* " " -bande
* " coupe-bande.

⇒ selon la réponse impulsionnelle :

* Filtre RIF
* " RII

①. RIF :

→ Réponse impulsionnelle d'un filtre non-récursif :

$$\underbrace{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)}_{\text{Eqt aux différences (si } N=0)} = \underbrace{x(n) * h(n)}_{\text{Eqt de conv.}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{M} b_k\, \underbrace{x(n-k)}_{\times} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, \underbrace{x(n-k)}_{\times}$$

⇒ $h(k) = b_k$: باطبقة نجد

pour : $0 \leq k \leq M$

$$\Rightarrow h(k) = \begin{cases} b_k & ; 0 \leq k \leq M \\ 0 & ; \text{sinon} \end{cases}$$

⇒ La réponse impulsionnelle est finie (RIF).

→ **Fonction de transfert :**

$$h(k) = b_k \quad \text{pour : } 0 \leq k \leq M$$

TZ ↓

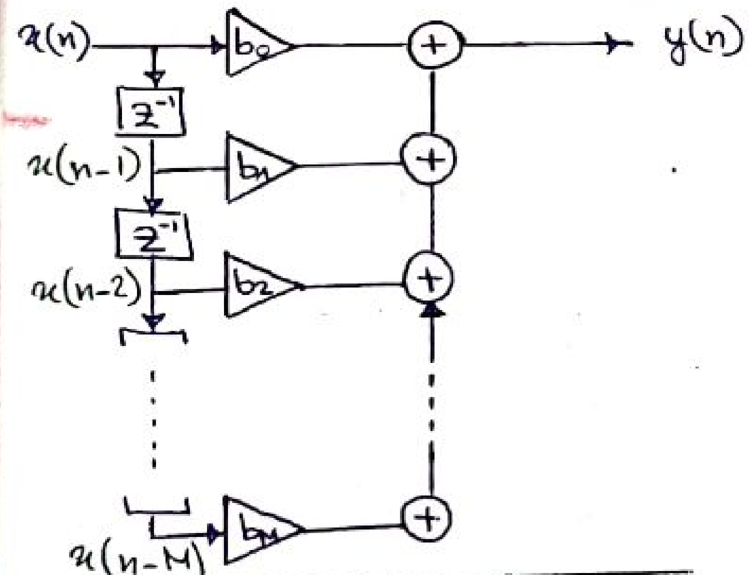
$$\boxed{H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}} \times \frac{z^M}{z^M}$$

$$H(z) = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{M-k}$$

⇒ le polynôme "Numérateur" possède M racines.

⇒ Ce système dit "tout zéros". avec (N = 0).

→ **structure d'un filtre non récursif (RIF) :**



$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)}$$

⇒ **Comparaison entre RIF et RII**

RIF	RII
* Fonction de transfert : $H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$ * toujours stable. * ne possède pas d'équivalent analogique. * Réponse en phase linéaire si filtre causal. * réponse impulsionnelle non récursif : $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x(n-k)$	* Fonction de transfert : $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$ * Stable si les pôles sont à l'intérieur d'une cercle unité [$\lvert p_k \rvert < 1, \forall k$]. * possède un équivalent analogique. * Réponse en phase non linéaire. * réponse impulsionnelle récursif : $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$

fz.daham

②. RII :

→ **Réponse impulsionnelle d'un filtre récursif :**

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)}$$

⇒ Si on a un système :

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(n)$$

$$\Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k)$$

Si :

$k=0, n=0 \Rightarrow h(0) = b_0 \cdot \overset{1}{\delta(0)} = \boxed{b_0}$

$k=1, n=1 \Rightarrow h(1) = b_1 - a_1 h(0)$
$= \boxed{b_1 - a_1 b_0}$

$k=2, n=2 \Rightarrow h(2) = b_2 - a_2 b_0$

⋮ ⋮

⇒ la réponse impulsionnelle est : infini (RII)

→ **Fonction de transfert :**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z)$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} z^{-k} \cdot a_k\right] = \sum_{k=0}^{N} b_k \cdot z^{-k} X(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}}$$

Si $a_0 = 1$:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

* **Système tout pôles :** $M = 0$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{0} b_0 \cdot z^{(0)}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

