

Caractéristiques d'antenne

1 Introduction

Une antenne est un élément passif permettant le transfert de l'énergie électrique (au sens large) vers l'énergie électromagnétique ou vice-versa.

- L'antenne émettrice tire sa puissance de l'émetteur qui l'alimente, étant vue comme une charge.
- L'antenne réceptrice fournit la puissance captée au récepteur, agissant comme une source avec sa propre impédance interne.

En théorie cependant, on préfère supposer une source courant à l'émission et une source tension à la réception, même si émission et réception sont liées à des phénomènes semblables au point de vue antenne selon le théorème de réciprocité (qui sera discuté plus loin).

En vertu du théorème de réciprocité, on choisit la configuration émettrice ou réceptrice de l'antenne qui facilite la compréhension et/ou les calculs.

2 Impédance

Pour évaluer l'impédance d'une antenne, on assume une antenne en émission. L'antenne est alors considérée comme une charge à l'entrée de laquelle existe un courant \bar{I}_{in} et une tension \bar{V}_{in} . Le rapport de ces deux quantités fournit l'impédance \bar{Z}_{in} (ou mieux encore, \bar{Z}_a) :

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{V}_{in}}{\bar{I}_{in}} = R_a + jX_a \quad (1)$$

On considère simplement l'antenne comme un circuit électrique ayant cette même impédance lors des calculs de transfert de puissance.

Cela semble facile mais l'impédance que présentent les antennes est une fonction complexe et ce, même pour les structures les plus simples. Comme toute impédance, celle de l'antenne comprend une partie réelle R_a (active) et une partie imaginaire X_a (réactive) telles que :

- la partie réactive est due aux champs d'induction au voisinage de l'antenne; elle est capacitive pour les antennes électriquement courtes – un peu comme l'impédance vue près d'un circuit ouvert en régime sinusoïdal permanent – autrement, elle est inductive ou capacitive;
- la partie active est reliée aux champs rayonnés et aux pertes joules.

2.1 Résistance de rayonnement

Pour les antennes, la puissance totale émise $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ est reliée au courant crête¹ \bar{I}_{in} mesuré à l'entrée de l'antenne via la résistance de rayonnement vue à l'entrée R_{ri} qui n'est pas une résistance dissipative physique :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} R_{ri} I_{in}^2. \quad (2)$$

Cette résistance s'ajoute à celle des pertes joules (ou pertes en général) pour former la partie réelle de l'impédance de l'antenne :

$$R_a = R_{ri} + R_{pertes}. \quad (3)$$

R_{pertes} est la résistance qui provoque :

- les pertes ohmiques ou thermiques R_{ohm} ;
- les pertes dans le diélectrique R_{die} ;
- les pertes de retour (conductivité du sol) pour les monopôles R_{sol} .

La résistance R_{ri} est la responsable du rayonnement de l'antenne, car sans elle aucune puissance active fournie à l'antenne n'est émise. On a donc intérêt à l'avoir la plus élevée possible pour accroître l'importance des champs rayonnés.

Le symbole R_r est réservé à la résistance de rayonnement, laquelle est calculée à partir de l'amplitude maximale de la distribution du courant sur l'antenne :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} R_r I_{max}^2. \quad (4)$$

Si l'amplitude maximale se situe au niveau des bornes, alors $R_r = R_{ri}$.

Exercice 1

Un dipôle est formé de deux fils opposés se connectant sur chacun des conducteurs d'une ligne de transmission. La résistance de rayonnement à l'entrée d'un dipôle court de longueur totale h (au sens électrique i.e. $h \ll \lambda$) s'exprime ainsi :

$$R_{rid-court} \approx 20\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2.$$

Cependant, lorsque le dipôle atteint une longueur totale de $\lambda/2$ – appelé dipôle demi-onde – la résistance de rayonnement à l'entrée vaut environ 75Ω .

¹En utilisant le courant efficace $I_{rms} = I_{crête}/\sqrt{2}$, on obtient $\langle \mathcal{P}_t \rangle = R_{ri} I_{rms}^2$.

Un dipôle d'une longueur de 1.5 m émet une puissance totale de 1 W.

- Estimez l'amplitude du courant d'entrée aux fréquences de 100 MHz (FM commercial) et 1 MHz (AM commercial).

La puissance émise dépend du courant à l'entrée et de la résistance de rayonnement à l'entrée selon (2) :

$$I_{in} = \sqrt{\frac{\langle 2\mathcal{P}_t \rangle}{R_{ri}}}.$$

Il faut donc évaluer R_{ri} avant toute chose. Or, pour un dipôle, il faut connaître le rapport h/λ :

$$\begin{aligned} (h/\lambda)_{100\text{ MHz}} &= (1.5/3) = 0.5 \\ (h/\lambda)_{1\text{ MHz}} &= (1.5/300) = 0.005 \end{aligned}$$

Le dipôle correspond à un dipôle demi-onde à 100 MHz :

$$(I_{in})_{100\text{ MHz}} = \sqrt{2/75} = 0.1633\text{ A}.$$

Par contre, le dipôle correspond à un dipôle court à 1 MHz :

$$\begin{aligned} (R_{ri})_{1\text{ MHz}} &= 20\pi^2(0.005)^2 = 4.935 \times 10^{-3}\ \Omega \\ (I_{in})_{1\text{ MHz}} &= \sqrt{2/4.935 \times 10^{-3}} = 20.13\text{ A} ! \end{aligned}$$

2.2 Circuit avec antenne

Pour permettre un transfert maximal de puissance, on adapte l'émetteur ou le récepteur selon la configuration émettrice ou réceptrice respectivement à la fréquence centrale d'opération f_c . La figure 2.1 montre le circuit équivalent de la source ou récepteur adapté à l'antenne. La syntonisation consiste simplement à l'ajustement d'un circuit d'adaptation jusqu'à ce qu'il forme un circuit résonnant avec \bar{Z}_a à la fréquence f_c . Pour ce faire, il faut que l'impédance d'entrée de l'antenne soit égale au conjugué de celle de l'émetteur/récepteur avec circuit d'adaptation telle que vue aux bornes de l'antenne.

Ainsi :

- les parties réelles de l'antenne et du circuit complet émetteur/récepteur/adaptation sont identiques ;
- la partie imaginaire de \bar{Z}_a est ajustée pour annuler celle de sortie de l'émetteur/récepteur avec circuit d'adaptation à la fréquence d'opération.

On note que pour un système adapté, la tension crête au récepteur V_r vaut la moitié de celle induite avec circuit ouvert V_{co} , soit celle mesurée aux bornes de l'antenne réceptrice non reliée à un récepteur. En conséquence, lorsque les pertes sont négligeables, la puissance reçue $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ s'exprime :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{V_{co}^2}{8R_{ri}} \quad (5)$$

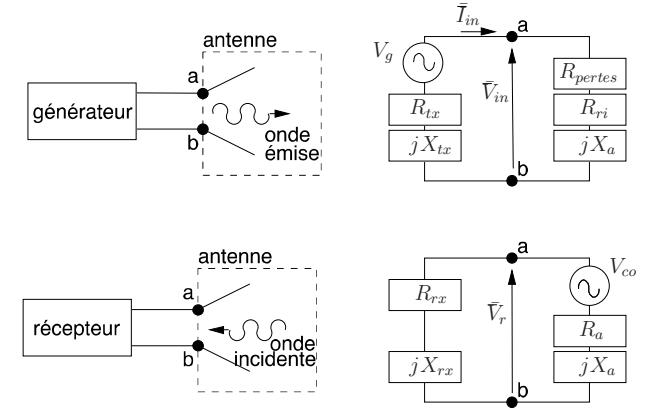


FIGURE 1 – Circuit équivalent émission ou réception.

2.3 Efficacité de rayonnement

Comme dans tout circuit à pertes, une fraction plus ou moins appréciable de la puissance fournie se retrouve à la sortie. Dans le cas d'une antenne, la sortie représente l'émission ; les pertes sont liées à la résistance de pertes. Plus faible est la résistance de pertes, meilleure est l'efficacité. L'efficacité de rayonnement de l'antenne qu'on note par ε_r considère le rapport de la puissance rayonnée $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ à la puissance fournie à l'entrée de l'antenne $\langle \mathcal{P}_{in} \rangle$:

$$\varepsilon_r = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_{in} \rangle} = \frac{R_{ri}}{R_{ri} + R_{pertes}} \quad (6)$$

3 Intensité de rayonnement

L'onde électromagnétique rayonnée à distance suffisante de l'antenne se comporte comme une onde plane i.e. le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation de l'onde (celle-ci s'éloigne de l'antenne qui en est la source). Les concepts de l'onde plane peuvent donc être appliqués ici.

Or, on sait que le vecteur de *Poynting* \mathbf{P} indique la quantité de puissance électromagnétique instantanée qui se propage par unité de surface. Pour connaître la densité de puissance en moyenne dans le temps, il faut réaliser :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{P} dt = \text{Re} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*}_{\bar{\mathbf{P}}} \right\}. \quad (7)$$

On obtient alors la densité de puissance moyenne $\langle \mathbf{P} \rangle$. Le nouveau vecteur $\bar{\mathbf{P}}$ est appelé vecteur complexe de *Poynting*. Comme l'antenne a la propriété de concentrer la puissance émise dans une ou des directions privilégiées de manière similaire à une lentille, cette densité de puissance obtenue du vecteur de *Poynting* moyen varie selon la direction

d'observation² Ψ . Dans le système de coordonnées sphériques Ψ correspond à la paire (θ, ϕ) , on écrit $\langle \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{P}(r, \theta, \phi) \rangle$, donc $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi)$.

Dans un milieu uniforme, la vitesse de propagation est indépendante de la direction. Ainsi, l'onde électromagnétique rayonnée par une antenne possède des fronts d'ondes sphériques centrés sur l'antenne émettrice (le rayon de la sphère correspondant à un front d'onde particulier correspond à la vitesse de propagation multipliée par le temps depuis son émission par l'antenne). La figure 2 illustre un front d'onde issu de l'antenne. Ce front s'éloigne avec une vitesse uniforme de l'antenne ce qui fait que le rayon de la sphère croît avec le temps. Il ne faut pas oublier que l'intégrale du vecteur de *Poynting* moyen sur une surface fermée donne la puissance émanant du volume délimité par la surface en supposant aucune perte dans le milieu de propagation. La densité de puissance, quant à elle, diminuera donc selon l'inverse de la surface de la sphère soit en $1/r^2$.

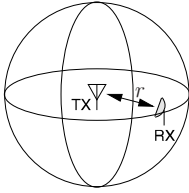


FIGURE 2 – Émission en espace libre.

La distance r à laquelle sont effectuées les mesures est donc un paramètre qui influence la valeur de $\langle \mathbf{P}(r) \rangle$. Pour obtenir une quantité indépendante de la distance, on utilise le concept d'angle solide dont les unités sont les stéradians ou *sr*. L'angle solide Ω est formé par le rapport de la surface S sur une sphère sous-tendue par l'angle solide au rayon au carré de cette sphère (3) :

$$\Omega = \frac{S}{r^2}. \quad (8)$$

Il y a donc 4π surfaces de r^2 mètres carrés dans une sphère de rayon r , donc 4π *sr* pour l'angle solide de la sphère complète, 2π *sr* pour l'hémisphère, etc.

On définit alors l'intensité de rayonnement K en W/sr , laquelle est indépendante de r mais varie selon la direction donnée :

$$K(\theta, \phi) = \langle P(r, \theta, \phi) \rangle r^2 = \frac{E^2(r, \theta, \phi)}{2\eta_0} r^2 = \frac{E_\theta^2(r, \theta, \phi) + E_\phi^2(r, \theta, \phi)}{2\eta_0} r^2. \quad (9)$$

Il est possible d'obtenir la puissance totale émise $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ en intégrant $K(\theta, \phi)$ sur les 4π *sr*. Cela découle directement de l'intégrale du produit scalaire de la densité de puissance sur une surface fermée; en choisissant une sphère, on maximise le produit scalaire en tout

²On utilise la notation Ψ pour faire référence à une direction.

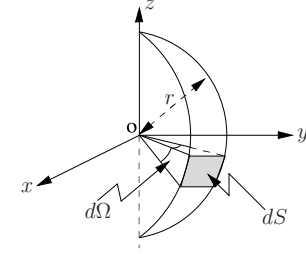


FIGURE 3 – Définition de l'angle solide.

point car $\langle \mathbf{P} \rangle = \langle P_r \rangle \mathbf{a}_r$ et $d\mathbf{S} = dS \mathbf{a}_r$. Donc :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \oint_S \langle \mathbf{P}(r, \theta, \phi) \rangle \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \langle P(r, \theta, \phi) \rangle dS \quad (10)$$

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \oint_{4\pi} K(\theta, \phi) d\Omega \quad (11)$$

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

Une correspondance directe peut être établie entre ces notions de puissance, densité de puissance et intensité avec celles reliées à la lumière. En effet, la puissance émise correspond au flux lumineux en *lumen* émis par un appareil d'éclairage, la densité de puissance à l'éclairement lumineux en *lux*, tandis que l'intensité correspond à l'intensité lumineuse qui s'exprime dans l'unité SI de base, la *candela*.

4 Diagramme de rayonnement

Si l'antenne apparaît comme un circuit passif à deux bornes ayant une impédance d'entrée, elle est caractérisée dans l'espace par les diagrammes de rayonnement impliquant les champs électromagnétiques rayonnés.

Les diagrammes de rayonnement montrent en coordonnées tridimensionnelles la variation des champs ou celle de la densité de puissance à une distance fixe r dans les directions (θ, ϕ) . Cela revient à tracer la variation de l'intensité de rayonnement. Ainsi, les diagrammes sont et doivent être indépendants de la distance, mais ils dépendent uniquement de la direction $\Psi = (\theta, \phi)$ appelée direction d'observation.

Pour complètement spécifier le rayonnement, il faudrait théoriquement les trois diagrammes suivants :

- la composante θ du champ électrique à une distance fixe r_o , $E_\theta(r_o, \theta, \phi)$;
- la composante ϕ du champ électrique à une distance fixe r_o , $E_\phi(r_o, \theta, \phi)$;
- la phase de ces composantes à cette distance fixe r_o , $\angle \bar{E}_\theta(r_o, \theta, \phi)$ et $\angle \bar{E}_\phi(r_o, \theta, \phi)$.

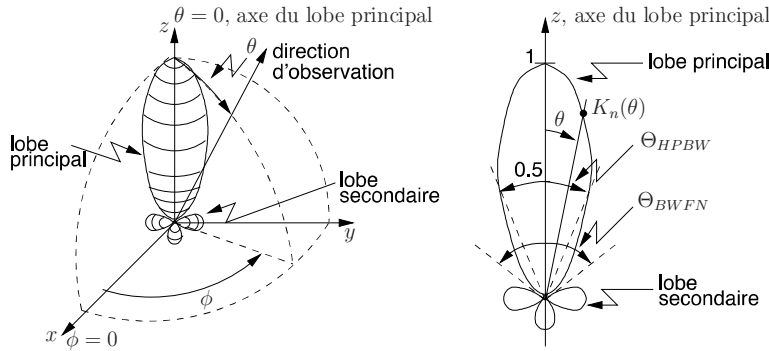


FIGURE 4 – Diagramme de rayonnement typique.

Sans tenir compte de la polarisation, on n'utilise que celui représentant le module du champ électrique total assimilant le champ électrique à une quantité scalaire. L'échelle peut alors être linéaire (en V/m) ou logarithmique (en dB). Cependant, il est commode de tracer le diagramme après normalisation, ce qui est appelé fonction caractéristique de rayonnement de l'antenne³ $F_a(\theta, \phi)$. Cette fonction, obtenue en divisant $E(\theta, \phi)$ par sa valeur maximale, ne fait intervenir que les variables angulaires :

$$F_a(\theta, \phi) = \frac{E(r_o, \theta, \phi)}{E_{max}(r_o)} \quad (12)$$

$$K_n(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{max}} = F_a^2(\theta, \phi) . \quad (13)$$

Après conversion en dB , le diagramme de la fonction caractéristique devient équivalent à celui de l'intensité de rayonnement normalisée $K_n(\theta, \phi)$ puisque $10 \log K_n = 20 \log F_a$ selon (13).

