Cours de Traitement Du Signal - Filtrage linéaire

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

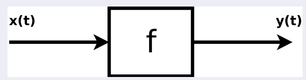
21 novembre 2007

Plan du cours

Objectifs

- Rappels sur les SLI
- Définition du filtrage analogique
- Définition du gabarit
- Etudes des filtres classiques d'ordre N
- Stabilité des filtres analogiques
- Retard dans les filtres analogiques

Notion de système



- Caractérisé par sa loi E/S :
- $y(t) = f[x(t)]$

Linéarité

Le système est linéaire $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \forall \lambda, \beta \in R$:

$$f[\lambda . x_1(t) + \beta . x_2(t)] = \lambda . f[x_1(t)] + \beta . f[x_2(t)]$$

Invariance

Le système est invariant $\Leftrightarrow \forall t_0 \in R$:

$$y(t) = f[x(t)] \Rightarrow f[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

Causalité

Le système est causal $\Leftrightarrow \forall x(t)$ signal causal , alors la réponse $y(t) = f[x(t)]$ est causale.

Filtre linéaire

- Un filtre linéaire est un Système Linéaire Invariant
- Pour les signaux fonction du temps, seuls les filtres causaux sont implémentables en temps réel.

Convolution : rappel

Définition

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . y(t - \tau) \, d\tau$$

Propriétés

- Commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Distributivité :
  $x(t) * [y_1(t) + y_2(t)] = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t)$
- Elément neutre : $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- Décalage : $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- Transformée de Laplace :
  $$TL[x(t) * y(t)] = TL[x(t)] . TL[y(t)]$$

Convolution et filtrage

Réponse impulsionnelle

Définition : signal réponse d'un système à une impulsion infiniment brève (Dirac)

$$h(t) = f[\delta(t)]$$

Système de convolution

Relation entre l'entrée causal d'un système et sa sortie sous forme d'un produit de convolution :

$$y(t) = x * h(t)$$

Fonction de transfert

- Calcul de la TL de part et d'autre du système :
  $$TL[y(t)] = TL[x * h(t)]$$
- Application des propriétés de la TL et de la convolution :
  $$Y(p) = H(p) . X(p)$$
- $H(p) =$ fonction de transfert du système
- Application : calcul de fonction de transfert globale

Gain complexe

- Calcul de la TF de part et d'autre du système :
  $$Y(f) = H(f) . X(f)$$
- Caractérisation fréquentielle de la réponse du filtre
- Calcul de $H(f)$ à partir de $H(p)$ pour $p = 2j\pi.f$

Introduction au filtrage

Filtrage analogique

- Objectif = extraire l'information pertinente d'un signal
- Suppression de l'information indésirable (bruit...)
- Hypothèse : bandes de fréquences composantes recherchées/composantes indésirables disjointes
- Filtre analogique = SLI caractérisé par $H(p)$
- Conception du filtre $\Rightarrow$ spécification du gabarit

Filtrage idéal

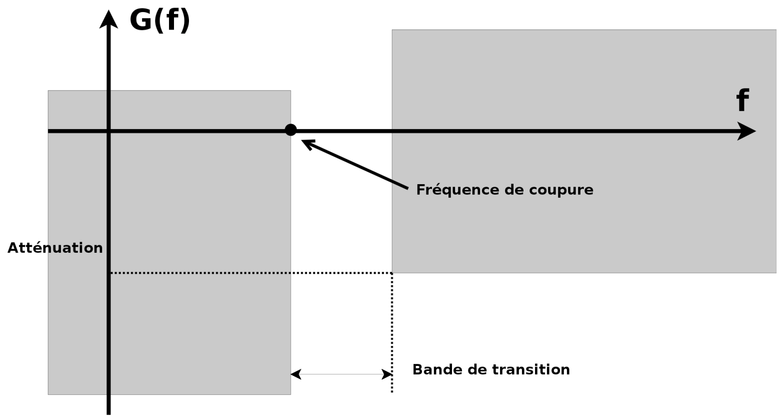
- Filtres idéaux : passe bas, passe haut, passe bande...
- Fréquence de coupure, bande passante...
- Filtres idéaux non réalisables

Définition de gabarit

Définition

- Fréquence(s) de coupure (-3dB) : $\frac{|H(f_c)|}{Max\{|H(f)|\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Gain en BP (souvent $A \simeq 1$ soit $G \simeq 0dB$)
- Atténuation(s) en bande(s) coupée(s) (-30dB à -90dB)
- Largeur de la (des) bande(s) de transition
- Oscillations...