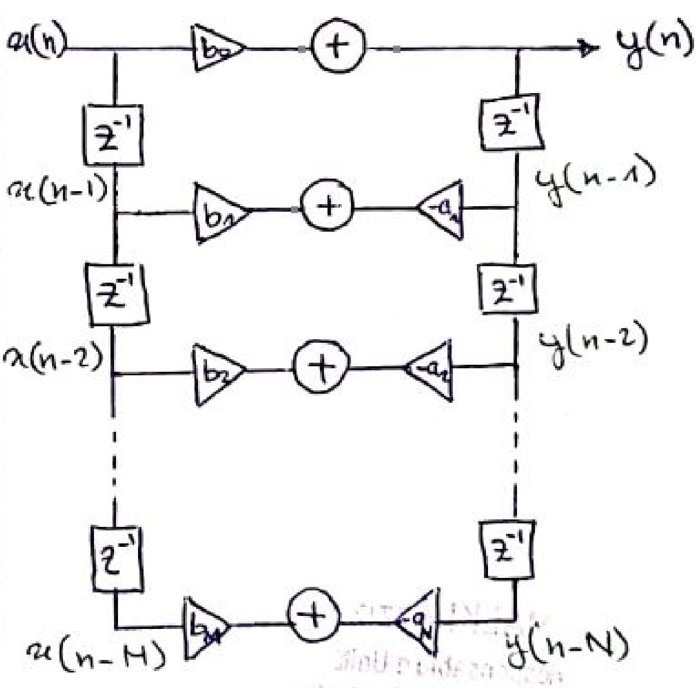
$$= \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}} \times \frac{z^N}{z^N}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{b_0 \cdot z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{N-k}}$$

⇒ le polynôme "Dénominateur" possède N racines.

⇒ la rép. imp. est de type infinie (RII).

→ **Structure d'un filtre récursif (RII) :**



fz.daham

* Causalité :

- un système linéaire invariant est : causal si : $h(n) = 0$, pour $n < 0$
- un système linéaire invariant est : causal si le domaine de convergence de $H(z)$ est l'extérieur d'un cercle de rayon $r < \infty$ incluant $z = \infty$.
- si le domaine de convergence de $H(z)$ est l'extérieur d'un cercle de rayon "0" mais excluant $z = \infty$ ⟹ donc le sys. est non causal.

* Stabilité :

- un système LI est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

- un système linéaire invariant est stable si le domaine de convergence de $H(z)$ inclue le cercle d'unité.
- un système linéaire invariant causal est stable si tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité. $\neq$

⟹ Sys causal et stable : tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité ($|p_k| < 1, \forall k$)

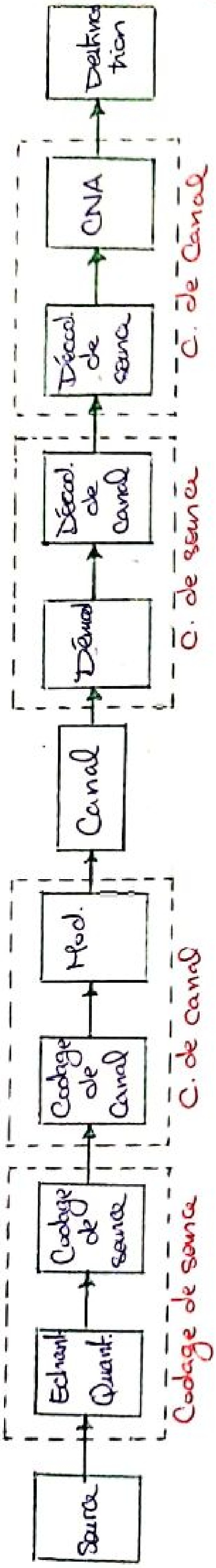
⟹ Sys anti-causal et stable : les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

⟹ Système à phase minimale : tous les "zéros" sont à l'intérieur du cercle unité ($|z_k| < 1, \forall k$).

* Phase et Module du système :

p. 82 ([illegible]) / p. 47 ([illegible])

* Système de Communication Numériques :



①. source d'information :

* source discrète : la sortie est une séquence de symbole (signal quantifié) ⟶ à la codage directement.

* source analogique : la sortie est un signal continu $a(t)$. [grandeur physique, audio, vidéo ...].

* source semi-discrète : la sortie est un signal échantillonné ⟶ à la quantification ⟶ le codage.

②. Echantillonnage / Quantification :

est l'opération de discrétisation :

Echant. :

Quant. : consiste à associer à chacun des échantillons un symbole extrait d'un certain alphabet fini.