De plus, les diagrammes de rayonnement exhibent souvent un lobe principal (maximum de rayonnement) ou faisceau avec des lobes secondaires comme on le remarque sur la figure 4. On définit alors la largeur du lobe principal entre les premiers nuls de chaque côté ($\Theta_{BW FN}$) ou, ce qui est plus fréquent, à 3 dB ($\Theta_{HP BW}$). Les deux plans ($i = 1, 2$) d'intérêts choisis pour tracer les diagrammes en 2D sont orthogonaux – comme les champs électromagnétiques – et coupent, autant que possible, le lobe principal. Ce sont :

- le plan H ;
- le plan E ;

ainsi appelés à cause de l'orientation des champs respectifs. Par exemple, le plan E correspond à ($\phi = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) ; et le plan H , à ($\theta = \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi$) si les composantes sont E_θ et H_ϕ et que le faisceau pointe dans la direction de l'axe x .

³On notera $f_a(\theta, \phi)$ la fonction caractéristique de rayonnement qui n'est pas forcément normalisée.

Exercice 2

Une antenne émet un signal d'une puissance totale de 5 W . On mesure une densité de puissance qui suit l'expression suivante :

$$\langle P \rangle = \begin{cases} k \frac{\cos(\theta)}{r^2} W/m^2 & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Donnez la valeur de k qui convient.

Il faut que (10) soit respecté :

$$\begin{aligned} 5 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} k \frac{\cos(\theta)}{r^2} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= 2\pi k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= 2\pi k \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \pi k \end{aligned}$$

d'où

$$k = 5/\pi .$$

- Exprimez l'intensité de rayonnement normalisée et la fonction caractéristique de cette antenne.

De (9) et (13), on a simplement :

$$K_n(\theta, \phi) = \begin{cases} \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Puis :

$$F_a(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{\cos(\theta)} & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Déterminez la largeur du faisceau à 3 dB dans le plan $\phi = cte$.

Le lobe principal – et unique lobe – pointe dans la direction $\theta = 0$, car $K_n(0, \phi) = 1$. À mi-puissance :

$$K_n(\theta_{3dB}) = 0.5 \implies \theta_{3dB} = 60^\circ$$

donc, comme le lobe est aussi symétrique, on a :

$$\Theta_{HP BW} = 120^\circ .$$

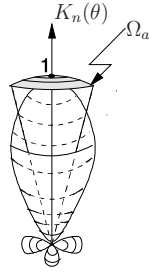


FIGURE 5 – Notion d'angle solide.

5 Angle solide du faisceau

Dans le cas d'antennes ayant un seul faisceau, l'angle solide du faisceau représente l'angle solide à travers lequel toute la puissance rayonnée par l'antenne est concentrée avec une valeur constante K_{max} et une valeur nulle à l'extérieur de cette région de l'espace, comme sur la figure 5. L'angle solide du faisceau, notée Ω_a , est obtenu via l'intégrale de l'intensité de rayonnement normalisée sur la sphère :

$$\Omega_a = \oint_{4\pi} K_n(\theta, \phi) d\Omega. \quad (14)$$

Ainsi la puissance totale émise $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ devient simplement le produit de la valeur maximale de l'intensité de rayonnement par l'angle solide du faisceau. Il suffit de prendre (11) dans laquelle on remplace $K(\theta, \phi) = K_{max} K_n(\theta, \phi)$ pour s'en rendre compte :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = K_{max} \Omega_a. \quad (15)$$

Si le rayonnement est uniforme dans toute les directions, $K_n(\theta, \phi) = 1$ et $K_{moy} = K_{iso}$. Ainsi l'angle solide d'une antenne isotrope vaut selon (14) :

$$\Omega_{a_{iso}} = 4\pi \quad (16)$$

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = K_{moy} (4\pi). \quad (17)$$

L'angle solide du faisceau peut être relié au produit des largeurs du lobe principal à 3 dB dans chacun des plans principaux en radians, $\Theta_{1_{HPBW}}$ et $\Theta_{2_{HPBW}}$ en tenant compte qu'il est un cercle inscrit (facteur $\pi/4$). Une approximation valide dans les cas où l'angle solide est très petit et où les lobes secondaires sont négligeables, est la suivante :

$$\Omega_a \approx (\pi/4) \Theta_{1_{HPBW}} \Theta_{2_{HPBW}}. \quad (18)$$

6 Directivité et gain

Comme il a été écrit précédemment, l'antenne n'émet pas la puissance uniformément dans toutes les directions. Ceci semble évident pour des antennes ne présentant pas la même forme selon la direction d'observation. L'antenne a donc une capacité :

- de concentrer la puissance afin de privilégier certaines directions en émission ;
- de capter plus facilement la puissance provenant de certaines directions en réception.

Ces deux dernières affirmations sont identiques à cause du principe de réciprocité entre l'émission et la réception. Dans certains cas, ce pouvoir de direction privilégiée est très utile comme dans un lien micro-onde ; dans d'autres cas, on recherche plutôt à émettre partout sans préférence (en azimuth pour un récepteur ou émetteur de radio commerciale).

La directivité $D(\theta, \phi)$ d'une antenne dans une direction donnée représente donc le rapport de l'intensité du rayonnement dans cette direction à l'intensité moyenne K_{moy} obtenue par une antenne isotrope. En utilisant (17), on trouve :

$$D(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{moy}} = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{\langle \mathcal{P}_t \rangle} \quad (19)$$

$$= \frac{4\pi K_{max} K_n(\theta, \phi)}{K_{max} \Omega_a} = \frac{4\pi}{\Omega_a} K_n(\theta, \phi). \quad (20)$$

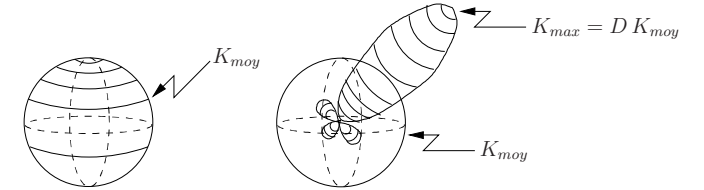


FIGURE 6 – Illustration de la directivité : rayonnements isotrope et directionnel.

La figure 6 montre qu'en concentrant la puissance émise l'intensité de rayonnement augmente dans la direction privilégiée mais diminue dans les autres, car la puissance totale émise reste la même.

L'antenne qui aurait la faculté d'émettre uniformément est dite antenne isotrope. Elle n'existe qu'en théorie car sa réalisation exigerait une structure à symétrie complète (une sphère par exemple) alimentée symétriquement par une paire de fils ! La directivité d'une antenne isotrope est, bien entendu, égale à l'unité quelle que soit la direction d'observation. Voilà pourquoi on exprime parfois la directivité en dBi (pour dB isotropique) dans la littérature.

Le gain directif ou plus simplement gain $G(\theta, \phi)$ de l'antenne, souvent confondu avec la directivité, représente la même chose en tenant compte des pertes. Il est donc défini par rapport à la puissance à l'entrée $\langle \mathcal{P}_{in} \rangle$ plutôt que $\langle \mathcal{P}_t \rangle$. De plus, l'antenne étant un circuit passif, le gain n'indique pas que plus de puissance est émise mais que la densité de puissance dans une direction est plus forte ou plus faible comparativement à celle produite par une antenne isotrope. Une efficacité ε_r de 100% fait que directivité et gain sont identiques :

$$G(\theta, \phi) = \varepsilon_r D(\theta, \phi). \quad (21)$$

Bien souvent, on parle de directivité ou de gain sans spécifier de direction (θ, ϕ) . Il faut comprendre par là la valeur maximale de ces paramètres. Normalement, il faut aussi connaître la direction vers laquelle on note ces maxima. On montre alors avec (20) :

$$D = D_{max} = \frac{K_{max}}{K_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_a} \quad (22)$$

soit

$$D(\theta, \phi) = D K_n(\theta, \phi) . \quad (23)$$

6.1 Figure de mérite

La figure de mérite F_M est un paramètre communément utilisé en propagation (voir section 11.4). Elle entre dans l'équation qui calcule l'intensité du champ électrique à une certaine distance r produit par une antenne qui émet une certaine puissance $\langle \mathcal{P}_t \rangle$. Elle ne fait intervenir que la directivité de l'antenne :

$$F_M = 173.2 \sqrt{D} . \quad (24)$$

Exercice 3

Soit l'antenne de l'exercice 2.

- Exprimez sa directivité.

Plusieurs possibilités s'offrent dont celle partant de l'intensité de rayonnement et de l'intensité moyenne :

$$K(\theta, \phi) = \begin{cases} (5/\pi) \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle / 4\pi = 5/4\pi .$$

De (19), découle :

$$D(\theta, \phi) = \begin{cases} 4 \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La directivité maximale vaut $D = 4$.

Exercice 4

Une antenne possède la fonction caractéristique suivante avec $0 \leq \phi < 2\pi$:

$$F_a(\theta, \phi) = |e^{-4|\phi-\pi|} \sin(\theta)| .$$

- Déterminez la directivité maximale.

De la fonction caractéristique, on déduit rapidement l'intensité de rayonnement normalisée K_n , laquelle sert comme point de départ pour trouver l'angle solide par (14) puis la directivité maximale par (22) :

$$K_n(\theta, \phi) = F_a^2 = e^{-8|\phi-\pi|} \sin^2(\theta) .$$

Ainsi, selon *WolframAlpha*TM :

$$\begin{aligned} \Omega_a &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{-8|\phi-\pi|} \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\ &= \underbrace{\left[\frac{e^{-8(\phi+\pi)}}{16} (\operatorname{sgn}(\pi-\phi)(e^{8\pi} - e^{8\phi})^2 + e^{16\phi} + 2e^{8(\phi+\pi)} + e^{16\pi}) \right]_0^{2\pi}}_{0.25(1-e^{-8\pi}) \approx 0.25} \underbrace{\left[\frac{1}{12} (\cos(3\theta) - 9\cos(\theta)) \right]_0^{\pi}}_{4/3} \\ &= 0.333 \text{ sr} \end{aligned}$$

et

$$D = \frac{4\pi}{0.333} = 37.7 .$$

- Calculez la puissance émise nécessaire pour produire un champ électrique d'une amplitude de 10 mV/m à 5 km dans la direction optimale.

La direction optimale est celle où la directivité est maximale, soit, en degrés, $(\theta = 90^\circ, \phi = 180^\circ)$. La densité de puissance dans cette direction à la distance désirée équivaut à :

$$\langle P(\theta = 90^\circ, \phi = 180^\circ) \rangle = \frac{(10 \times 10^{-3})^2}{2(377)} = 13.3 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 .$$

Une antenne isotrope produit cette densité de puissance avec une puissance émise de :

$$\langle \mathcal{P}_{iso} \rangle = (13.3 \times 10^{-8})(4\pi(5000)^2) = 41.7 \text{ W};$$

l'antenne du problème en nécessite 37.7 fois moins à cause de sa directivité :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = 1.11 \text{ W} .$$

- Si cette fois le champ électrique d'une amplitude de 10 mV/m à 5 km est obtenu dans la direction $(\theta = 60^\circ, \phi = 150^\circ)$, recalculez la puissance émise.

Dans cette direction, l'intensité de rayonnement normalisé vaut :

$$K_n(\theta = 60^\circ, \phi = 150^\circ) = e^{-8(\pi/6)} \sin^2(\pi/3) = (0.015)(0.75) = 0.0114 .$$

Donc la directivité dans cette direction est inférieure à l'unité puisque selon (23) :

$$D(\theta = 60^\circ, \phi = 150^\circ) = 37.7(0.0114) = 0.429 .$$

Il faudra plus de puissance que celle requise par une antenne isotrope, car l'antenne en question n'a pas la faculté de bien émettre dans cette direction. Ainsi, pour répondre à la demande, il faut :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{t_{iso}} \rangle}{0.429} = 97.2 \text{ W}.$$

7 Ouverture ou longueur effective

L'ouverture effective d'antenne, A_e s'emploie lorsque l'antenne est dans le mode de réception. Elle est définie par :

$$\langle P_i \rangle A_e = \langle \mathcal{P}_{out} \rangle \quad (25)$$

où $\langle P_i \rangle$ est la densité de puissance de l'onde électromagnétique incidente à l'endroit où est située l'antenne ; $\langle \mathcal{P}_{out} \rangle$ est la puissance disponible à la sortie de l'antenne, laquelle est fournie au récepteur. En référence à la puissance reçue par l'antenne $\langle \mathcal{P}_r \rangle$, on parle alors d'ouverture effective maximale d'antenne A_{em} , elle-même reliée à l'ouverture physique de l'antenne A_p par l'efficacité d'ouverture ε_{ap} pour des antennes à ouverture :

$$\langle P_i \rangle A_{em} = \langle \mathcal{P}_r \rangle \quad (26)$$

$$A_e = \varepsilon_r A_{em} \quad (27)$$

$$A_{em} = \varepsilon_{ap} A_p. \quad (28)$$

Pour des antennes filiformes, on peut aussi parler de hauteur effective h_e :

$$E_i h_e = V_{co} \quad (29)$$

$$I_{in} h_e = \int_0^h I(z) dz. \quad (30)$$

où V_{co} est la tension induite aux bornes de l'antenne en circuit ouvert par le champ électrique E_i au voisinage de l'antenne et, où I_{in} est le courant à la base de l'antenne ($I(z)$ est la distribution du courant le long de l'antenne). La figure 7 résume le principe de hauteur effective ; les aires sous les courbes de distribution du courant sont égales.

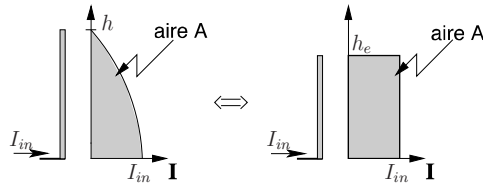


FIGURE 7 – Relation entre hauteur effective et hauteur physique d'antenne.

8 Ouverture vs directivité

Bien que tous les principaux paramètres des antennes aient été présentés, il demeure une équation fondamentale non décrite : le lien entre l'ouverture effective maximale et la directivité. Un tel lien doit exister puisque la définition de l'ouverture effective maximale implique l'efficacité de rayonnement maximal utilisée pour la directivité. En fait, le lien n'existe que par le théorème de réciprocité de *Lorentz* qui sera présenté à la section 3.7 montrant l'identité du diagramme de rayonnement en émission et en réception.

Considérons 2 situations, a et b qui inversent le rôle des antennes.

En (a) , selon (26), la puissance reçue à l'antenne 2, $\langle \mathcal{P}_{r2a} \rangle$, dépend directement de la densité de puissance incidente sur l'antenne 2, $\langle P_{i2a} \rangle$, et de sa surface effective maximale A_{em2} . Or, $\langle P_{i2a} \rangle$ dans la direction optimale d'une antenne émettrice 1 s'écrit

$$\begin{aligned} \langle P_{i2a} \rangle &= \frac{\langle \mathcal{P}_{t1a} \rangle}{4\pi r^2} D_1 \\ \langle \mathcal{P}_{r2a} \rangle &= \langle P_{i2a} \rangle A_{em2}. \end{aligned}$$

Il suffit d'inverser les indices 1 et 2 et de remplacer a par b , lorsqu'on intervertit l'antenne émettrice et réceptrice dans la situation (b) .