Exemple de gabarit



Filtre d'ordre N

Définition

$$H_N(p) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i.p^i}{\Pi_{i=1}^{N}(1+\tau_i.p)}$$

Propriétés

- Seuls les coefficients du numérateur définissent la nature du filtre
- Les coefficients sont définis à partir du gabarit
- En pratique N = 1 ou 2

Diagramme de Bode : rappel

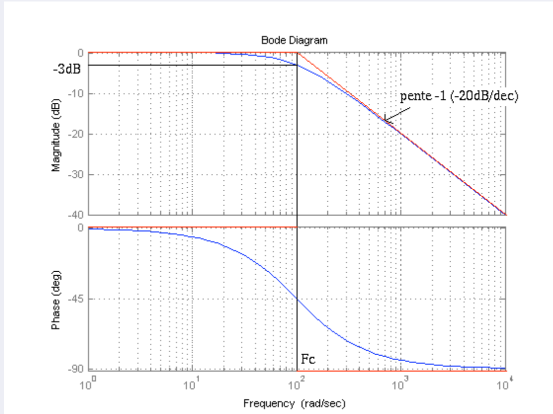
Définition

- Calcul du gain complexe pour $p = j.\omega$
- Diagramme de Bode du gain complexe :
  - Courbe $G = 20.log\left(\left|H\left(\omega\right)\right|\right)$ en fonction de ω ou f en échelle logarithmique
  - Courbe $Phase\left(H\left(\omega\right)\right)$ en fonction de ω ou f en échelle logarithmique

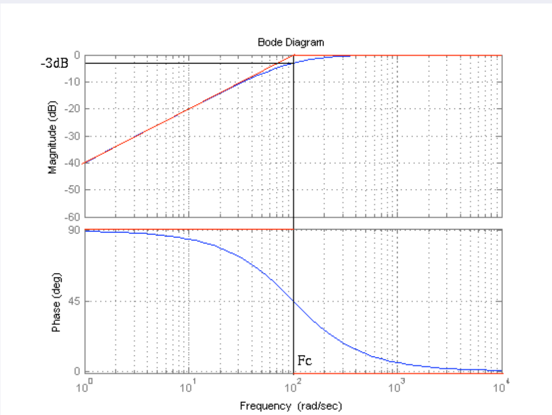
Propriétés

- Modification de l'amplitude par K de la réponse du système $\Rightarrow$ translation de $20.log\left(K\right)$ du gain
- Tracé logarithmique $\Rightarrow$ mise en évidence d'asymptotes
- Décomposition de la fonction de transfert

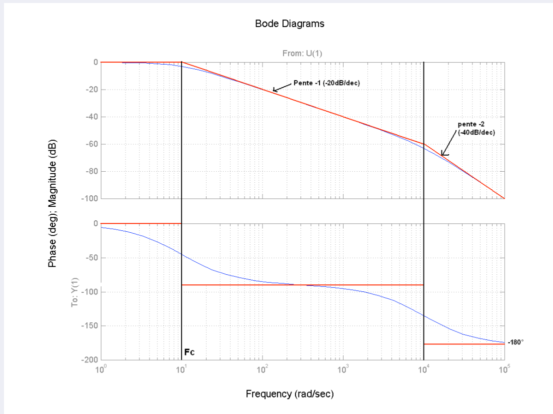
Passe bas d'ordre 1 : $H\left(p\right) = \frac{1}{1+\tau.p}$



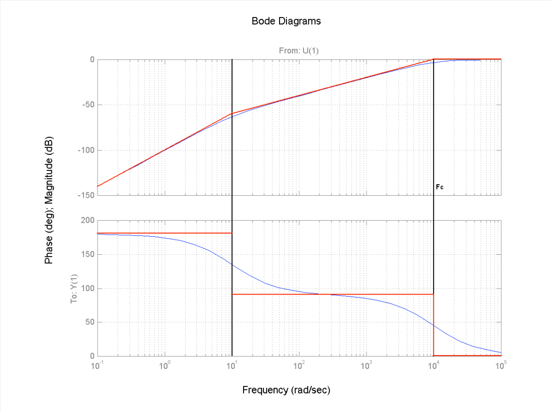
Passe haut d'ordre 1 : $H\left(p\right) = \frac{\tau.p}{1+\tau.p}$