③. Codage de source :

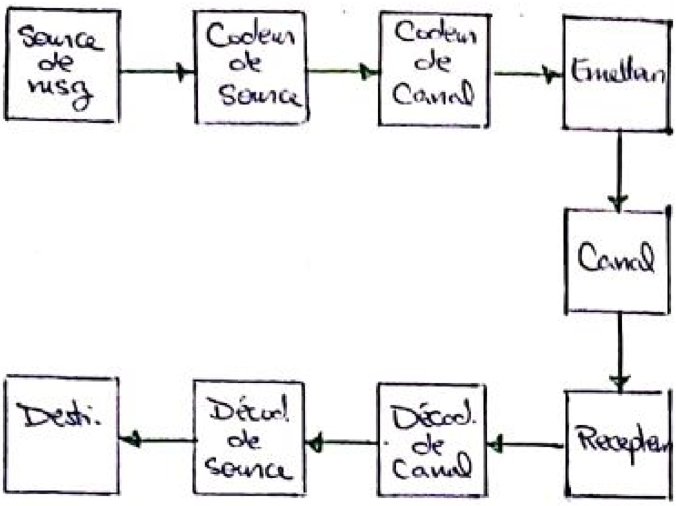
est la représentation binaire des différents niveaux de quantification.
associer un code binaire à chacun des symboles.

④. Codage de canal :

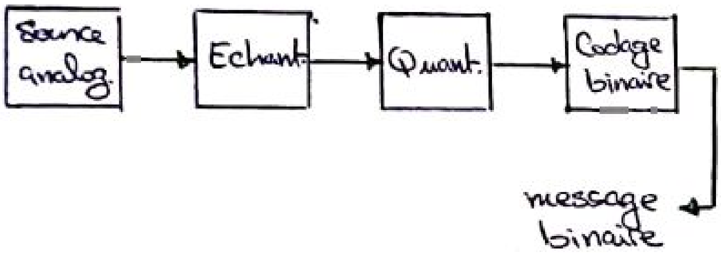
est une opération de transcodage.
associer un code plus long à des codes source.
la séquence de sortie est un signal en bande de base qui transmissible direct ou après modulation.
⟶ le but :
- la protection de l'info contre les erreurs de transmission.
- adapter le message numérique à transmettre aux caractéristiques du canal de transmission.

تتبع

* Chaîne de transmission :



①. message de source :



→ le message à transmettre doit être sous forme "numérique".

→ Numérisation : 3 étapes :

* Echantillonnage :
  temps continu → temps discret
* Quantification :
  amplitude continu → ampli. discret
* Codage :
  chaque niveau quantifié d'amplitude est codé sur un nombre déterminé de bits → la technique de base est : MIC [Modulation par Impulsion et Codage].

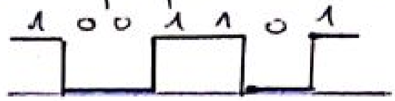
②. Codage de source : msg compressé

par exp. un signal de parole a 64 Kbit/s après le codage de source il réduit à 32kb/s sans dégradation de la qualité de la parole

→ débit binaire : est le nombre d'élément binaire (bits) émit par seconds :

$$\boxed{D = \frac{1}{T_b} \quad [\text{bit/s}]}$$

T_b : le temps pour un bit est transmis



→ transmission synchrone : l'émission des bits s'effectue à cadence constante (càd toutes les T_b seconds).

→ transmission asynchrone : la cadence d'emission est variable.

→ on s'intéresse par la transmission synchrone.

③. Codage de canal : [appelé aussi : "codage détecteur" ou "correcteur d'erreurs"]

- permet d'améliorer la qualité de la transmission.
- Consiste à insérer dans le message des élements binaires (redondance).
  → augmentation le débit binaire.
- détecte les erreurs de transmission qu'il peut corriger.

* tr. synchrone : permet de transmettre un bloc de bits (trame), sans bit de synchronisation, l'horloge assure un temps constant entre chaque bit envoyé.

fz.daham

④. **Emetteur** : pour transmettre le msg numérique, il faut être un signal les traitements qui effetués :

① → **Modulation** : représentation physique du msg num. (signal électrique pour le transmettre).

* Consiste à associer à chaque mot de (n) éléments binaires → un signal $\alpha_i(t)$ $i = 1, 2, .., M$ de durée : $T = nT_b$ choisi parmi $M = 2^n$ signaux.

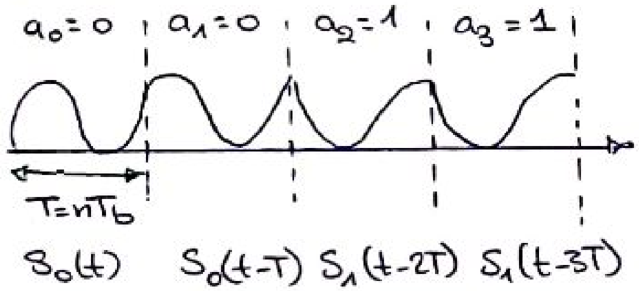
* la rapidité de la modulation : est le nombre de signaux transmis par le modulateur par unité de temps :

$$\boxed{R = \frac{1}{T} = \frac{1}{nT_b}}$$

En fct de débit binaire :

$$\boxed{R = \frac{D}{\log_2 M}} \quad , M = 2^n$$

* Exp :



On a 2 signaux lorsque :

"0" → $S_0(t)$

"1" → $S_1(t)$

* a_K : l'élément binaire (bit) émis à l'instant : KT_b

②
→ Assure une fonction d'adaptation du signal modulé au milieu de transmission (le choix du types de signaux).