Utilisant la réciprocité d'un canal de transmission (voir équation 52), on déduit alors que

$$\frac{\langle \mathcal{P}_{r2a} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{t1a} \rangle} = \frac{\langle \mathcal{P}_{r1b} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{t2b} \rangle} \implies \frac{D_1}{4\pi r^2} A_{em2} = \frac{D_2}{4\pi r^2} A_{em1}$$

ou encore

$$\frac{D_1}{A_{em1}} = \frac{D_2}{A_{em2}} = C. \quad (31)$$

Reste à trouver la valeur de cette dernière constante C . N'importe laquelle antenne fait l'affaire. On démontrera dans les prochains chapitres qu'elle vaut $\frac{4\pi}{\lambda^2}$. Ainsi donc, on déduit :

$$D = 4\pi \frac{A_{em}}{\lambda^2} \quad (32)$$

$$G = 4\pi \frac{A_e}{\lambda^2} \quad (33)$$

indiquant qu'à une fréquence donnée, la directivité est proportionnelle à l'ouverture effective maximale de l'antenne. Pour l'antenne hypothétique isotrope, l'ouverture effective maximale est de $0.08\lambda^2$ ($D = 1$) et toutes les antennes sans perte doivent avoir une ouverture effective maximale égale ou supérieure à cette valeur.

On aurait pu trouver par implication logique que la constante C doit être inversement proportionnelle à λ^2 car l'important en électromagnétisme n'est pas la longueur physique mais la longueur électrique i.e. le rapport ℓ/λ . Pour une surface électrique, on parle en λ^2 . D'autre part, le facteur 4π provient de l'angle solide d'une sphère qui enveloppe l'antenne émettrice intégré dans le calcul de la directivité

Exercice 5

Deux antennes paraboliques circulaires sont employées pour un lien de communication de 50 km à une fréquence de 956 MHz ($\lambda = 0.3138$ m). L'antenne émettrice est une Andrews P4F-9-E7A ayant une directivité maximale de 18.4 dB ($D_t = 69$) et la réceptrice est une Anixter Mark P-972G ayant une directivité maximale de 22.1 dB ($D_r = 162$).

Il faut absolument une puissance reçue de plus de 1 microwatt pour assurer un bon rapport signal-à-bruit au récepteur. L'efficacité de rayonnement est assumée parfaite.

► Déterminez la puissance émise.

Les étapes sont :

- trouver la surface effective maximale en réception de (32) et ensuite la densité de puissance incidente nécessaire de (25) ;
- déduire la puissance isotropique émise puis celle demandée étant donnée la directivité en émission.

Ainsi :

$$\begin{aligned} A_{em_r} &= D_r \frac{\lambda^2}{4\pi} = 162 \frac{(0.3138)^2}{4\pi} = 1.27 \text{ m}^2 \\ \langle P_i \rangle &= \frac{\langle P_{r_{min}} \rangle}{A_{em_r}} = \frac{10^{-6}}{1.27} = 0.788 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 \\ \langle P_{t_{iso}} \rangle &= \langle P_i \rangle (4\pi r^2) = (0.788 \times 10^{-6}) (4\pi (50 \times 10^3)^2) = 24.8 \times 10^3 \text{ W} \\ \langle P_t \rangle &= \frac{\langle P_{t_{iso}} \rangle}{D_t} = \frac{24.8 \times 10^3}{69} = 359 \text{ W} . \end{aligned}$$

► Le fabricant Anixter Mark spécifie que son antenne a un diamètre de 1.83 m; déduisez alors l'efficacité d'ouverture ε_{ap_r} .

La surface de l'antenne parabolique circulaire est donnée par

$$A_{ap_r} = \pi r_{pr}^2 = \pi (1.83/2)^2 = 2.63 \text{ m}^2 .$$

Connaissant maintenant la surface physique et la surface effective maximale obtenue précédemment $A_{em_r} = 1.27 \text{ m}^2$, on trouve selon (28) :

$$\varepsilon_{ap_r} = \frac{1.27}{2.63} = 48.3\% .$$

En règle générale, l'efficacité d'ouverture de la majorité des antennes paraboliques tourne autour du 50% comme c'est le cas ici.

9 Bruits en réception

Les bruits, car il y a plusieurs sources de bruit, sont des phénomènes perturbateurs qui affectent les systèmes de communications. Il est impératif de déterminer la prépondérance des sources de bruits pour se concentrer sur la réduction des plus importantes. En effet, il ne vaut souvent pas la peine de consacrer temps et efforts sur des sources faibles, ce qui ne donnerait pas de résultat sensible.

- Les puissances de bruits N_k s'ajoutent car ils sont statistiquement indépendants ;
- Les bruits sont habituellement additifs au signal utile pour la même raison.

Les bruits sont des signaux issus d'origines différentes :

Bruit interne au récepteur : Bruit produit par l'agitation thermique du mouvement brownien des électrons dans les circuits. Un bruit analogue prend naissance dans l'antenne, nonobstant ce qu'elle capte, étant donnée la température à laquelle elle se trouve.

Bruits externes : Bruits proviennent de diverses origines.

- Bruits naturels issus de décharges électriques ou d'orages mêmes lointains. Ils affectent les fréquences en dessous du UHF, dont le VHF particulièrement.
- Bruits industriels générés par les appareils électriques de tout genre, mais surtout ceux qui comportent un transitoire rapide comme les contacteurs, les moteurs (dont ceux avec des collecteurs), les tubes à décharge (les néons), les allumages de moteur à combustion. Leur niveau est très élevé dans les centres urbains ou dans les zones industrielles. Ils couvrent une bonne partie du spectre jusqu'au UHF
- Bruits extra-terrestres générés par les martiens :-) et surtout par le soleil. Les autres étoiles ou les galaxies rayonnent dans une moindre mesure mais cela peut rester gênant dans les récepteurs très sensibles dans les ondes courtes, du SHF et plus haut en fréquence.

9.1 Température équivalente de bruit

Tous les bruits sont, en première approximation, des phénomènes aléatoires. On peut donc tous les assimiler aux bruits thermiques. Or, l'agitation des électrons dépend directement de la température T en Kelvin. Une telle agitation fait apparaître une tension $v_n(t)$ aux bornes d'une résistance R dont la variance est donnée par :

$$\overline{v_n^2} = 4k_B T B R \quad (34)$$

où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B \approx 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$), et B la bande passante considérée. En conséquence, il importe de réduire au maximum la largeur de bande. Il faut filtrer pour ne laisser que les composantes spectrales puissantes à l'intérieur de la largeur de bande effective du signal utile $s(t)$ définie ainsi (avec $S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\}$) :

$$B_{eff} = \frac{\int_0^\infty |S(f)|^2 df}{S_{max}^2} . \quad (35)$$

La théorie des processus stochastiques indépendants démontre ceci :

- l'agitation indépendante des électrons fait que la distribution de $v_n(t)$ suit une loi gaussienne alors que le spectre $V_n(f)$ est uniforme ;
- les puissances des bruits indépendants s'additionnent simplement.

On parle alors d'un bruit blanc, gaussien, additif.

Chaque résistance dans un circuit se comporte comme un générateur qui débite une fraction seulement de la puissance de bruit dans le reste du circuit. En supposant un transfert maximal selon l'équivalent *Thévenin* du circuit vu par une résistance donnée, cette fraction correspond au quart puisque la tension chute de moitié. L'autre partie sera dissipée à même la résistance. Ainsi donc, la puissance de bruit disponible équivaut à :

$$N = k_B T B . \quad (36)$$

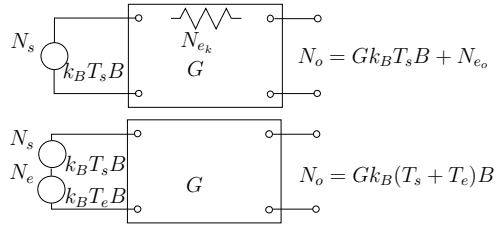


FIGURE 8 – Modèles équivalents d'un circuit bruité.

Un circuit étant composé de plusieurs éléments internes, le bruit disponible à la sortie N_{e_o} est la somme de la contribution de tous les bruits indépendants N_{e_k} . On peut donc ramener les bruits en une seule source de bruit *connectée à l'entrée* N_e qui produirait le même niveau de bruit en sortie d'un circuit idéal sans bruit, considérant le gain G du circuit dans la bande passante considérée. L'idée est de ramener tous les bruits au même point, soit à l'entrée du circuit pour fin de comparaison. On obtient les deux modèles équivalents de circuit bruité de la figure 8.

Puisque tous les bruits sont assimilables au bruit thermique, on peut représenter l'effet de l'ensemble en attribuant au circuit, non plus sa température réelle T , mais une température de bruit fictive $T_e > T$ appelée température équivalente de bruit, telle que :

$$T_e = \frac{N_e}{k_B B} . \quad (37)$$

Si une source quelconque introduit dans un circuit un bruit supplémentaire N_s assimilable à une température T_s , ce bruit s'ajoute à celui du circuit lui-même ramené à l'entrée N_e . Le bruit à la sortie vaut :

$$N_o = G k_B (T_s + T_e) B . \quad (38)$$

9.2 Facteur de bruit

Pour un quadripôle, au lieu de donner la température équivalente de bruit, on préfère utiliser un facteur qui indique le rapport signal à bruit à l'entrée du récepteur en fonction du rapport signal bruit à la sortie. Le facteur de bruit F indique alors comment le récepteur dégrade le signal reçu en ajoutant son propre bruit.

$$F = \frac{SNR_i}{SNR_o} \geq 1 \quad (39)$$

$$F[dB] = 10 \log(F) = SNR_i[dB] - SNR_o[dB] \quad (40)$$

où $SNR_i = S_i/N_i$ est le rapport signal-à-bruit en puissance à l'entrée et SNR_o , celui à la sortie. En anglais, on emploie “noise figure” lorsque exprimé en décibels. Plus le facteur de bruit tend vers l'unité, meilleur est le récepteur ($F \geq 1$).

Si le récepteur a un gain G dans la bande passante considérée, on a :

- le signal utile à la sortie $S_o = G S_i$.
- le bruit à la sortie $N_o = G(N_s + N_e)$ selon (38), soit l'addition du bruit de la source N_s et du bruit généré par le récepteur ramené à l'entrée N_e amplifiés par le même gain.

On en arrive à :

$$F_s = \frac{S_i/(k_B T_s B)}{G S_i/(G k_B (T_s + T_e) B)} = 1 + \frac{T_e}{T_s} . \quad (41)$$

Le problème de cette définition du facteur de bruit, est qu'elle dépend de la puissance de bruit à l'entrée. On voudrait qualifier une composante sans faire intervenir T_s . Le mieux serait donc d'utiliser une température de référence du bruit à l'entrée. Or, à une certaine époque, on croyait que la température minimale d'une source de bruit branchée à un récepteur était celle de la température ambiante de la source, soit $T_0 \approx 290 \text{ K}$. Il n'y a pas lieu de discuter de l'arbitraire de cette température de référence si les comparaisons se font toujours avec la même température. On a maintenant la définition acceptée :

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (42)$$

ou encore

$$T_e = \frac{N_e}{k_B B} = (F - 1) T_0 . \quad (43)$$

- S'il faut obtenir un facteur de bruit pour une température de source différente $T_s \neq 290 \text{ K}$ à partir du facteur de bruit standard, la relation suivante convient :

$$F_s = 1 + (F - 1) \frac{T_0}{T_s} . \quad (44)$$

- Pour un atténuateur passif par un facteur $L \geq 1$ en puissance à la température équivalente de bruit T_0 , on trouve :

$$T_e = (L - 1) T_0 \quad (45)$$

$$F = L . \quad (46)$$

Exercice 6

Un amplificateur ayant un gain de 15 dB, une largeur de bande à 3 dB de 10 MHz et un facteur de bruit de 4 dB, est branché à une source débitant un signal de 2 mW avec un bruit à une température de 30 K.

- Déterminez la température équivalente de bruit totale à l'entrée.

Il faut savoir que la température équivalente de bruit est toujours donnée avec la référence standard T_0 . Comme il s'agit de puissance, la conversion en linéaire se fait par $F = 10^{4/10} = 2.51$.

On peut dès lors, trouver directement la température équivalente de bruit de l'amplificateur par (42) ou convertir le facteur du bruit avec la référence de température de la source de bruit à 30 K par la (44), mis ensuite dans (41) avec $T_s = 30$ K.

$$T_e = (2.51 - 1)(290) = 438 \text{ K}$$

ou

$$F_s = 1 + (2.51 - 1) \left(\frac{290}{30} \right) = 15.61$$

$$T_e = (F_s - 1)T_s = (15.61 - 1)(30) = 438 \text{ K}.$$

La température équivalente de bruit totale à l'entrée s'obtient en additionnant simplement les deux sources de bruit, donc les deux températures :

$$T_{\text{bruit}_i} = 30 + 438 = 468 \text{ K}.$$

- Donnez la valeur de la puissance de bruit à la sortie.

Comme la température équivalente de bruit totale à l'entrée est connue, on déduit rapidement de (38) que :

$$N_o = G k_B T_{\text{bruit}_i} B = (31.6)(1.3806 \times 10^{-23})(468)(10 \times 10^6) = 2.04 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

C'est effectivement très faible comparativement à la puissance du signal utile à la sortie de (31.6)(0.002) = 0.063 W.

- Comparez la dégradation en dB du SNR de la sortie par rapport celui à l'entrée.

En entrée, on a une puissance du bruit de :

$$N_s = (1.3806 \times 10^{-23})(30)(10 \times 10^6) = 4.14 \times 10^{-15} \text{ W}$$

ce qui donne, avec les chiffres obtenus précédemment :

$$SNR_i = 10 \log \left(\frac{0.002}{4.14 \times 10^{-15}} \right) = 116.8 \text{ dB}$$

$$SNR_o = 10 \log \left(\frac{0.0632}{2.04 \times 10^{-12}} \right) = 104.9 \text{ dB}.$$

La dégradation est d'environ 11.9 dB car

$$10 \log F_s = 10 \log(15.61) = 11.9 \text{ dB}.$$

9.3 Amplificateurs en cascade

- Un récepteur est souvent constitué d'une cascade d'amplificateurs et de filtres, avec mélangeurs.
- Chaque amplificateur ou filtre, ajoute un bruit supplémentaire qui s'introduit dans l'étage suivant.
- Les largeurs de bande peuvent varier d'un étage à l'autre, mais elles devraient être assez similaires (les plus grandes sont celles des premiers étages).

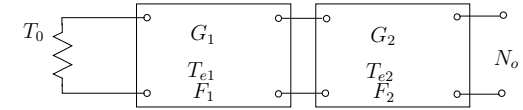


FIGURE 9 – Amplificateurs en cascade.

Le bruit total en sortie en se référant à la figure 9, équivaut à :

$$N_o = \underbrace{G_1 G_2 k_B T_0 B}_{\text{bruit de la source à } T_0} + \underbrace{G_1 G_2 k_B T_{e1} B}_{\text{bruit de l'ampli 1}} + \underbrace{G_2 k_B T_{e2} B}_{\text{bruit de l'ampli 2}}. \quad (47)$$

On obtient la température équivalente de bruit des deux étages :

$$T_{e1,2} = \frac{k_B G_2 (G_1 T_{e1} + T_{e2}) B}{G_1 G_2 k_B B} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1}.$$

On peut généraliser facilement avec n étages et obtenir la formule de Friis :

$$T_{e1..n} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{en}}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \quad (48)$$

$$F_{1..n} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}}. \quad (49)$$

On voit ici l'importance

- d'avoir un gain G_1 élevé
- d'avoir une température de bruit T_{e1} faible

dans le premier étage. En effet, le premier étage est celui qui a une effet prédominant et particulièrement néfaste sur le bruit de l'ensemble, d'où l'emploi d'amplificateurs spécialisés dits à faible bruit ("Low-Noise-Amplifier" LNA). Ces amplificateurs, plus dispendieux, sont essentiels pour diminuer l'effet du bruit. On ne met jamais un atténuateur au début de la chaîne de réception.

9.4 Récepteur avec antenne

Soit le système constitué d'une antenne et d'un récepteur.

- Le bruit fourni par l'antenne (considérée comme une source) provient
 - des bruits externes captés par l'antenne $N_{a_{ext}}$;
 - du bruit propre à l'antenne selon la température de la région visée N_{a_p} .

Le bruit total de l'antenne, ou sa température équivalente de bruit s'exprime :

$$T_a = \frac{N_{a_{ext}} + N_{a_p}}{k_B B} .$$

- S'ajoute le bruit du récepteur lui-même N_r .

