Corigé type de Math3

**Exercice1: (4pts)**

a) pour $\sum_{n\geq 1}\frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ on pose $u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \underset{n+\infty}{\backsimeq} \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n$ <<ou bien $\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n\right)$ >>la série de terme général $v_n$ est une série de Riemann <<$\alpha = \frac{1}{2} < 1$ >> donc diverge, par conséquent $\sum_{n\geq 1}\frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ diverge. **(1.pt)**

b) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ on pose $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ comme $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f = 0 \text{ et} \\ la \text{ fonction } f \text{ est décroissante}\end{cases}$ *alors* d'aprés le critère de comparison avec intégral on déduit que $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ et $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ ont méme nature.de plus $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x\}_2^\infty = +\infty$ donc $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ diverge **(1pt)**.

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n}}{n^n n!}$, posant $u_n = \frac{e^{-n}}{n^n n!}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-n-1}}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}\frac{n^n n!}{e^{-n}} = \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \underset{n\infty}{\backsimeq} \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}e^{-\frac{n}{n+1}}$ donc on conclu que $\lim_{n\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ alors d'aprés le critère de D'alembert on déduit que la série en question converge **(2pts)**.

**Exercice2 (8pts)**

$f(t) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{\alpha} & \text{si } |t| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha \leq |t| \leq \pi \end{cases}$. Il est claire que $f$ est pair donc

$$b_n = 0. \qquad \textbf{(1pt)}$$

reste à calculer les $a_n.n \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{\pi}. \qquad \textbf{(1pt)}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\cos nt dt \overset{n\geq 1}{=} \frac{2}{n\pi}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)d(\sin nt) =$$
$$\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^{\alpha}\sin nt dt = \frac{2}{n^2\pi\alpha}(1-\cos n\alpha) \quad \textbf{(2pts)}$$

donc la série de Fourier associée à $f$ est

$$\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{2}{\pi\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos n\alpha}{n^2}\cos nt.$$

2)a) comme la fonction $f$ est continue, de classe $C^1$ par morçeaux sur $\mathbb{R}$ << claire>>, alors pour $t = 0 \in [-\alpha, \alpha]$, on a $\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{2}{\pi\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos n\alpha}{n^2} = f(0) = 1$ ce qui nous donnne

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4}, \quad 0 < \alpha \leq \pi. \qquad (1)$$

de (1), on tire $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4}$ et comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. alors

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi. \qquad \textbf{(1pt)} \qquad (2)$$

donc d'aprés l'unicité des coeffiçients de Fourier, l'égalité (2) donne le développement en série de Fourier en cosinus de la fonction $g(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4}$ sur $(0,\pi)$ càd.la série de Fourier en cosinus de la fonction $g$ est

$$g(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \simeq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\alpha}{n^2} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi \qquad \textbf{(2pt)} \ (3)$$

b) de (3) on remplace $\alpha$ par $\frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$ on obtient $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{16} = \frac{-2}{96}\pi^2 \Longrightarrow$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \textbf{(1pt)}$$

**Exercice3** **(9pts)**

1) Trouver l'image par la transformé de Laplace de:

**Exercice3** **(9pts)**

1) Trouver l'image par la transformé de Laplace de:

a) Par définition $L\left(f_1(t)\right)(s)=\int_0^{+\infty}\left(\cos 2t+\sin 2t\right)^2 e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\left(1+2\cos 2t\sin 2t\right)e^{-st}dt$ $\int_0^{+\infty}\left(1+\sin 4t\right)e^{-st}dt=L(1)(s)+L(\sin 4t)(s)\overset{\operatorname{Re}s>0}{=}\dfrac{1}{s}+\dfrac{4}{s^2+16}$ donc

$$\left(\cos 2t+\sin 2t\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{s}+\frac{4}{s^2+16} \qquad \operatorname{Re}s>0 \qquad \textbf{(1pt)}$$

b) $\mathrm{L}f_2(t)(s)=\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(\alpha t+\beta)\times\sin(\alpha t+\beta)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(2\alpha t+2\beta)}{2}e^{-t(s+a)}dt.=$ $\dfrac{1}{2}L\left(\sin(2\alpha t+2\beta)\right)(s+a)$ donc

$$Lf_2(t)(s)=\frac{1}{2}\left(\sin 2\beta Le^{-at}\left[\cos 2\alpha t+\cos 2\beta Le^{-at}\sin 2\alpha t\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2\beta\times\frac{s+a}{(s+a)^2+4\alpha^2}+\cos(2\beta)\times\frac{\omega}{(s+a)^2+4\alpha^2}\right] \qquad \operatorname{Re}(s+a)>0 \qquad \textbf{(2pts}$$

2) Trouver l'origine <<l'inverse>> de :

a) $F_1(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}$;

comme $G(s)=\dfrac{1}{s+1}\longleftrightarrow e^{-t}$ alors $G'(s)=\dfrac{-1}{(s+1)^2}\longleftrightarrow -te^{-t}$ donc

$G''(s)=\dfrac{2}{(s+1)^3}\longleftrightarrow t^2e^{-t}\Longrightarrow F_1(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}\longleftrightarrow\dfrac{t^2e^{-t}}{2}.$ $\quad\operatorname{Re}s>-1$

**(1.5pts)**

b) $F_2(s)=\dfrac{s+3}{(s^2+s+1)(s+1)^3}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{3}{(s+1)^2}+\dfrac{2}{(s+1)^3}-\dfrac{s+3}{s^2+s+1}$

d'aprés a) il suffit de trouver l'inverse de $\dfrac{s+3}{s^2+s+1}$ cette fernière peut s'écrire sous la forme $\dfrac{s+3}{s^2+s+1}=\dfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\longleftrightarrow$ $e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ *.alors* l'image de $F_2(s)$ *est.*

$$F_2(s)\longleftrightarrow\left(1+3t+t^2\right)e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \qquad \textbf{(1.5pts)}$$