③
→ le filtrage du signal modulé pour limiter sa bande, et pour le partage de même milieu de transmission sans risque d'interférence. تداخل / تشابك

④
→ Assure une fonction de changement de fréquence qui permet de centrer le signal modulé autour la fréq. souhaité

⑤. **Canal de transmission** :

Constitué de : filtre linéaire, milieu de transmission [câble (bifilaire, coaxial), FO, espace libre ..] et bruit.

⑥. **Récepteur** :

→ Reconstituer le message numérique émis par la source à partir du signal analogique reçu.

→ comprend : circuits d'amplification, changement de fréquence, démodulation [pour la transmission sur onde porteuse] filtrage et échantillonnage.

* transmission en bande de base → Codage en ligne.

* transmission sur onde porteuse → Modulation.

* la qualité de transmission num :

est la probabilité d'erreur par élément binaire (bits) ⇒ P_{eb}

fz.daham

* Communication Numérique :

Consiste à transporter les données numériques (msg binaire) sur le support sous forme d'un signal num.

* Système de Communication :

ensemble de dispositifs électronique pour assurer la transmission de données.
est composés de : Emetteur, canal, Récepteur

* Transmission en bande de base :

Consiste à transformer le message binaire en un signal numérique par un codeur et le transmettre directement sur le canal.

* Problème de transmission en BdB :

- pertes du signal pour les distances élevées.
- impossibilités de différencier plusieurs communications sur même support.

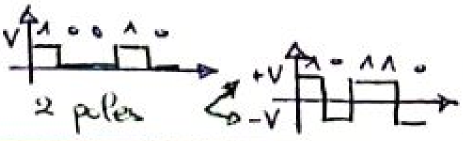
* Codage en ligne : (modulation en BdB)

(ou transcodage) consiste à associer au message binaire un ensemble des impulsions électriques.

* Signal numérique :

est un signal discontinu dans le temps, 2 formes :

* unipolaire :
* bipolaire :



* Codage de source :

Compression du message.

* Codage de canal :

Correcteur d'erreur.

* Tr. Synchrone :

émission de bits à cadence constante (T_b = cte) + horloge.

* Tr. asynchrone :

cadence variable pas d'horloge.

* message binaire : (msg. numérique)

ensemble des éléments binaires (0 ou 1)

* mot binaire : (mot numérique)

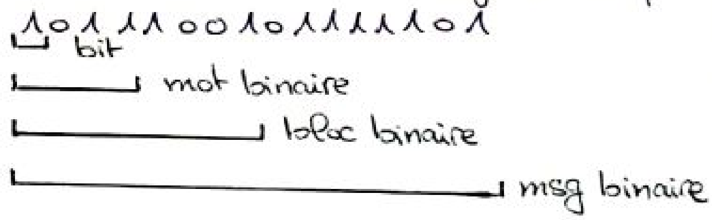
est un nombre de bit, qui représenter les lettres, les chiffres et les symboles :

- chiffre : $(15)_{10} = (1111)_2$
- lettre : $(A) = (1000001)_2$
- symbole : $\% = (1010010)_2$

} mots binaires (num)

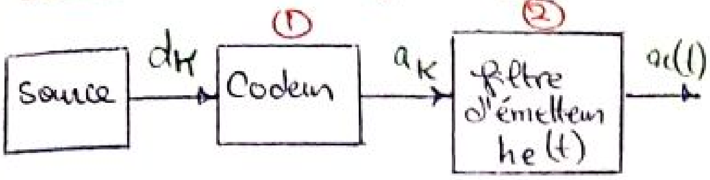
* bloc binaire : (bloc numérique)

c'est une tranche du message numérique.



fz.daham

* **Tr. en BdB = Codage en ligne = mod :**



d_n : message binaire (0 ou 1).
a_K : symbole

① : $a(t) = \sum_K d_K \cdot \delta(t - KT)$
$= a_K$

② : $x(t) = a(t) * h_e(t)$
$x(t) = \sum_K a_K \cdot h_e(t - KT)$

* **Critères de choix Codage en ligne :**

- contrôle de la performance.
- interférence du canal.
- la fiabilité de la réalisation.
- la bande passante du bruit.