Le bruit propre de l'antenne fait abstraction des parasites externes, c'est comme si l'antenne était enfermée dans une cage de *Faraday* à une température propre.

- Une antenne très directive possède une température propre qui correspond à la température de la région du ciel visée. On peut d'ailleurs distinguer la température de centre ou des bords du soleil en visant avec un faisceau étroit. Si la température équivalente de bruit de ce qui est capté n'est pas uniforme, on moyenne en faisant intervenir la variation du gain $G(\Omega)$ et de la température $T(\Omega)$ sur chaque partie d'angle solide $d\Omega$, en intégrant ensuite sur la sphère complète pour obtenir la température T_a :

$$T_a = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} G(\Omega) T(\Omega) d\Omega . \quad (50)$$

Les bruits externes sont alors considérés dans cette équation (50) si $T(\Omega)$ en tient compte.

- Au contraire, les bruits externes sont ajoutés pour une antenne moins directive. Près du sol, elle voit sa température propre proche de celle du sol.

Les récepteurs récents ont aujourd'hui des facteurs de bruit très proche de l'unité. Dès lors, le bruit total est presque uniquement celui amené par l'antenne.

Exercice 7

Un système de réception est représenté sur la figure 10.

- Déterminez le facteur de bruit du système complet (partant de l'amplificateur faible-bruit jusqu'à la sortie du mélangeur) avec $L = 0$ dB .

Il faut convertir toutes les données en linéaire pour exploiter correctement l'équation (49) : $G_{ampli} = 10$, $F_{ampli} = 2$, $G_{mel} = 8$, $F_{mel} = 4$. D'où :

$$F = 2 + \frac{4-1}{10} = 2.3 \text{ (3.62 dB)} .$$

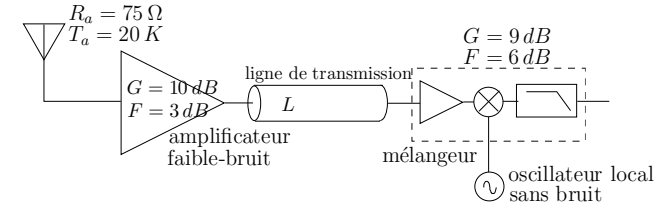


FIGURE 10 – Système de réception cascade pour l'exemple 7

- Considérant la température équivalente de bruit de la source, calculez de combien de dB se dégrade le SNR.

Pour éviter de longs calculs, il suffit de trouver le facteur de bruit à 20 K selon (44) :

$$F_s = 1 + (2.3 - 1)(290/20) = 19.85 .$$

Le SNR de sortie est donc presque 20 fois plus faible que le SNR d'entrée, soit presque 13 dB.

- À la sortie de l'amplificateur, on a négligé de mettre une bonne ligne de transmission pour acheminer le signal RF jusqu'au mélangeur. Celle utilisée produit une perte $L = 7$ dB ($L = 5$). Déterminez le nouveau facteur de bruit du système complet.

Pour un atténuateur, on a $F = L = 5$. Le calcul à partir de (49) devient :

$$F = 2 + \frac{5-1}{10} + \frac{4-1}{(10)(0.2)} = 3.9 \text{ (5.91 dB)}$$

soit $F_s = 1 + (3.9 - 1)(290/20) = 43.05$.

Non seulement le signal est plus faible de 7 dB, mais il est encore plus bruité par $10 \log(43.05/19.85) = 3.36$ dB, considérant la source de bruit à 20 K.

2 Dipôle court

Un dipôle court est une antenne filiforme constituée de deux fils infiniment minces dont la longueur totale est considérée petite électriquement ; $h < \lambda/10$ suffit. À cause de la faible dimension, on fait la supposition que :

$$\sin(\beta(l - |z'|)) \approx \beta(l - |z'|)$$

avec $l = \frac{h}{2}$, partout sur la structure. Ainsi la distribution du courant :

- a l'amplitude qui décroît uniformément à partir du centre vers les extrémités ;
- mais dont la phase reste constante.

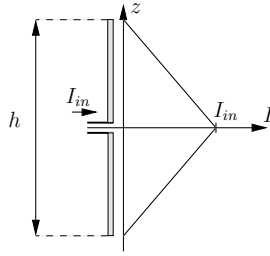


FIGURE 2 – Dipôle court et distribution de courant.

La distribution est dite triangulaire comme sur la figure 2.

Les champs émis par le dipôle court peuvent se déduire directement de ceux du dipôle élémentaire. Seule l'amplitude de $\vec{J}(z')$ varie dans l'intégrale de (2.24) ou (2.17). On arrive à la conclusion que les champs sont réduits de moitié par rapport à ceux obtenus avec une distribution uniforme :

$$\begin{aligned} \vec{N}_{court} &= \vec{N}_{zcourt} \mathbf{a}_z \\ \vec{N}_{zcourt} &= \int_h I_{court}(z') \underbrace{e^{j\beta r' \cos \psi}}_{\approx 1} dz' = \frac{1}{2} I_{in} h = \frac{1}{2} N_{z_{elem}} \end{aligned} \quad (1)$$

car $\beta r' \rightarrow 0$. En fait, on a $I_{moy}/I_{in} = 0.5$ lorsque $h \ll \lambda$ considérant la distribution triangulaire du courant. Comme la densité de puissance dépend de E^2 , elle chute donc par un facteur 4 impliquant une résistance de rayonnement 4 fois plus petite pour un même courant d'entrée. On déduit alors que :

$$\vec{A}_{court} = \frac{1}{2} \vec{A}_{elem} \quad (2)$$

$$\vec{E}_{\theta_{court}} = j\omega\mu I_{in} h \frac{e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin \theta \quad (3)$$

$$\vec{H}_{\phi_{court}} = j\beta I_{in} h \frac{e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin \theta \quad (4)$$

$$R_{r_{court}} = \frac{R_{r_{elem}}}{4} = 20\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \quad (5)$$

Exercice 1

L'antenne d'un récepteur à 6 MHz est constituée d'un dipôle de 0.5 m de long.

- Déterminez la résistance de pertes maximale pour que l'efficacité tombe à moins de 1%.

La longueur d'onde à 6 MHz vaut 50 m. Selon (5), la résistance de rayonnement de ce dipôle atteint :

$$R_{r_{court}} = 20\pi^2 \left(\frac{0.5}{50}\right)^2 \approx 0.02 \Omega.$$

Donc, il faut que :

$$0.01 \leq \frac{0.02}{0.02 + R_{pertes}} \Rightarrow R_{pertes} \leq 1.98 \Omega$$

L'exercice 1 montre qu'une très faible résistance de pertes suffit pour obtenir une efficacité médiocre. Comme la réactance est élevée, il faut aussi adapter l'impédance pour assurer un transfert d'énergie acceptable. L'ajout d'une inductance en série avec l'antenne amène des problèmes de surtension importants qui limitent l'utilisation d'un tel procédé.

La fonction caractéristique de rayonnement, et par conséquent la directivité, s'écrivent comme celles du dipôle élémentaire :

$$F_{a_{court}} = \sin \theta \quad (6)$$

$$D_{court} = 1.5 \quad (7)$$

Cela signifie qu'aucune puissance n'est émise dans l'axe du dipôle (ici, l'axe z) et que cette antenne concentre uniformément la puissance dans le plan perpendiculaire à son axe (ici, le plan xy ou $\theta = 90^\circ$). Le dipôle court est dit omnidirectionnel¹ dans le plan H .

3 Dipôle général

Lorsque la longueur du dipôle augmente, on ne peut continuer à assumer une distribution de courant triangulaire. Elle s'approche de plus en plus, d'une distribution sinusoïdale. Encore là, cette distribution est plutôt intuitive et a ses limites qui apparaissent lorsque la longueur dépasse $\lambda/2$; autour de $h = \lambda$, cette distribution sinusoïdale s'éloigne suffisamment de la réalité pour que le modèle ne tienne plus, du moins en ce qui a trait à la détermination de l'impédance d'entrée.

En assumant la distribution sinusoïdale valide, il faut alors réaliser les intégrales en découpant l'antenne de longueur $h = 2l$ en une infinité de petits dipôles élémentaires de longueur $dh = dz$ comme sur la figure 3. Le courant de chacun des dipôles élémentaires I_o est bien sûr différent ; il prend la valeur du courant à la position z' du dipôle élémentaire en question soit :

$$I(z') = I_m \sin(\beta(l - |z'|)) \quad (8)$$

¹Le dipôle, à cause de sa symétrie en rotation dans le plan xy est nécessairement omnidirectionnel dans ce plan. Il n'est toutefois pas isotrope.

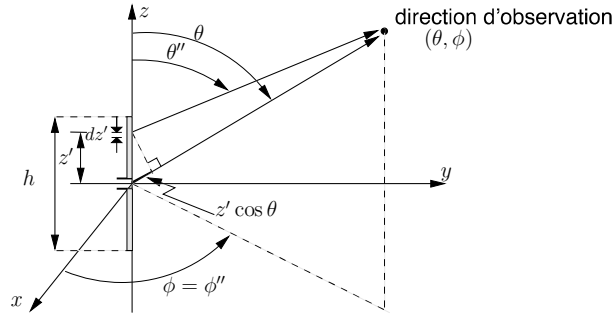


FIGURE 3 – Géométrie du dipôle avec approximation pour les champs lointains.

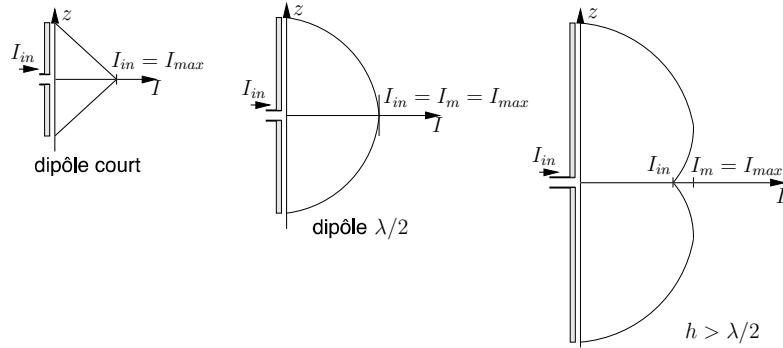


FIGURE 4 – Distribution de courant sur un dipôle.

Dans la zone de *Fraunhofer*, on peut utiliser directement l'équation (2.24) où l'intégrale se résume à une intégrale de ligne selon l'axe z , avec

- pour $z' > 0$: $r' = z'$ et $\psi = \theta \approx \theta''$;
- pour $z' < 0$: $r' = -z'$ et $\psi = 90^\circ - \theta \approx 90^\circ - \theta''$ ($\cos \psi = -\cos \theta$).

Ainsi, $\bar{\mathbf{A}}$ et $\bar{\mathbf{N}}$ n'auront qu'une composante qui sera en z . On trouve², que :

$$\begin{aligned} \bar{N}_{z_{\text{dip}}} &= \int_{-l}^l I(z') e^{j\beta z' \cos \theta} dz' \\ &= I_m \int_{-l}^0 \sin(\beta(l+z')) e^{j\beta z' \cos \theta} dz' + I_m \int_0^l \sin(\beta(l-z')) e^{j\beta z' \cos \theta} dz' \\ &= \frac{2I_m}{\beta \sin^2 \theta} (\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)) . \end{aligned} \quad (9)$$

² $\int e^{ax} \sin(bx+c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin(bx+c) - b \cos(bx+c))$

Comme $\bar{N}_\theta = -\bar{N}_z \sin \theta$ alors l'expression du champ électrique déduite de (2.29), est :

$$\bar{E}_\theta = j\eta_0 I_m \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left(\frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)}{\sin \theta} \right) . \quad (10)$$

Le résultat serait identique en utilisant le principe de superposition des dipôles élémentaires (voir exercice 3.1) en tenant compte de :

- l'amplitude du courant I_o différent sur chacun des éléments afin d'obtenir la distribution désirée ;
- la longueur dh de l'élément devient dz' .
- la position ℓ de l'élément qui varie suivant z' .

Pour accomplir la superposition, il suffit d'intégrer sur la variable z' et aucune autre variable ne possède l'indice '. Donc :

$$\begin{aligned} \bar{E}_\theta &= \int_{-l}^l d\bar{E}_\theta = \int_{-l}^l j\omega\mu \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} I(z') e^{j\beta z' \cos \theta} \sin \theta dz' \\ &= j\omega\mu \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \underbrace{\int_{-l}^l I(z') e^{j\beta z' \cos \theta} dz'}_{\frac{2I_m}{\beta \sin^2 \theta} (\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l))} . \end{aligned}$$

Le calcul de la puissance totale émise est beaucoup plus complexe à cause de la forme des intégrales donc, difficile de trouver une expression pour la résistance de rayonnement. Le résultat de l'opération devient possible avec l'application de méthodes numériques (méthode des moments par exemple).

Il ne faut pas oublier que l'impédance de rayonnement à l'entrée de l'antenne implique le courant d'entrée I_{in} et non la valeur maximale de la distribution du courant I_m . Pour la déterminer avec un dipôle général, on calcule l'impédance $R_m = V_{in}/I_m$ et on convertit le résultat pour le ramener à l'entrée (voir équations (1.2) et (1.3)) :

$$R_{ri} = \left(\frac{I_m}{I_{in}} \right)^2 R_m \quad (11)$$

sachant que :

$$I_{in} = I_m \sin \left(\beta \frac{h}{2} \right) . \quad (12)$$

L'impédance R_m correspond à l'impédance de rayonnement R_r si, et seulement si l'antenne filiforme est plus grande ou égale à $\lambda/2$. En effet, dans ces cas, le courant maximal I_{max} équivaut à I_m . Par contre, une antenne plus courte que $\lambda/2$ a une distribution du courant telle qu'elle présente le courant maximal à l'entrée sans que celui-ci soit égal à I_m . On a $R_{in} = R_r \neq R_m$.

L'impédance d'entrée d'une antenne filiforme de longueur inférieure à $\lambda/2$, correspond à celle d'un circuit RC série. Sa réactance devient ensuite inductive, puis capacitive et

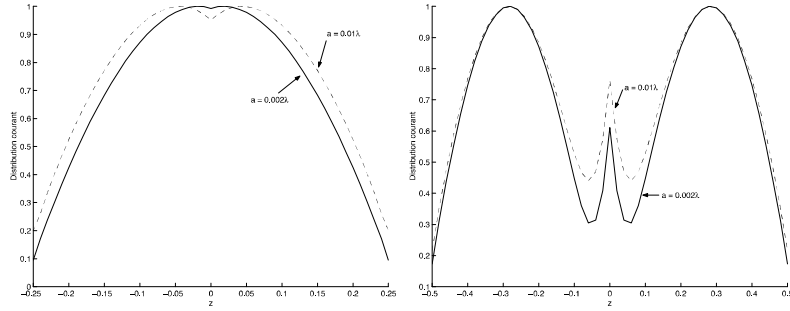


FIGURE 5 – Distribution du courant sur la structure d'un dipôle $\lambda/2$ et d'un dipôle λ pour 2 rayons différents des fils.

ainsi de suite. À la première fréquence de résonance, l'antenne est accordée car l'impédance d'entrée est strictement résistive. À la seconde, l'antenne présente toujours une impédance résistive qui devrait cette fois, tendre vers l'infini car $I_{in} \approx 0$. En pratique, la distribution pas tout-à-fait sinusoïdale du courant combinée à l'épaisseur finie des fils, font que I_{in} devient non nul. Il faut absolument utiliser une méthode numérique pour estimer la distribution du courant sur la structure. À cette fin, la méthode des moments³ (MoM) est appropriée. Les figures 5 illustrent bien la distribution du courant sur un dipôle $\lambda/2$ et un dipôle λ issue de la MoM en comparaison avec la distribution sinusoïdale. Le symbole a_o représente le rayon des fils. On remarque :

- la bonne approximation du courant sinusoïdal avec le dipôle $\lambda/2$;
- la différence importante du courant au niveau de l'entrée avec un dipôle λ qui prouve que de la distribution sinusoïdale pour l'estimation de l'impédance d'entrée est inadéquate au points d'alimentation ;
- la convergence vers la distribution sinusoïdale lorsque le rayon des fils devient infiniment mince ;
- l'effet significatif du rayon des fils plus la longueur du dipôle augmente.

longueur h	$R_r \Omega$
$0 < h < \lambda/4$	$20\pi^2(h/\lambda)^2$
$\lambda/4 < h < \lambda/2$	$24.7(\pi h/\lambda)^{2.4}$
$\lambda/2 < h < 0.637\lambda$	$11.14(\pi h/\lambda)^{4.17}$

TABLE 1 – Formules simples pour approximer la résistance de rayonnement d'un dipôle

³La méthode des moments a été développée dans les années 60 avec les premiers calculateurs numériques.