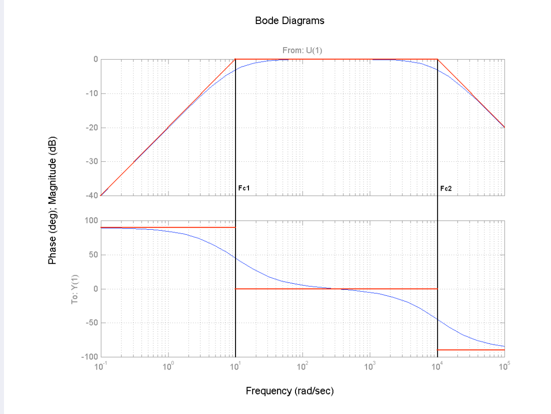
Passe bas d'ordre 2 : $H\left(p\right) = \frac{1}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$



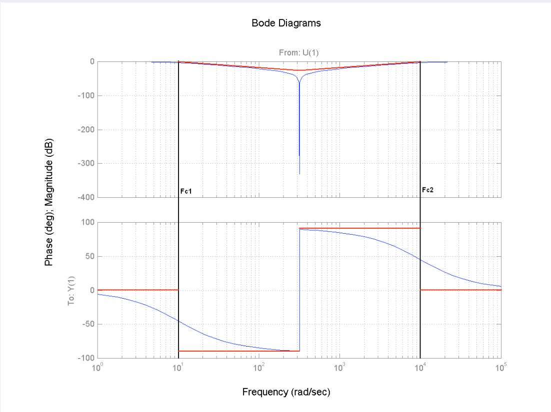
Passe haut d'ordre 2 : $H(p) = \frac{\tau_1.\tau_2.p^2}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}$



Passe bande d'ordre 2 : $H(p) = \frac{(\tau_1+\tau_2).p}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$



Coupe bande d'ordre 2 : $H(p) = \frac{1+\tau_1.\tau_2.p^2}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$



Définition

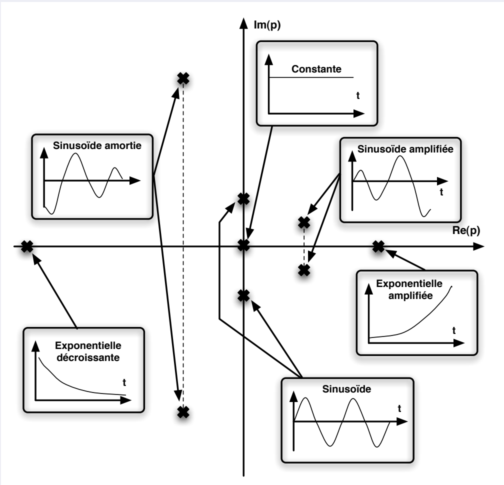
- Domaine temporel : stabilité EBSB
- Condition nécessaire et suffisante sur la réponse impulsionnelle :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

Conséquences sur la FT

- Si on connait la fonction de transfert $H(p)$: Le système est stable $\Leftrightarrow$ les pôles de $H(p)$ sont à partie réelles strictement négatives
- Domaine de stabilité = demi-plan "gauche"
- Pour les filtres d'ordre 1 et 2, CNS : tous les coefficients du polynôme du dénominateur sont de même signe

Etude du plan de Nyquist



Filtre réalisable

Définition

- Un filtre est réalisable et implémentable en temps réel $\Leftrightarrow$
  1. il est stable
  2. il est causal

Conséquence sur le signal de sortie

$$\forall x(t)\,,\ \text{signal causal } y(t) = \int_0^t h(t-\tau).x(\tau)\,d\tau$$

Remarque

- Un filtre idéal n'est pas réalisable

Définition

- Soit la FT d'un filtre : $H(f) = |H(f)|.e^{j\Phi(f)}$
- La phase de la FT du filtre détermine les retards du signal de sortie et on définit :
  - le retard de phase : $t_\phi(f_0) = -\frac{\phi(f_0)}{2.\pi.f_0}$
  - le retard de groupe : $t_g(f_0) = -\frac{1}{2.\pi}.\left[\frac{d\Phi(f)}{df}\right]_{f=f_0}$

Filtre à phase linéaire

- Pour les filtres à phase linéaire, les retards de phase et de groupe ne dépendent pas de la fréquence
- Le signal de sortie est seulement retardé : pas de distorsion due à la phase

Application à la modulation d'amplitude

Soit le signal modulé : $x(t) = a(t).cos(\omega_0.t)$ avec
$a(t) = A.cos(\omega_1.t)$
La sortie du système est :

$$y(t) = |H(f_0)|.a(t - t_g(f_0)).cos(\omega_0.(t - t_\phi(f_0)))$$