* **Codage binaire (unipolaire) :** $M = 2$

$A = \{0, 1\}$; $a_K \in A$ (Alphabet)

d_K	a_K
0	0
1	1

* **Codage binaire (antipolaire) :**

$a_K \in A = \{-1, 1\}$

d_K	a_K
0	-1
1	1

* **Codage M-aire (unipolaire) :**

$a_K \in A = \underbrace{\{0, 1, 2, \dots, M-1\}}_{M}$

d_K	a_K
00	0
01	1
11	2
10	3

* **Codage M-aire (antipolaire) :**

$a_K \in A = \{\underbrace{A_0, A_1, \dots, A_M}_{M}\}$

$A_i = 2i - M + 1$; $i = [0, M]$

d_K	a_K
00	0
01	1
11	2
10	3

* **Temps symbole :** $\boxed{T_S = n T_b}$ (s)

temps pour transmettre plusque 1 bit.

* **Temps binaire :** temps pour transmettre 1 bit. $\Rightarrow T_b$ (s)

* **la Valence :** nombre d'état de l'Alphabet (la taille) ; chaque symbole a_K prend une état (valeur, amplitude).

$\boxed{M = 2^n}$ / $\log_2 M = \frac{\log M}{\log 2}$

* **nombre de bits : (par symbole)**

$\Rightarrow$ si T_b : $n = 1$
$\Rightarrow$ si T_s : $\boxed{n = \log_2 M}$

* **débit binaire :**

$\boxed{D_b = f_b = \frac{1}{T_b}}$ (bit/s)

$\boxed{D_b = n \cdot R}$

* **Rapidité de modulation : (débit de Symbole)**

$\boxed{D_s = R = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{nT_b} = \frac{D_b}{n}}$ (bauds)

$\boxed{R_{max} = 2 \cdot BP}$

1 baud = 1 bit

* **Capacité de Canal :**

$\Rightarrow$ Théorème de Shannon : (ligne bruité)

$\boxed{C = D_{max} = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right)}$

$\boxed{C = n \cdot R_{max}}$ (bits/s)

$\Rightarrow$ Théorème de Nyquist : (ligne non bruité)

$\boxed{C = D_{max} = 2 \cdot B \cdot \log_2 M}$

$\boxed{C = D_{max} = \frac{R}{N} \log_2 M}$

$N = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{NRZ} \\ 2 \rightarrow \text{Manchester} \end{cases}$

fz.daham

* **Largeur de bande :** B
est l'occupation spectrale d'un signal.

$$B = \Delta f = f_2 - f_1 \quad (Hz)$$

* **Bande passante :** BP
est la plage de fréq. dans laquelle le canal est capable de transmettre un sgl.

* **Rapport Signal / Bruit :**

$RSB = \frac{P_S}{P_B}$	$SNR = \frac{S}{N}$

$\Rightarrow RSB_{dB} = 10 \log(RSB)$

$\Rightarrow RSB = 10^{RSB_{dB}/10}$

* **L'efficacité spectrale :**

$$\boxed{\eta = \frac{D_S}{\Delta f} = \frac{R}{\Delta f} = \frac{\log_2 M}{T_S \cdot \Delta f}}$$

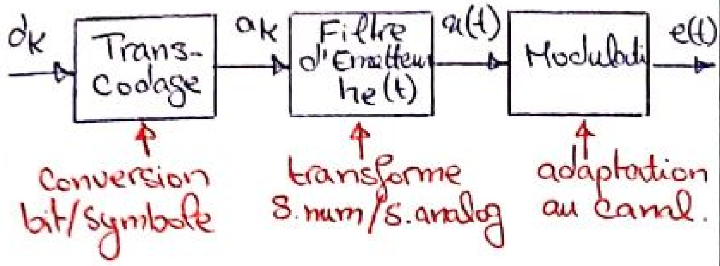
* **Codes en ligne :**

* NRZ : $h(t) = \{$

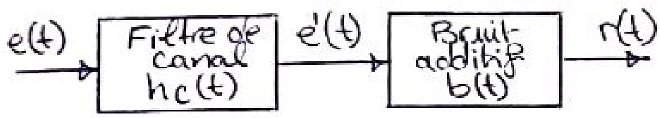
fz.daham

* Chaîne de Transmission :