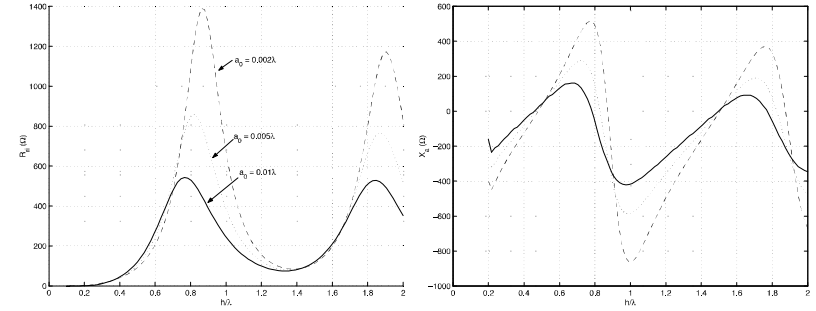


FIGURE 6 – Impédance d'entrée selon la longueur du dipôle.

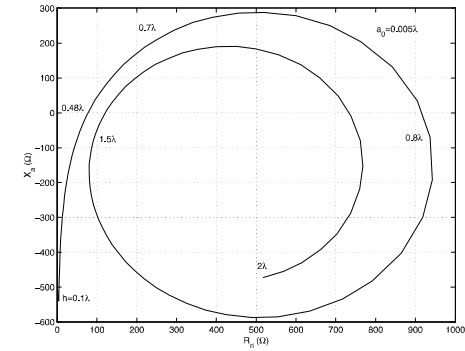


FIGURE 7 – Variation de l'impédance d'entrée d'un dipôle dans le plan complexe.

La figure 6 montre la variation de l'impédance d'entrée selon la longueur du dipôle tandis que le tableau 5 donne des approximations relativement valables tant que la longueur électrique du dipôle reste limitée. La figure 7 montre la même chose que la figure précédente, tracée cette fois dans le plan complexe. Tous ces résultats ont été fournis par la MoM.

Un dipôle infiniment mince sur lequel on assume une distribution sinusoïdale, présente une impédance de rayonnement à l'entrée qui tends vers l'infini pour des longueurs multiples de la longueur d'onde. Malgré cela, l'impédance de rayonnement définie à partir du courant maximal sur la structure, pour ces mêmes longueurs, à une valeur finie comme le montre comme la figure 8.

La directivité des dipôles de la figure 8, demeure assez indépendante du rayon des fils, ayant un maximum d'environ 3.3 pour une longueur de 1.25λ .

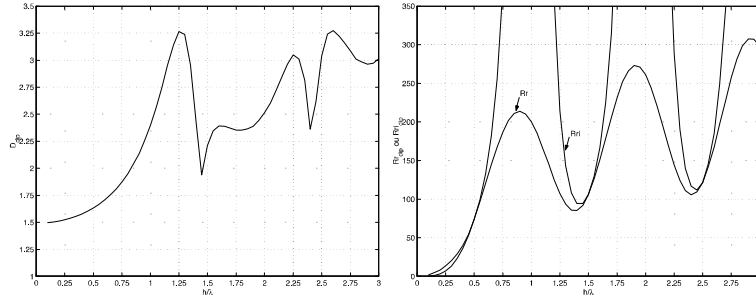


FIGURE 8 – Directivité et résistances de rayonnement d'un dipôle infiniment mince avec distribution sinusoïdale.

4 Dipôle $\lambda/2$

Le dipôle $\lambda/2$ est un cas pratique rencontré fréquemment pour plusieurs raisons dont :

- circuit accordé résonnant, donc à faible réactance d'entrée X_a (voir figure 6) ;
- résistance d'entrée R_a (ou R_{ri}) suffisamment élevée pour faciliter l'adaptation.

Le champ électrique produit par ce type de dipôle s'obtient directement de l'équation (10) en prenant $h = \lambda/2 = 2l$:

$$\bar{E}_\theta = j\eta_0 I_m \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (13)$$

On note ici que $I_m = I_m$ car le maximum de la distribution de courant se situe directement aux bornes d'entrée (voir figure 5 ou 10). En conséquence :

$$R_r = R_{ri} = R_m. \quad (14)$$

Les autres paramètres s'écrivent :

- fonction caractéristique et intensité de rayonnement :

$$F_{a_{dip/2}}(\theta, \phi) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (15)$$

$$K_{dip/2}(\theta, \phi) = \frac{15 I_m^2}{\pi} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 \quad (16)$$

- puissance émise et résistance de rayonnement :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{t_{dip/2}} \rangle &= \frac{15 I_m^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi/2(\cos \theta))}{\sin \theta} d\theta d\phi \\ &= \frac{15 I_m^2}{\pi} (2\pi) \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi/2(\cos \theta))}{\sin \theta} d\theta}_{\approx 1.22} \\ &= 30 I_m^2 (1.22) = \frac{1}{2} (73.2) I_m^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$R_{r_{dip/2}} = 73.2\Omega \quad (18)$$

- Directivité :

$$D_{dip/2} = 1.64 \text{ (2.15dB)} \quad \text{à } \theta = 90^\circ \quad (19)$$

$$D_{dip/2}(\theta, \phi) = 1.64 \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2. \quad (20)$$

L'impédance d'entrée du dipôle $\lambda/2$ est purement réelle en théorie. Sa valeur proche de 75Ω explique pourquoi les câbles normalement utilisés en vidéo ont une impédance caractéristique de $Z_o = 75\Omega$. Ce type d'antenne servait souvent pour capter les signaux de télévision. D'ailleurs, l'entrée du récepteur est aussi de 75Ω afin d'être adapté assurant un transfert maximum de puissance.

Son diagramme de rayonnement, qui apparaît à la figure 9, montre une directivité assez faible avec une largeur de lobe principal à 3 dB de 78° . Encore ici, l'antenne est omnidirectionnelle dans le plan H (ici, le plan xy car le dipôle est orienté suivant z). La différence, au point de vue du diagramme de rayonnement, est donc faible en comparaison avec celui d'un dipôle court. Cependant, la résistance de rayonnement est de beaucoup supérieure ce qui permet une adaptation plus simple aux lignes de transmission. Mais cette adaptation n'est possible que sur une certaine largeur de bande où on tolère un certain SWR maximal car X_a (que l'on veut nul) varie rapidement autour de $h/\lambda = 0.5$. En fait, plus le fil est étroit, plus la variation de X_a est brusque, donc un SWR qui croît rapidement de part et d'autre.

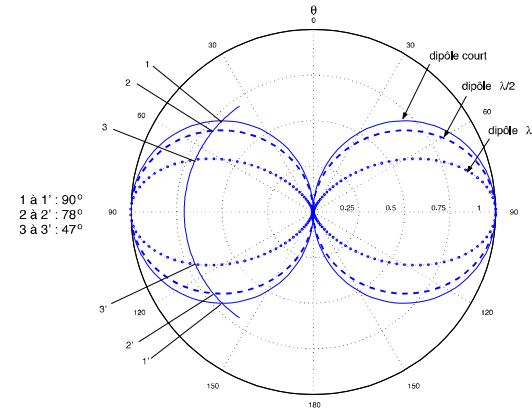


FIGURE 9 – Diagramme de rayonnement de dipôles inférieurs ou égaux à λ .

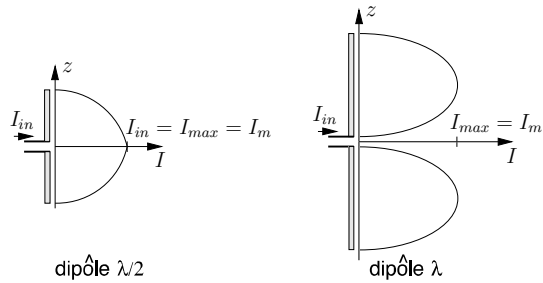


FIGURE 10 – Distribution du courant sur dipôles $\lambda/2$ et λ .

Exercice 2

Soit un dipôle $\lambda/2$ vertical émettant un signal à la fréquence de 100 MHz . Le courant d'alimentation vaut 2 A et on suppose une efficacité de rayonnement de 100% .

- Évaluez l'intensité de rayonnement dans une direction horizontale.

Utiliser directement (16) serait le plus simple, mais moins stimulant.

Les paramètres du dipôles $\lambda/2$ sont connus et peuvent être directement utilisés. Ainsi, la puissance émise est de :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} (73.2)(2)^2 = 146.4 \text{ W}.$$

Comme l'antenne est placée verticalement, alors l'horizon correspond à $\theta = 90^\circ$ soit la direction optimale où la directivité – et l'intensité de rayonnement par le fait même – est maximale. Selon (1.19) :

$$K = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{4\pi} D_{\lambda/2} = \frac{146.4}{4\pi} (1.64) = 19 \text{ W/sr}.$$

- Réévaluez cette intensité de rayonnement, cette fois dans la direction $\theta = 51^\circ$.

On pourrait faire le calcul de $D_{\lambda/2}(\theta = 51^\circ)$, et utiliser cette valeur dans le calcul de $K(\theta = 51^\circ)$. Mais un raisonnement permet de rapidement déterminer $K(\theta = 51^\circ)$ à partir du résultat précédent.

En effet, le lobe principal d'un dipôle $\lambda/2$ a une largeur à 3 dB de $\Theta_{HPBW} = 78^\circ$ et est centré sur $\theta = 90^\circ$; il occupe donc l'espace de $\theta = 51^\circ$ à $\theta = 119^\circ$. Ainsi, cet angle $\theta = 51^\circ$ correspond à un angle de mi-puissance et, conséquemment, de mi-intensité d'où $K(\theta = 51^\circ) = 19/2 = 9.5 \text{ W/sr}$.

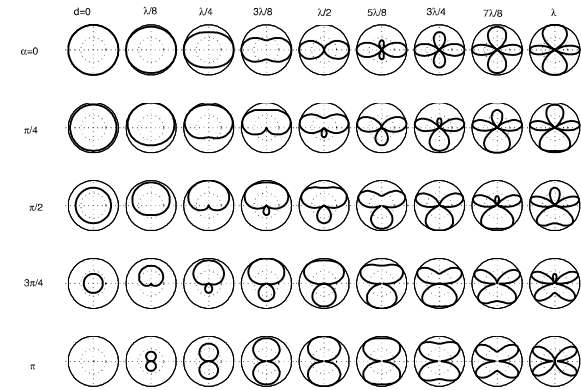


FIGURE 3 – Facteurs de réseau obtenus avec 2 éléments selon d ou α .

3 Réseau linéaire

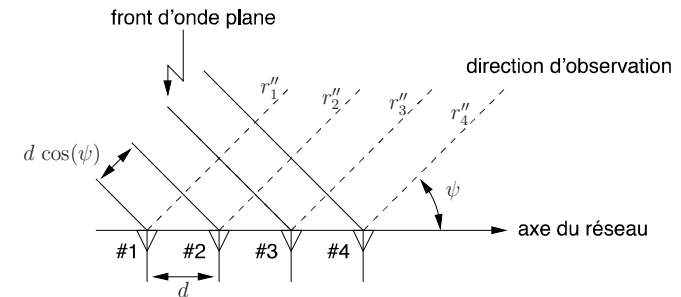


FIGURE 4 – Géométrie d'un réseau linéaire à espacement régulier.

Considérons le cas de N éléments rayonnants identiques :

- alignés ;
- espacés par une distance identique d

comme illustré sur la figure 4, où le premier élément se situe à l'origine du système de coordonnées global orienté avec l'axe du réseau ($\Psi_r = \psi$). Ce type de géométrie est particulièrement privilégié car il demeure :

- simple au point de vue de sa réalisation ;
- relativement programmable car comparable à un échantillonnage temporel à intervalle constant mais dans le domaine spatial.

3.1 Facteur de réseau linéaire

Les équations générales (6) et (7) demeurent valides mais ici, les positions des éléments sont connues et il est possible de quantifier les Δ_{r_k} . Selon la figure 6.4, les différences de longueur des trajets s'expriment¹ :

$$\begin{aligned}\Delta_{r_1} &= r_1'' - r = r - r = 0 \\ \Delta_{r_2} &= r_2'' - r = -d \cos \psi \\ &\vdots \\ \Delta_{r_k} &= -(k-1)d \cos \psi.\end{aligned}\quad (11)$$

Il est possible de faire un rapprochement avec les systèmes discrets. On pose d'abord

$$z = e^{j\beta d \cos \psi} \quad (12)$$

pour obtenir le facteur de réseau à partir de (7) et de (11) :

$$\bar{f}_{rlin}(d; \psi) = \sum_{k=1}^N \underbrace{\bar{i}_k e^{j\beta(k-1)d \cos \psi}}_{\bar{s}_k} = \sum_{k=1}^N \bar{i}_k z^{k-1}. \quad (13)$$

Cette dernière égalité ressemble beaucoup à celle d'une transformée en z d'un signal discret $i[n]$ échantillonné sur N points (décalé de une période). On pourrait donc faire une synthèse d'un facteur de réseau en trouvant les courants relatifs par la transformée en z inverse.

3.2 Pointage du faisceau

En modifiant l'alimentation simplement en plaçant des déphaseurs à la base des éléments, le réseau linéaire permet alors un balayage électronique de l'espace (i.e. sans rotation de l'antenne) malgré qu'à la base, les éléments sont fixes et peuvent être des antennes isotropes !

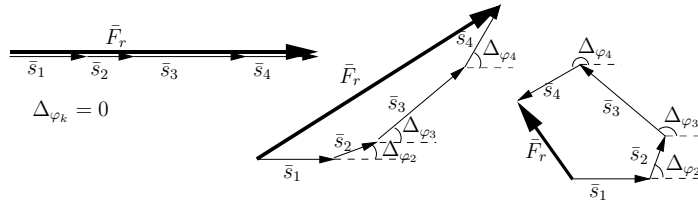


FIGURE 5 – Phaseurs signaux formant le facteur de réseau : $\Delta\varphi_k = \beta\Delta_{r_k} - \alpha_k$ et $\Delta\varphi_1 = 0$.

Le principe est simple. La figure 1, montre que les signaux reçus à chacun des éléments sont déphasés puis sommés pour obtenir la sortie de l'antenne y . Les signaux

¹les trajets r_k'' sont assumés parallèles.

reçus déphasés sont représentés par les \bar{s}_k dans (13) ; ils correspondent aux sorties après le déphaseur de chaque élément. Il s'avère que cette somme sera maximale lorsque tous les \bar{s}_k sont en phase. Dans le plan complexe, la somme vectorielle produit une droite. Dès lors qu'ils sont déphasés progressivement l'un par rapport à l'autre, la longueur du vecteur final est forcément plus petite comme sur la figure 5). Or, l'équation (13) montre que le facteur de réseau est bien formé de la somme des phaseurs signaux \bar{s}_k . Comme on s'intéresse au module du signal y , il faut regarder la longueur du vecteur final.

Sans déphaseur, c'est lorsque le signal provient de la direction perpendiculaire à l'axe du réseau $\psi = \pi/2$ que les \bar{s}_k sont en phase. C'est le rayonnement transversal.

Si on veut que le maximum soit atteint lorsque les signaux proviennent d'une direction autre, disons ψ_{max} (ce qui revient à dire que le faisceau de l'antenne-réseau pointera alors dans cette direction), il suffit de compenser le déphasage produit par les différences de longueur de trajet tel que, selon (7), $\alpha_k = \beta\Delta_{r_k}$. Ceci revient au cas $\Delta\varphi_k = 0$ de la figure 5.

Sur un réseau linéaire à espacement régulier, l'expression des Δ_{r_k} dans (11) montre que le déphasage est alors progressif :

$$\alpha_k = \arg\{\bar{i}_k\} = -(k-1)\beta d \cos \psi_{max} \quad (14)$$

avec $\alpha_1 = 0$, la phase du courant relatif de l'élément #1 servant de référence.

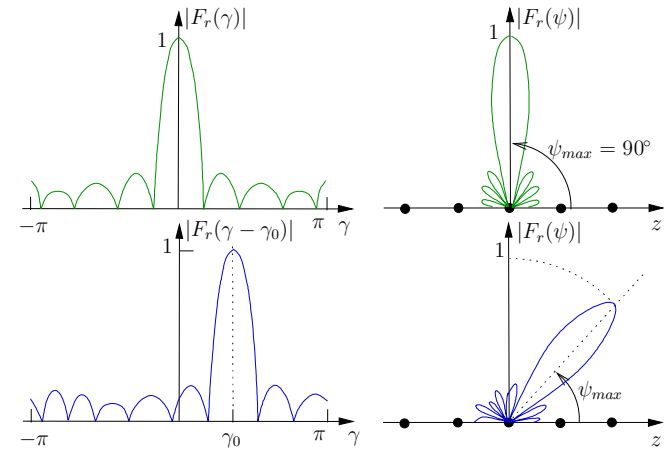


FIGURE 6 – Pointage du réseau par translation dans l'espace $\gamma = \frac{\beta d}{2} \cos \psi$.

Le principe consiste à décaler la fonction dans l'espace γ d'une valeur égale à γ_0 , ce qui se traduira par une rotation du facteur de réseau F_r comme sur la figure 6. La partie utilisée dans l'espace γ dépend de la distance inter-élément d ; elle s'étend de $-\frac{\beta d}{2}$ à $+\frac{\beta d}{2}$. C'est la zone de visibilité.

4 Alimentation uniforme

Afin d'arriver à une expression complète sans problème, on aborde le cas simple d'éléments alimentés par des courants de même amplitude soit $|\bar{i}_k| = i_0$.

4.1 Facteur de réseau linéaire uniforme

Pour commencer, tous les courants sont en phase, ce qui produira un rayonnement transversal conformément à ce qui est écrit dans la sous-section précédente. À partir de (13), le facteur de réseau de ce qui est appelé un réseau linéaire uniforme, s'exprime :

$$\begin{aligned}\bar{f}_{r_{lin-uni}}(d; \psi) &= i_0 [1 + e^{j\beta d \cos \psi} + \dots + e^{j\beta(N-1)d \cos \psi}] \\ &= i_0 \sum_{k=1}^N (e^{j\beta d \cos \psi})^{k-1}.\end{aligned}\quad (15)$$

La série est de type géométrique dont la somme vaut $\sum_{k=1}^K z^{(k-1)} = (1 - z^K)/(1 - z)$, d'où finalement :

$$\bar{f}_{r_{lin-uni}}(d; \psi) = i_0 \frac{1 - e^{j2N\gamma}}{1 - e^{j2\gamma}} = i_0 \frac{e^{jN\gamma}}{e^{j\gamma}} \frac{e^{-jN\gamma} - e^{jN\gamma}}{e^{-j\gamma} - e^{j\gamma}} = i_0 e^{j(N-1)\gamma} \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \quad (16)$$

donc

$$F_{r_{lin-uni}}(d; \psi) = \frac{\sin(N\gamma)}{N \sin \gamma} \quad (17)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2}\beta d \cos \psi. \quad (18)$$

Une analyse rapide de (17) avec (18), montre que le lobe principal de l'antenne-réseau linéaire uniforme avec éléments isotropes et des courants en phase, pointe effectivement dans la direction transversale.

On applique maintenant un déphasage progressif α entre éléments adjacents tel que

$$\alpha_k = \underset{\uparrow}{-}(k-1)\alpha \quad (19)$$

soit :

$$\bar{i}_k = i_0 e^{-j(k-1)\alpha}. \quad (20)$$

Dans ce cas, l'expression obtenue en (17) demeure sauf que l'on remplace γ par :

$$\gamma' = \gamma - \gamma_0 = \frac{1}{2}(\beta d \cos \psi - \alpha). \quad (21)$$

La figure 7 illustre divers facteurs de réseau linéaire normalisés, avec alimentation uniforme à phase progressive (les graphiques sont tracés en fonction de 2γ).

Les conclusions suivantes sont tirées ; elles sont d'ailleurs valides pour tous réseaux linéaires à espacement régulier :

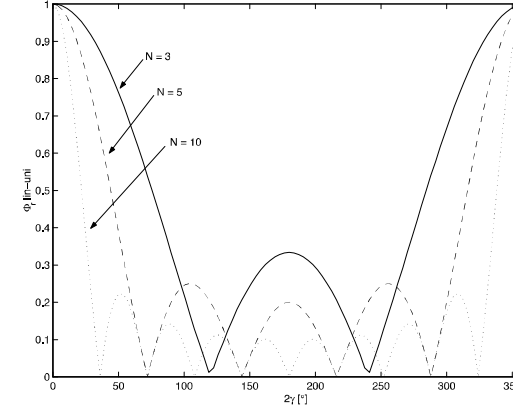


FIGURE 7 – Facteurs de réseau linéaire uniforme avec $N=3, 5$ ou 10 .

- Le faisceau pointe dans la direction :

$$\psi_{max} = \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta d}\right). \quad (22)$$

Ainsi, en changeant la valeur de α , il est possible de diriger le faisceau principal dans une direction comprise à l'intérieur d'une zone limitée² comprise entre ψ_{limmin} et ψ_{limmax} telles que :

$$\psi_{limmin}^{max} = \arccos\left(\pm \frac{\pi}{\beta d}\right). \quad (23)$$

- Il faut aussi respecter une zone dite sans ambiguïté lors d'un balayage. En effet, la fonction $F_{r_{lin-uni}} = \sin(N\gamma)/N \sin \gamma$ est périodique de période π suivant γ . Un autre lobe dont l'importance est identique au faisceau principal peut apparaître dans la zone $0 \leq \psi \leq 180^\circ$ soit $(\beta d - \alpha) \leq 2\gamma \leq (-\beta d - \alpha)$ lorsque $2\beta d$ couvre plus d'une période. Cet autre lobe s'appelle lobe de périodicité du réseau ("grating lobe").

Un balayage sans ambiguïté est possible tant que le faisceau principal reste dans la zone sans ambiguïté :

$$\psi_{s-ambmin}^{max} \geq \arccos\left(\pm \frac{2\pi - \beta d}{\beta d}\right). \quad (24)$$

Sinon, un lobe de périodicité du réseau (ou même des lobes de périodicité) est rencontré dans la direction où la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ redevient maximale soit lorsque $2\gamma = \pm 2k\pi$ (avec $k = 1, 2, \dots$) :

$$\psi_{max_k} = \arccos\left(\frac{\alpha \pm 2k\pi}{\beta d}\right) \quad (25)$$

²Il ne faut pas oublier que l'angle est modulo 2π donc α va de $-\pi$ à $+\pi$.

- Les zéros du diagramme de rayonnement apparaissent lorsqu'on a $2\gamma = \pm \frac{2k\pi}{N} = \beta d \cos \psi_{nul_k} - \alpha$ (avec $k = 1, 2, \dots$), soit aux angles

$$\psi_{nul_k} = \arccos \left(\frac{\alpha \pm \frac{2k\pi}{N}}{\beta d} \right). \quad (26)$$

On peut vérifier qu'un espacement inter-élément moindre qu'une demi-longueur d'onde $d \leq \lambda/2$, permet de balayer le demi espace entier (ψ va de 0 à π) sans ambiguïté. En augmentant la distance d , des lobes de périodicité du réseau apparaissent dans le diagramme de rayonnement causant des ambiguïtés. L'espacement inter-élément de $\lambda/2$ équivaut à la période correspondant à la fréquence de *Nyquist* dans la théorie de l'échantillonnage. N'oublions pas que chaque élément réalise un échantillon spatial.

Lorsque les éléments sont directionnels, ils possèdent eux-mêmes un diagramme de rayonnement représenté par $F_e(\Psi_e)$ qui peut servir à éliminer les lobes de périodicité du réseau sans aller au delà, bien sûr, de la couverture du lobe principal de l'élément.

Le nombre de passages par zéro correspond exactement à $(N - 1)$ sur une période de 2π . Le diagramme de rayonnement aura, en conséquence, $(N - 1)$ nuls si la distance inter-élément vaut $\lambda/2$. Ceci demeure vrai même si l'alimentation est quelconque. On dira que cette antenne-réseau possède $(N - 1)$ degrés de liberté. Cela pourrait être utile pour placer les nuls dans la direction où il y a des signaux interférents ou à des endroits spécifiques pour ajuster le niveau des lobes secondaires.

Exercice 1

Une antenne-réseau linéaire uniforme contient 6 éléments isotropes espacés de 0.6λ . On voudrait que cette antenne pointe dans la direction $\psi = 45^\circ$ par rapport à l'axe du réseau en utilisant une alimentation à phase progressive.

- Déterminez le déphasage inter-élément à appliquer.

Selon (22), le déphasage doit être de :

$$\alpha = \beta d \cos(45^\circ) = (360^\circ)(0.6)(0.707) = 152.7^\circ.$$

- Vérifiez s'il existe une ambiguïté ou non avec de tels paramètres.

Pour s'assurer d'aucun lobe de périodicité, il suffit d'appliquer (24) :

$$\psi_{s-amb_{min}} = \arccos((360 - 216)^\circ / 216^\circ) = \arccos(0.667) = 48.2^\circ$$

$$\psi_{s-amb_{max}} = \arccos(-0.667) = 131.8^\circ.$$

Donc, avec un tel espacement, on pourrait balayer sans ambiguïté de 48.2° à 131.8° ; les bornes sont dépassées. En plaçant un lobe à 45° , un lobe de périodicité existe ailleurs. Il se situe, pour $k = 1$ selon (25), à :

$$\psi_{max_k} = \arccos \left(\frac{\alpha - 2\pi}{\beta d} \right)$$

soit

$$\psi_{max_k} = \arccos \left(\frac{-207.3^\circ}{216^\circ} \right) = 163.7^\circ.$$

4.2 Facteur de réseau graphique rapide

Il existe une technique simple pour tracer rapidement le facteur de réseau obtenu avec une antenne-réseau linéaire à alimentation progressive. Cette technique utilise l'expression du facteur de réseau suivant (17) avec (21) pour ce type de réseau. La figure 8 illustre les quelques étapes qui sont décrites ci-dessous.

On trace la fonction $F_{r_{lin-uni}} = \frac{\sin(N\gamma)}{N \sin(\gamma)}$ selon l'abscisse 2γ entre 0 et 2π telle que :

- elle vaut l'unité (les grands maxima) aux deux extrémités ;
- elle possède $N - 1$ zéros aux endroits tels que les maxima et les zéros sont équidistants (le premier zéro est donc à $2\pi/N$, le second à $2 \times 2\pi/N$ et ainsi de suite) ;
- son plus petit maximum³ (le plus proche de π) vaut exactement $1/N$;
- elle se périodise pour les abscisses inférieures à 0 ou supérieures à 2π .

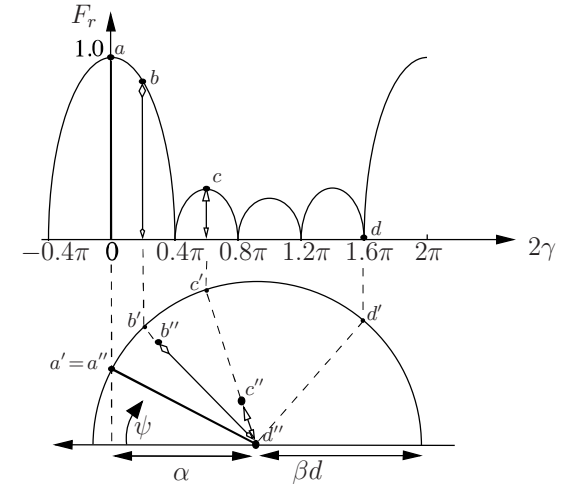


FIGURE 8 – Technique pour tracer le facteurs de réseau rapidement avec $N = 5$.

Sous cette courbe, on trace un demi-cercle supérieur tel que :

- le centre du demi-cercle se situe vis-à-vis l'abscisse α (l'angle ψ subit ici une rotation de 180° , sinon prendre $-\alpha$) ;
- le rayon du demi-cercle vaut βd

³Les maxima adjacents aux grands maxima valent entre 0.27 (avec $N = 4$) à 0.21 (avec $N \rightarrow \infty$).

Puisque $-1 \leq \cos \psi \leq 1$, une portion seulement du domaine de la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ est utilisée, c'est la zone de visibilité du réseau

$$\alpha - \beta d \leq 2\gamma \leq \alpha + \beta d.$$

Le facteur de réseau à l'angle ψ est la valeur de la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ évaluée à l'abscisse $2\gamma = \beta d \cos \psi - \alpha$. Or, le demi-cercle étant décalé de α et ayant un rayon de βd , chaque extrémité se trouve vis-à-vis les valeurs limites de 2γ car la fonction cosinus prend les valeurs de 1 à -1 lorsque ψ va de 0 à 180°. Il suffit de terminer la correspondance entre 2γ et l'angle ψ par une projection inverse qui réalise l'arccosinus. Cette projection utilise les points sur la circonférence; la correspondance se fait entre deux points – l'un sur la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ tels les points a, b, c et d sur la figure 6.8 et l'autre sur la circonférence du demi-cercle tels les points a', b', c' et d' – se trouvant au même abscisse. Pour une valeur donnée d'abscisse 2γ , le point sur la circonférence correspondant se situe sur le rayon faisant un angle ψ .

Finalement, on rapporte la valeur p de la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ sur le segment du rayon avec un facteur d'échelle choisi pour que l'unité – i.e. valeur maximale de la fonction $F_{r_{lin-uni}}$ – corresponde à la longueur du rayon. On obtient les points qui formeront le facteur de réseau en fonction de l'angle ψ tels les points a'', b'', c'' et d'' de la figure 8.

En prenant quelques points stratégiques – habituellement, les zéros et les maxima principaux ou secondaires, on arrive facilement à tracer l'allure du facteur de réseau.

Exercice 2

Une antenne-réseau linéaire uniforme contient 8 éléments espacés de manière à ce que $\beta d = 200^\circ$. L'alimentation à phase progressive est choisie avec un déphasage inter-élément de 120° .

- Tracez approximativement le facteur de réseau par la technique graphique.

On commence par tracer la fonction $\sin(8\gamma)/8\sin\gamma$ entre $0 \leq 2\gamma \leq 360^\circ$. Cette fonction comporte 7 zéros aux endroits ($45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 215^\circ, 270^\circ$ et 315°); elle atteint l'unité – les maxima principaux – à 0° et 360° ; elle est finalement symétrique par rapport à 180° . Les maxima secondaires situés au milieu de 2 zéros consécutifs, décroissent en s'en allant vers 180° ; les maxima secondaires les plus faibles (les 3e et 4e de part et d'autre des maxima principaux) atteignent $1/N = 0.125$.

On trace le demi-cercle dont le centre se trouve vis-à-vis $2\gamma = \alpha = 120^\circ$, d'un rayon équivalent à $\beta d = 200^\circ$ comme sur la figure ci-dessus. On projette ensuite les zéros ou les maxima sur la circonférence et on rapporte les valeurs de la fonction sur le segment de rayon avec le facteur d'échelle appropriée.

Finalement, le facteur de réseau exact est reproduit à la figure 6.10.