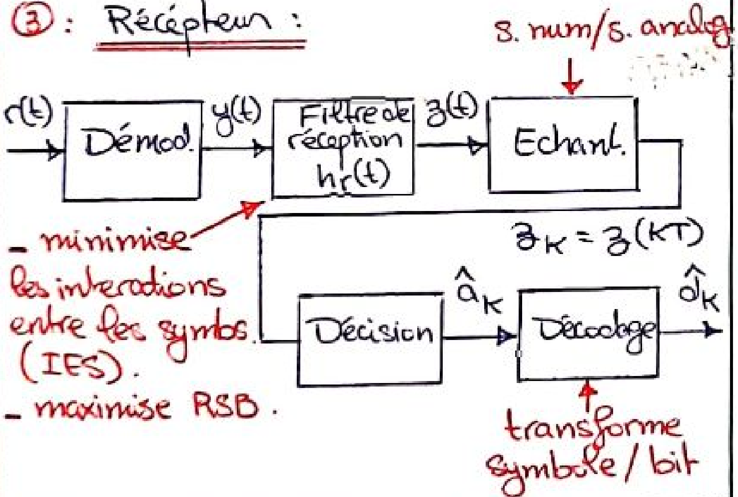
1 : Emetteur :



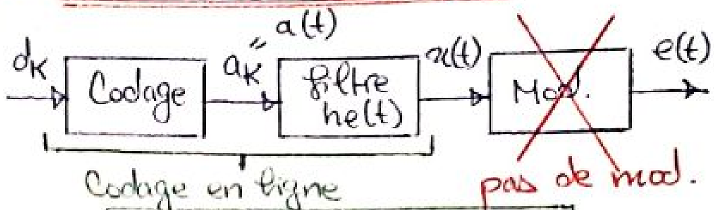
2 : Canal de transmission :



3 : Récepteur :



* Transmission en BdB :



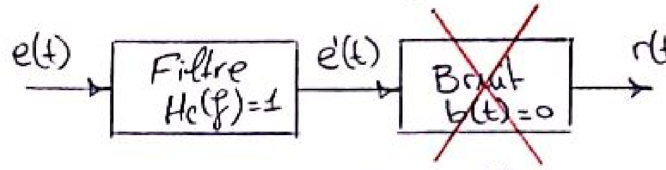
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sum_K a_K \cdot h_e(t-KT)}$$

$$e(t) = x(t) = a(t) * he(t)$$

* Transmission sans bruit :

→ absence de bruit : $b(t) = 0$

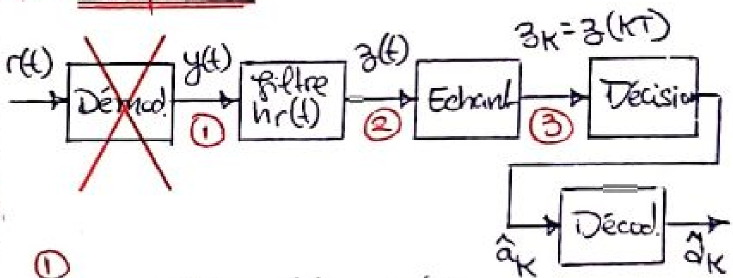
→ canal idéal : $Hc(f) = 1$, $BP = \infty$



$$\Rightarrow e(t) = x(t) = e'(t) = r(t)$$

$$\Rightarrow r(t) = x(t) = a(t) * he(t)$$

* Réception :



1 $\Rightarrow$ $y(t) = r(t) = x(t)$

$y(t) = a(t) * he(t)$

2 $\Rightarrow$ $z(t) = y(t) * h_r(t) =$

$= a(t) * \underbrace{h_e(t) * h_r(t)}_{h(t)}$

$z(t) = a(t) * h(t)$

$= \sum_K a_K \cdot \delta(t-KT) * h(t)$

$$\boxed{z(t) = \sum_K a_K \cdot h(t-KT)}$$

3 $\Rightarrow$ $z(KT) = z(t) \cdot \sum_K \delta(t-KT)$

$z(KT) = \sum_K a_K \cdot h(KT - K'T)$

si, $K = K'$

$$z(KT) = a_K \cdot h(0) + \underbrace{\sum_{K'} a_{K'} \cdot h((K-K')T)}$$

Interaction entre symboles ↗ IES = $h(KT)$

fz.daham

* Condition de Nyquist :

$$\begin{cases} h(KT) = 0 \ ; \ K \neq 0 \\ h(KT) = h(0) \cdot \delta(K) \ , \ h(0) \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Si le filtre de réception est de Nyquist : donc IES = 0

$$\Rightarrow \boxed{z_K = z(KT) = a_K \cdot h(0)}$$

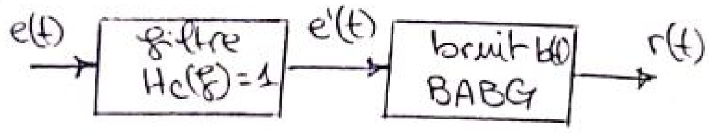
$\Rightarrow$ avec probabilité d'erreur :

$$\boxed{P_e = 0}$$

Car le décodage est :

$$\begin{cases} \hat{a}_K = a_K \\ \hat{d}_K = d_K \end{cases}$$

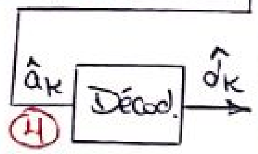
* Transmission avec bruit :



$$\Rightarrow e(t) = x(t) = e'(t)$$
$$e(t) = a(t) * h_e(t)$$

$$\Rightarrow r(t) = e'(t) + b(t)$$
$$= e(t) + b(t)$$
$$= x(t) + b(t)$$
$$r(t) = a(t) * h_e(t) + b(t)$$