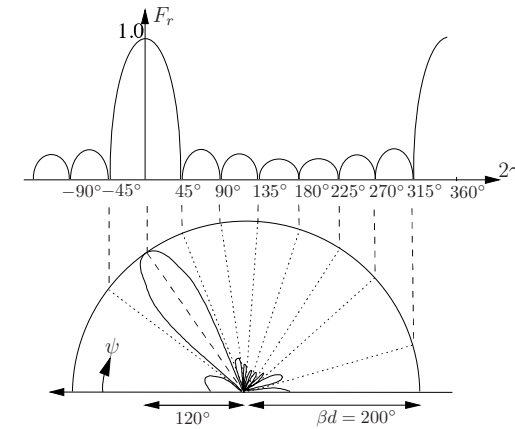


FIGURE 9 – Obtention graphique du facteur de réseau pour l'exercice 2.

Exercice 3

Une antenne-réseau linéaire uniforme contient 5 éléments espacés de 0.6λ . L'alimentation à phase progressive est choisie avec $\alpha = 124^\circ$.

- Tracez approximativement le facteur de réseau par la technique graphique.

La fonction $\sin(5\gamma)/5\sin\gamma$ possède 4 zéros (à $2\gamma = 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$, et 288°).

Après avoir tracé le demi-cercle centré à $2\gamma = \alpha = 124^\circ$, d'un rayon équivalent à $\beta d = 216^\circ$, projeté les zéros et maxima et rapporté les valeurs de la fonction sur le segment de rayon, on obtient le facteur de réseau de la figure 6.10b.

- Estimez et calculez la direction visée par le lobe principal.

Selon la figure 10.b, on voit que le lobe semble pointer vers $\psi_{max} \approx 60^\circ$. Plus précisément, en prenant (22), on trouve :

$$\psi_{max} = \arccos\left(\frac{124^\circ}{216^\circ}\right) = 55.0^\circ.$$

- Expliquez la raison du gros lobe en $\psi = 180^\circ$.

La somme de $\alpha + \beta d = 124^\circ + 216^\circ = 340^\circ$ vaut presque 360° de sorte qu'un lobe de périodicité du réseau commence à apparaître. Il n'est pas à son maximum car $340^\circ < 360^\circ$.

- Donnez les directions des zéros du facteur de réseau.

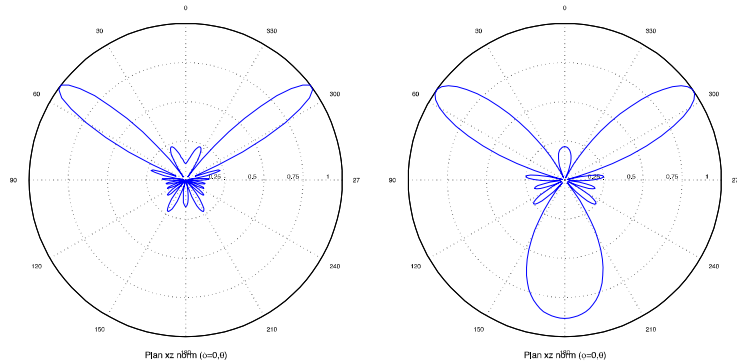


FIGURE 10 – Facteur de réseau pour les exercices a) 2 et b) 3.

Selon (26), on obtient avec $k = 1$, $\psi_{nul_1} = 24.8^\circ$ et 76.1° (donc la largeur du lobe principal de nul à nul vaut $\Theta_{BWFN} = 76.1^\circ - 24.8^\circ = 51.3^\circ$); avec $k = 2$, $\psi_{nul_2} = 95.3^\circ$; avec $k = 3$, $\psi_{nul_3} = 115.2^\circ$; et avec $k = 4$, $\psi_{nul_4} = 139.4^\circ$.

4.3 Rayonnement transversal et longitudinal

De toutes les possibilités ressortent deux cas à connaître :

- Rayonnement transversal ou “broadside array”
Il s’agit du cas, rappelons-le, où le lobe principal est perpendiculaire à l’axe du réseau i.e. $\psi = \pi/2$; il en fait le tour.
- Rayonnement longitudinal ou “end-fire array”
Ici, le ou les deux lobes principaux sont dans l’axe du réseau i.e. $\psi = 0$ et/ou π ; dans la version ordinaire, il n’y a qu’un seul lobe principal.

Les figures 11 et 12 montrent l’allure du rayonnement transversal et longitudinal (à double lobes et ordinaire) respectivement.

La version ordinaire du rayonnement longitudinal est préférable à celle avec deux lobes : on obtient un diagramme de rayonnement en “pencil beam” sans vue arrière et, du même coup, fait presque doubler la directivité. La façon évidente d’y parvenir consiste à réduire l’espacement inter-élément en dessous de la demi-longueur d’onde. Comme la région de visibilité à une largeur de $2\beta d$ selon γ (voir (18) ou (21)), il faudra la réduire à une valeur inférieure à 2π , valeur obtenue avec un espacement demi-longueur d’onde. Or le second lobe est justement celui apparaissant à $\gamma = 2\pi$. La zone de visibilité sera comprise entre 0 et quelque part avant le dernier nul i.e. $2\pi - (2\pi/N)$, comme le montre la figure 13 pour un réseau de 5 éléments. Ainsi :

$$d_{long,ord} \leq \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right). \quad (27)$$

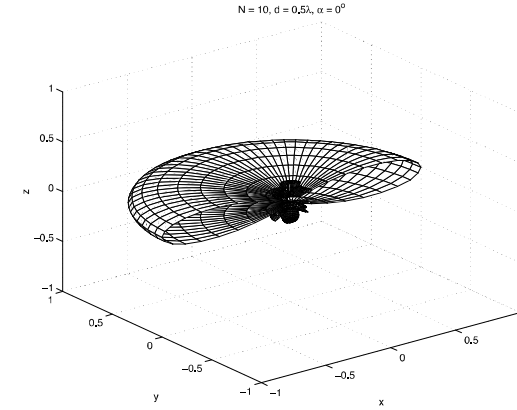


FIGURE 11 – Rayonnement transversal.

Il existe une troisième version du rayonnement longitudinal. Pour augmenter la directivité au maximum, *Hansen et Woodyard* en 1938, ont proposés d’augmenter le déphasage inter-élément α , faisant en sorte de déplacer le faisceau légèrement hors de la zone de visibilité tout en s’assurant que le lobe arrière reste petit devant le lobe principal avant et en respectant la distance maximale inter-élément pour un rayonnement longitudinal ordinaire. Le déphasage :

$$\alpha_{h.w} = \pm \left(\beta d + \frac{\pi}{N} \right) \quad (28)$$

est appelée la condition *Hansen-Woodyard*. Son principe apparaît sur la figure 13. Le lobe principal devient plus étroit – d’où une plus grande directivité – au détriment cependant de l’importance accrue des lobes secondaires une fois le diagramme normalisé.

4.4 Paramètres du réseau linéaire uniforme

Paramètre	Transversal	Longitudinal ord.	Longitudinal H-W
α	0	$\pm \beta d$	$\pm(\beta d + \pi/N)$
Θ_{BWFN}	$2 \frac{\lambda}{Nd} (Nd \gg \lambda)$	$2\sqrt{2 \frac{\lambda}{Nd}} (Nd \gg \lambda)$	$2\sqrt{\frac{\lambda}{Nd}} (Nd \gg \lambda)$
Θ_{HPBW}	$2 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\lambda}{Nd} \right) \right)$	$2 \arccos \left(1 - \frac{\lambda}{Nd} \right)$	$2 \arccos \left(1 - \frac{\lambda}{2Nd} \right)$
D	$0.886 \frac{\lambda}{Nd} (Nd \gg \lambda)$	$2\sqrt{0.886 \frac{\lambda}{Nd}} (Nd \gg \lambda)$	$2\sqrt{0.28 \frac{\lambda}{Nd}} (Nd \gg \lambda)$
	$2 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{0.4428\lambda}{Nd} \right) \right)$	$2 \arccos \left(1 - \frac{0.4428\lambda}{Nd} \right)$	$2 \arccos \left(1 - \frac{0.14\lambda}{Nd} \right)$
	$\frac{2Nd}{\lambda}$	$\frac{4Nd}{\lambda}$	$\frac{7.28Nd}{\lambda}$

TABLE 1 – Évaluation des paramètres d’un réseau linéaire uniforme.

Le tableau 1 regroupe les équations, parfois approximatives, des divers paramètres selon le type de rayonnement. On y remarque lorsque N augmente que :

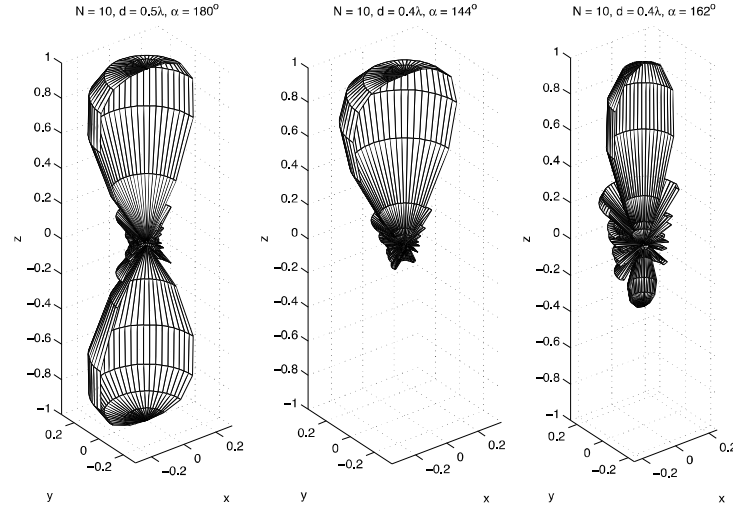


FIGURE 12 – Rayonnement longitudinal à double lobes, ordinaire et de *Hansen-Woodyard*.

- le lobe principal devient de plus en plus directif et que la directivité augmente ;
- que le rapport en intensité des lobes secondaires à celui du lobe principal R_0 (“Side Lobe Level”) diminue mais tend vers une limite de 13.5 dB⁴ puisque :

$$R_0 = \frac{1}{N \sin(3\pi/(2N))} ; \quad (29)$$

5 Alimentation non-uniforme

Si maintenant, on choisit d’avoir des modules des courants d’alimentation différents (ou coefficient de pondération en réception), cela procure plus de flexibilité. Il devient possible de jouer sur des paramètres supplémentaires du facteur de réseau comme, par exemple :

- positionner un certains nombre de zéros

Un algorithme simple se base sur l’expansion pour trouver les coefficients d’un filtre connaissant les zéros de la fonction de transfert en z .

- ajuster le niveau des lobes secondaires.

Plusieurs méthodes parviennent à la réduire le niveau des lobes secondaires : *Dolph-Tchebychev*, *Taylor-Kaiser*, binomiale pour n’en nommer que quelques-unes. Cette

⁴Il s’agit là du désavantage majeur du réseau linéaire uniforme avec alimentation à module constant. Pour diminuer les lobes secondaires, la tactique consiste à pondérer en module, les courants d’alimentation comme on le fait dans un fenêtrage avec une transformée de *Fourier*.

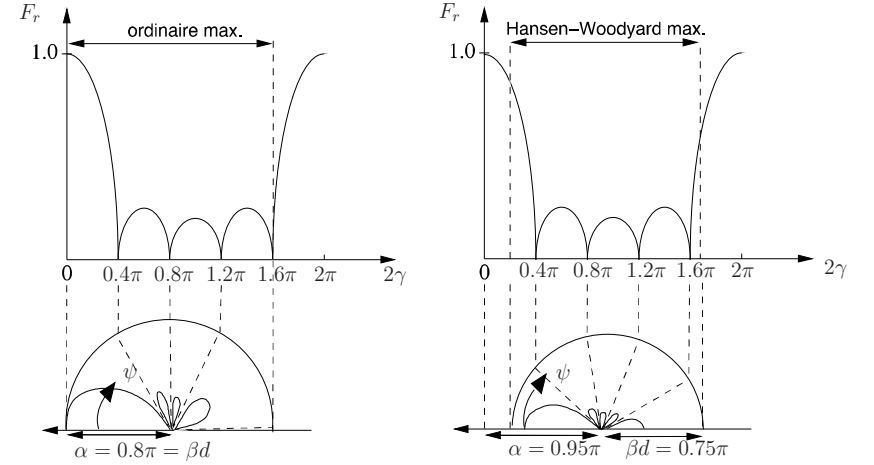


FIGURE 13 – Principe pour rayonnement longitudinal ordinaire et de *Hansen-Woodyard*.

réduction se fait au détriment de la largeur du lobe principal comme c’est le cas dans la conception de filtres.

5.1 Placement des zéros

Plutôt que de diriger un lobe principal, *Schelkunoff* a proposé de faire un placement propice des zéros du facteur de réseau (et donc du diagramme de rayonnement).

Le facteur de réseau peut s’exprimer sous la forme d’un polynôme de degré $N - 1$; il a ainsi $N - 1$ zéros comme il a été vu d’ailleurs avec le réseau linéaire uniforme. Selon (13) :

$$\bar{f}_{r_{lin}}(z) = \sum_{k=1}^N \bar{t}_k z^{k-1} = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{N-1}) \bar{t}_N . \quad (30)$$

Il s’agit maintenant de bien choisir les z_i – qui sont les zéros du polynôme en z – dans le plan en z . Or les zéros du polynômes correspondent facilement aux angles ψ_i où apparaissent un zéro du facteur de réseau de cette manière :

$$z_i = e^{j2\gamma_i} = e^{j\beta d \cos \psi_i} . \quad (31)$$

Pour trouver les courant d’alimentation relatifs \bar{t}_k de (30), il ne reste qu’à faire l’expansion de la fonction.

Deux problèmes à cette méthode très, voire trop simple. D’abord, on a aucune idée dans quelle direction sera le lobe principal, s’il y en a un. Ensuite, il faut autant de zéros que le $N - 1$, pas plus pas moins.

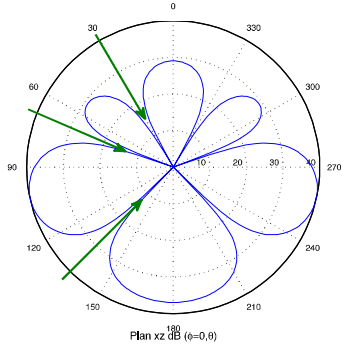


FIGURE 14 – Facteur de réseau pour l'exercice 4 en dB.

Exercice 4

Une antenne-réseau de 4 éléments isotropes espacés de 0.4λ , doit éliminer les signaux provenant des directions $\theta = 30, 70$ et 135° .

- Déterminez les coefficients de pondération à appliquer à chaque élément

L'antenne opère en réception. Les coefficients de pondération complexe \bar{w}_k sont l'équivalent des courants d'alimentation relatifs \bar{i}_k . Les trois zéros en z se calculent à partir de (31) pour donner :

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{j(2\pi)(0.4) \cos 30^\circ} = -0.569 + j0.822 \\ z_2 &= 0.653 + j0.758 \\ z_3 &= -0.205 - j0.979. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \bar{f}_{rin}(z) &= (z + 0.569 - j0.822)(z - 0.653 - j0.758)(z + 0.205 + j0.979) \\ &= z^3 + (0.122 - j0.601)z^2 + (0.535 - j0.300)z - (0.307 + j0.952) \end{aligned}$$

d'où on obtient le résultat suivant :

$$\bar{w}_1 = -0.307 - j0.952 \quad \bar{w}_2 = 0.535 - j0.300 \quad \bar{w}_3 = 0.122 - j0.601 \quad \bar{w}_4 = 1.$$

On remarque que le module des coefficients varient ce qui reviendrait à dire que les courants d'alimentation n'auraient pas la même amplitude. Le diagramme est celui dessiné sur la figure 14.

6.5.2 Pondération de Dolph-Tchebychev

Basée sur les polynômes de *Tchebychev*, la méthode développée par *Dolph* en 1946, permet de contrôler le niveau des lobes secondaires.