* Réception :



① $\Rightarrow$
$$y(t) = r(t)$$
$$y(t) = x(t) + b(t)$$
$$= a(t) * h_e(t) + b(t)$$

② $\Rightarrow$
$$z(t) = y(t) * h_r(t)$$
$$= [a(t) * h_e(t) + b(t)] * h_r(t)$$
$$= a(t) * \underbrace{h_e(t) * h_r(t)}_{h(t)} + \underbrace{b(t) * h_r(t)}_{n(t)}$$

$$z(t) = a(t) * h(t) + n(t)$$
$$= \sum_K a_K \cdot h(t - KT) + n(t)$$

③ $\Rightarrow$
$$z(KT) = \sum_K a_K \cdot h(KT - K'T) + n(KT)$$
$$= a_K \cdot h(0) + \underbrace{\sum_{K' \neq K} a_{K'} \cdot h(KT - K'T)}_{IES} + \underbrace{n(KT)}_{bruit}$$

$z(KT) = a(KT) * h(KT) + n(KT)$

$\Rightarrow$ Conditions pour un récepteur optimal :

- minimum d'influence du bruit.
- IES doit être nulle.

①. pour minimiser l'influence du bruit $\rightarrow$ il faut maximiser le RSB :
pour maximiser le RSB, il faut choisir le filtre de réception $h_r(t)$ soit adapté à $h_e(t)$ [filtre d'émetteur] :

fz.daham

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} h_r(t) = h_e(-t) \\ H_r(f) = H_e^*(f) \end{array}} \Rightarrow \text{filtre de réception adapté (optimal)}$$

⇒ donc le RSB devient :

$$\boxed{RSB_{max} = \frac{2\,E_{he}}{N_0}}$$

E_{he} = l'énergie du filtre $h_e(t)$

N_0 =

②. pour IES soit nulle → il faut le filtre : $h(t) = h_e(t) * h_r(t)$ doit être un filtre de Nyquist :

$$\boxed{h(kT) = h(0).\,\delta(k)}$$

⇒ Si le support temporel de $h_e(t) < T$ et $h_r(t) = h_e(-t)$ ⇒ donc $h(t)$ est un filtre de Nyquist.

⇒ Si $H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$ ⇒ donc le filtre $H(f)$ est un filtre de Nyquist.

$$\Rightarrow h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t).\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) * h_r(t).\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) * h_e(t).\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(f).\,H_e^*(f).\,df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2.\,df$$

$\boxed{h(0) = E_{he}}$ avec : IES = 0

⇒ donc dans le récepteur optimal :

$$\boxed{z_k = z(kT) = a_k.\,E_{he} + n(kT)}$$

① ⇒ Décision : (si le codage unipolaire)

Exp : $z_0 = 1{,}26\,E_{he}$, $z_1 = -0{,}34\,E_{he}$

$z_0 \to \hat{a}_0 = 1$, $z_1 \to \hat{a}_1 = 0$

→ on prend le nombre avant la virgule.

→ on trouve nombre après la virgule

à cause de bruit.

*** Décision par seuil :**

pour décider la valeur de symbole :

⇒ Codage binaire : (M=2)

(si le codage antipolaire [$a_k \in -1$ ou 1] et équiprobable : $p = \frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } z_k > 0 \Rightarrow \hat{a}_k = 1 \\ \text{si } z_k < 0 \Rightarrow \hat{a}_k = -1 \end{cases}$$

⇒ Codage M-aire : (M>2)

on calcul : $\frac{z_k}{E_{he}}$ et on choisi le plus proche

Exp : $M = 4$, $A = \{-3, -1, 1, 3\}$

$\frac{z_k}{E_{he}}$ =	1,56	3,82	2,10	−2,10
	↓	↓	↓	↓
	1	3	3	−3

*** Energie totale du signal en BdB :**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2.\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_k a_k.\,h_e(t-kT)\Big|^2.\,dt$$
$$= \sum_k |a_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |h_e(t-kT)|^2.\,dt$$

$$\boxed{E_x = \sum_k |a_k|^2.\,E_{he}}$$

*** Energie moyenne par symbole :** élément binaire "

①. Energie d'émission d'un seul symbole :

a_0 : symbole fixé. ⇒ $x(t) = a_0.\,h_e(t - 0T)$

$$E_{a_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |a_0.\,h_e(t)|^2.\,dt$$
$$= |a_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |h_e(t)|^2.\,dt$$

$$\boxed{E_{a_0} = |a_0|^2.\,E_{he}}$$

fz.daham

(2). Energie moyenne par symbole a_K:

si tous les symboles a_K sont : équiprobables.

$$E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_{K=1}^{M} E_{a_K}$$

$$\boxed{E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_{K=1}^{M} |a_K|^2 E_{he}}$$

$E_{a_K} = |a_K|^2 . E_{he}$

$$\boxed{E_{sym} = (\sigma_a^2 + |m_a|^2) E_{he}}$$

σ_a : la variance

m_a : la moyenne

* Energie moyenne par bit :

$$\boxed{E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{3\log_2 M} E_{he}}$$

$$E_{bit} = \frac{P_x}{D_b}$$

* Puissance émise moyenne (totale) :

est la puissance nécessaire pour envoyer un signal en BdB :

$$\boxed{P_x = \frac{E_{sym}}{T_s} = \frac{E_{bit}}{T_b}}$$

$$\boxed{P_x = \underset{R''}{D_{sym}} . E_{sym} = D_b . E_{bit}}$$

* Bruit :

→ DSP du bruit : $S_{br}(f) = \sigma_{br}^2$

la DSP de bruit est constante.

→ Puissance moyenne totale de bruit :

$$\boxed{P_{br} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{br}(f) . df = +\infty}$$

le bruit n'existe pas en réalité physique.

→ DSP :

$$\boxed{S_{br}(f) = \sigma_{br}^2 = \frac{N_0}{2}}$$

$$\begin{cases} m_{br} = 0 \\ \sigma_{br}^2 = \frac{N_0}{2} \end{cases}$$

N_0 :

$$\boxed{N_0 = K . T_0 . B} \rightarrow \text{puissance de bruit thermique}$$

$K = 1,381 . 10^{-23}$ J/K (cst de Boltzman)

$T_0 = 290$ K

→ Puissance de bruit :

$$P_n = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 . df = \frac{N_0}{2} E_{he} = \sigma_n^2$$

fz.daham

* Performances : Evaluation d'une chaine de transmission.

①. * Probabilité d'erreur par symbole :

⇒ pour $M = 2$: $P^{err}_{sym} = p(\hat{a}_K \neq a_K)$

$$\boxed{P^{err}_{sym} = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_{he}}{N_0}}\right)}$$

⇒ pour M-aire :

$$\boxed{P^{err}_{sym} = 2 . \frac{M-1}{M} \text{ erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_{he}}{N_0}}\right)}$$

avec : $\boxed{E_{he} = E_{bit} \frac{3 \log_2 M}{M^2-1}}$

(M-aire) E_{bit} من علاقة

$$\Rightarrow \boxed{P^{err}_{sym} = 2 . \frac{M-1}{M} \text{ erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)}$$

* Probabilité d'erreur par bit :

$$P^{err}_{bit} = p(\hat{d}_K \neq d_K)$$

$$\boxed{P^{err}_{bit} = \frac{P^{err}_{sym}}{\log_2 M}}$$

②. * Efficacité spectrale :

$$(\text{bit/s/Hz}) \quad \boxed{\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{n . R}{B} = \frac{\log_2 M}{T_s . B}}$$

③. Taux d'erreurs binaire :

$$\boxed{TEB = \frac{\text{Nbr de bits erronés}}{\text{Nbr de bits totale émis}}} = \frac{n'}{N}$$

⇒ si $(N \to \infty)$ ⇒ $TEB = P^{err}_{bit}$.

* Largeur de bande en BdB :

⇒ Filtre NRZ : $B = \frac{1}{T}$

⇒ " RZ : $B = \frac{2}{T}$

⇒ " Manchester : $B = \frac{2}{T}$

⇒ " racine : $B = \frac{1+\beta}{2T}$

⇒ bande Nyquist minimale : $B = \frac{1}{2T}$

* Bande passante du canal réel :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & ; f \in [-BP, BP] \\ 0 & ; \text{ailleurs} . \end{cases}$$

⇒ $B = BP$ (ceci ce qu'on veut)

* si $B > BP$ ⇒ l'info perdue.

قابلية / معرضة

* si $B < BP$ ⇒ il y a tendance à être plus sensible au bruit .

fz.daham