Cette méthode repose sur deux caractéristiques :

- D'une part, l'expression du facteur de réseau avec une distribution de l'amplitude des courants d'alimentation symétrique i.e. $i_1 = i_N, i_2 = i_{N-1}$, etc. ($i_k = |\bar{i}_k|$) est particulière. Selon le nombre pair ou impair d'éléments N , on a ($\gamma = \frac{1}{2}\beta d \cos \psi$) :

$$f_r(\gamma) = \begin{cases} \sum_{k=1}^M i_{\frac{N}{2}+1-k} \cos((2k-1)\gamma) & \text{pour } N = 2M \\ \sum_{k=1}^{M+1} i_{\frac{N+1}{2}-k} \cos(2(k-1)\gamma) & \text{pour } N = 2M + 1. \end{cases} \quad (32)$$

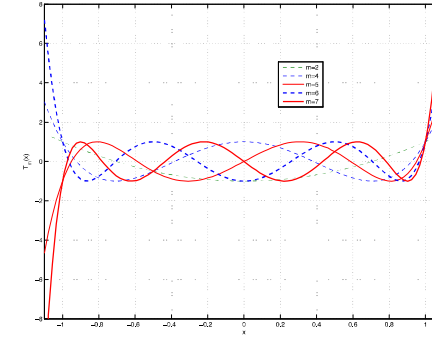


FIGURE 15 – Polynômes de *Tchebychev* d'ordre m .

- D'autre part, sur la figure 15, les polynômes en x de *Tchebychev* présentent des zéros compris entre $-1 \leq x \leq +1$ avec une ondulation contrôlée telle que les minima valent -1 et les maxima +1. Tous les polynômes passent par le point $(1, 1)$ et $(-1, \pm 1)$ selon l'ordre pair ou impair. Cependant, en dehors de cette plage $|x| > 1$, les polynômes divergent suivant le cosinus hyperbolique. En posant

$$x = \cos \gamma \quad (33)$$

on trouve les fameux polynômes recherchés

$$\begin{aligned} m=0 & \cos(0\gamma) = 1 & T_0(x) &= 1 \\ m=1 & \cos(1\gamma) = \cos \gamma & T_1(x) &= x \\ m=2 & \cos(2\gamma) = 2 \cos^2 \gamma - 1 & T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ m=3 & \cos(3\gamma) = 4 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma & T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ m=4 & \cos(4\gamma) = 8 \cos^4 \gamma - 8 \cos^2 \gamma + 1 & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned} \quad (34)$$

La récurrence entre chaque ordre des polynômes s'établit ainsi :

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x). \quad (35)$$

Cependant, pour $|x| > 1$, il est clair que γ dans (33) devient un nombre imaginaire pur, ce qui revient à faire un cosinus hyperbolique car $\cos(jx) = \cosh(x)$. Ainsi :

$$T_m(x) = \cos(m \cos^{-1}(x)) \quad \text{pour } |x| \leq 1 \quad (36)$$

$$T_m(x) = \cosh(m \cosh^{-1}(x)) \quad \text{pour } |x| > 1. \quad (37)$$

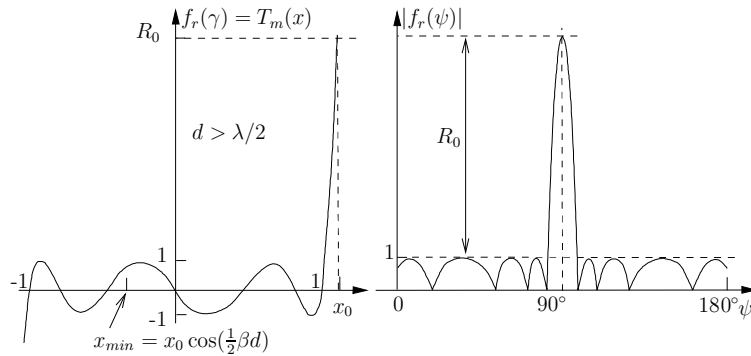


FIGURE 16 – Relation entre le polynôme de *Tchebychev* ($m = 7$) et le facteur de réseau.

L'idée est de placer le lobe principal dans la région divergente à $\gamma = 0$ soit $x = x_0 > 1$ alors que tous les lobes secondaires se trouvent dans la région d'ondulation de $-1 \leq x_{\min} < x \leq 1$. Les étapes, visualisées sur la figure 16, sont les suivantes :

- Sélectionner le facteur de réseau approprié dans (32) selon N ;
- Faire l'expansion en remplaçant chaque $\cos(m\gamma)$ par le polynôme de *Tchebychev* correspondant. Il faut choisir l'ordre du polynôme comme étant un de moins que le nombre d'éléments soit $m = N - 1$;
- Déterminer le point x_0 tel que $T_m(x_0) = R_0$, le rapport entre le niveau du lobe principal et celui des lobes secondaires ("Side Lobe Level") :

$$R_0 = T_{N-1}(x_0) = \cosh((N-1) \cosh^{-1}(x_0))$$

soit⁵

$$x_0 = \cosh\left(\frac{\cosh^{-1}(R_0)}{N-1}\right). \quad (38)$$

- Substituer

$$\cos \gamma = \frac{x}{x_0} \quad (39)$$

⁵On peut aussi utiliser $x_0 = \frac{1}{2} \left(\left(R_0 + \sqrt{R_0^2 - 1} \right)^{1/(N-1)} + \left(R_0 - \sqrt{R_0^2 - 1} \right)^{1/(N-1)} \right)$.

dans chaque terme du polynôme. Le $\cos \gamma$ est remplacé par x/x_0 et non par x seulement comme dans la partie droite de (34). Ainsi, x_0 devient un facteur d'échelle pour étendre⁶ la zone du $\cos \gamma$ jusqu'à 1 alors que x va de $x_{\min} = x_0 \cos(\frac{1}{2}\beta d)$ à x_0 .

- Égaler le polynôme en x obtenu avec celui de *Tchebychev* du même ordre soit $N - 1$.

Exercice 5

On veut réaliser un diagramme de rayonnement dont les lobes secondaires sont inférieurs de 20 dB par rapport au lobe principal à partir d'un réseau de $N = 7$ éléments espacés d'une distance $d = 0.5\lambda$.

- Calculez les courants d'alimentation relatifs à fournir aux éléments pour un rayonnement transversal.

Puisque N est impair, on choisit $M = 3$. Dans (32), le facteur de réseau correspondant est :

$$f_r(\gamma) = i_4 + i_3 \cos(2\gamma) + i_2 \cos(4\gamma) + i_1 \cos(6\gamma).$$

On fait l'expansion pour aboutir à

$$\begin{aligned} f_r &= i_4 + i_3 (2 \cos^2 \gamma - 1) + i_2 (8 \cos^4 \gamma - 8 \cos^2 \gamma + 1) \\ &\quad + i_1 (32 \cos^6 \gamma - 48 \cos^4 \gamma + 18 \cos^2 \gamma - 1) \\ &= (32i_1) \cos^6 \gamma + (-48i_1 + 8i_2) \cos^4 \gamma + (18i_1 - 8i_2 + 2i_3) \cos^2 \gamma + (-i_1 + i_2 - i_3 + i_4). \end{aligned}$$

D'autre part, le facteur d'échelle se calcule selon (38) avec $R_0 = 10^{20/20} = 10$ pour donner :

$$x_0 = \cosh\left(\frac{\cosh^{-1}(10)}{6}\right) = \cosh(2.99/6) = 1.127.$$

On obtient les coefficients du polynômes en x par la substitution (39) :

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{32i_1}{(1.127)^6} x^6 + \frac{8i_2 - 48i_1}{(1.127)^4} x^4 + \frac{2i_3 - 8i_2 + 18i_1}{(1.127)^2} x^2 + (i_4 - i_3 + i_2 - i_1) \\ &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned}$$

On solutionne par élimination de *Gauss-Jordan* les 4 équations pour déterminer les courants d'alimentation

$$\begin{bmatrix} 15.61 & 0 & 0 & 0 \\ -29.75 & 4.96 & 0 & 0 \\ 14.17 & -6.30 & 1.57 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ -48 \\ 18 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

⁶Soit le cas transversal avec $\alpha = 0$. Le lobe principal se situe à $\psi = 90^\circ$ soit à $\gamma = 0$. Selon (39), on a $x/x_0 = 1$ donc $x = x_0$ pour le lobe principal. Le diagramme de rayonnement se rend jusqu'à $\psi = 0$ ou $\psi = 180^\circ$, soit $\gamma = 0.5\beta d$ et ainsi selon (39) $x = x_{\min} = x_0 \cos(0.5\beta d)$.

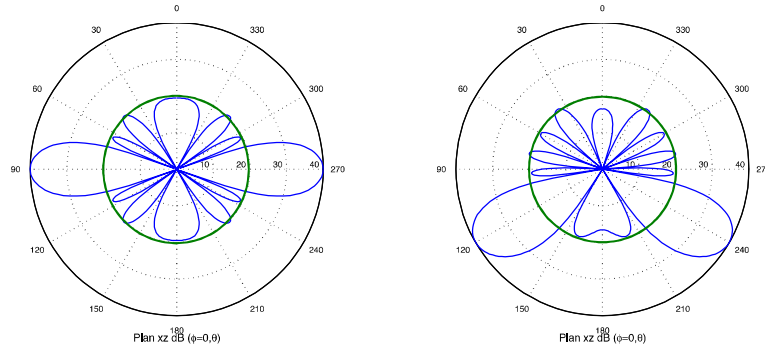


FIGURE 17 – Facteurs de réseau pour l'exercice 5 en dB.

On trouve $i_1 = 2.05$, $i_2 = 2.616$, $i_3 = 3.451$ et $i_4 = 3.884$. Comme la distribution est symétrique alors $i_5 = 3.451$, $i_6 = 2.616$ et finalement $i_7 = 2.05$.

La figure 17 de gauche montre le facteur de réseau obtenu. On observe que tous les lobes secondaires sont au même niveau soit 20 dB sous celui du lobe principal.

- Estimez à nouveau les courants d'alimentation pour pointer le lobe principal dans la direction $\theta = 120^\circ$.

Pour réorienter la direction du lobe principal dans une direction autre que celle transversale, il suffit d'appliquer un déphasage progressif aux courants d'alimentation trouvés précédemment. Selon (14) convertie en degrés :

$$\alpha_k = -(k-1)(360)(0.5) \cos(120^\circ) = (k-1)(90^\circ) .$$

Les diagrammes sur la figure 17 montrent les facteurs de réseau obtenus. On observe que tous les lobes secondaires sont au même niveau soit 20 dB sous celui du lobe principal, exception faite des lobes longitudinaux. Le facteur de réseau de droite est dit du "homard" !

Il existe une façon plus rapide d'obtenir les courants d'alimentation (ou les coefficients de pondération). Elle passe par les zéros du facteur de réseau mis dans l'expression en z comme celle en (30), et en faire ensuite l'expansion. En effet, il existe un lien direct entre les zéros du facteur de réseau et les zéros du polynômes

- Déterminer les zéros du polynômes de *Tchebychev* $T_{N-1}(x)$

$$T_{N-1}(x_i) = \cos((N-1) \cos^{-1}(x_i)) = 0 \implies x_i = \cos\left(\frac{(i-0.5)\pi}{N-1}\right) . \quad (40)$$

- Convertir ces zéros x_i vers l'espace γ en considérant le facteur d'échelle par l'équation (39) pour obtenir les zéros $\gamma_i = \cos^{-1}(x_i/x_0)$;
- Convertir les zéros γ_i vers l'espace en z par l'équation (31) dans laquelle on se rappelle que $\gamma_i = \frac{1}{2}\beta d \cos \psi_i$. On obtient les $z_i = e^{-j2\gamma_i}$
- Faire l'expansion de la fonction en z vers la forme polynomiale pour retrouver les courants d'alimentation \bar{i}_k comme les coefficients devant .

Exercice 6

Soit les données de l'exemple précédent.

- Calculez les \bar{i}_k pour un rayonnement transversal avec la nouvelle procédure.

Les zéros obtenus de (40) sont :

$$\underline{x}_i = [0.966 \ 0.707 \ 0.26 \ -0.26 \ -0.707 \ -0.966] .$$

D'où, ayant obtenu préalablement à l'exemple précédent $x_0 = 1.127$:

$$\underline{\gamma}_i = \cos^{-1}\left(\frac{\underline{x}_i}{x_0}\right) = [0.541 \ 0.893 \ 1.339 \ 1.803 \ 2.249 \ 2.600] .$$

Les zéros $\underline{z}_i = e^{j2\gamma_i}$ sont placés dans l'expression (30). L'expansion vers la forme polynomiale en z donne finalement :

$$f_r = 1.0z^6 + 1.276z^5 + 1.684z^4 + 1.839z^3 + 1.684z^2 + 1.276z + 1.0$$

On y voit les 7 valeurs symétriques des \bar{i}_k lesquelles sont identiques à celles obtenues à une constante près, soit $2.05 = i_N$ précédent.

5.3 Directivité d'un réseau linéaire

Si on réalise l'intégration sur la sphère complète du facteur de réseau, on peut obtenir l'angle solide du faisceau. Après quelques acrobaties mathématiques, on parvient à :

$$\Omega_{a_{res-lin}} = \frac{4\pi}{|f_r(0)|^2} \sum_{m,n} \bar{i}_m \bar{i}_n^* \frac{\sin((m-n)\beta d)}{(m-n)\beta d} \quad (41)$$

où $|f_r(0)| = \sum_m |\bar{i}_m|$ est le module maximal du facteur de réseau, obtenu lorsque $\gamma = 0$ i.e. tous les signaux en phase.

Ainsi la directivité du réseau seul (sans compter sur la directivité des éléments du réseau eux-mêmes), s'exprime comme :

$$D_{res-lin} = \frac{|f_r(0)|^2}{\sum_{m,n} \bar{i}_m \bar{i}_n^* \frac{\sin((m-n)\beta d)}{(m-n)\beta d}} . \quad (42)$$

Cette expression se simplifie dans les cas particuliers suivants.

- Réseau linéaire uniforme

Les modules des courants d'alimentation sont identiques donc

$$D_{res-lin-uni} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{N-m}{m\beta d} \sin(m\beta d) \cos(m\alpha)} . \quad (43)$$

- Réseau à espacement $d = \lambda/2$

Le produit $\beta d = \pi$ de sorte que la fonction $\text{sinc}(\cdot)$ agit comme une fonction *Dirac* $\delta(m-n)$ donc

$$D_{res-lin-\lambda/2} = \frac{|\sum_m \tilde{l}_m|^2}{\sum_m |\tilde{l}_m|^2} . \quad (44)$$

La valeur maximale de la directivité du réseau en rayonnement transversal est atteinte dans le cas très spécifique d'un réseau linéaire uniforme avec espacement $\lambda/2$. Ce maximum vaut :

$$D_{res-lin-max} = N .$$

Pour un espacement arbitraire d , il est montré que le vecteur des coefficients de pondération \underline{w} qui maximise la directivité est donné par :

$$\underline{w}_{opt} = \underline{A}^{-1} \underline{u} \quad (45)$$

où $\underline{u} = [1, 1, \dots, 1]^T$ est un vecteur de longueur N rempli de 1, et \underline{A} est la matrice appelée “prolate” définie à partir de ses éléments comme ceci :

$$A_{mn} = \frac{\sin((m-n)\beta d)}{(m-n)\beta d}, \quad 0 \leq m, n \leq N-1 . \quad (46)$$

6 Axes du réseau linéaire

Jusqu'à présent, les formulations utilisaient ψ , l'angle entre la direction d'observation et l'axe du réseau à l'origine. Si le réseau est représenté suivant un des axes du système de coordonnées cartésien, on devra faire une correspondance entre ψ et les coordonnées usuelles θ et ϕ . Cette correspondance se réalise via les trois angles directeurs et leur cosinus. L'angle directeur est l'angle formé par la direction de propagation et un des axes cartésiens x , y ou z ; ils sont notés ici ψ_x , ψ_y et ψ_z respectivement⁷.

Il suffit d'un peu de géométrie⁸ pour se rendre compte que :

$$\begin{aligned} \psi_x &= \arccos(\cos \phi \sin \theta) \\ \psi_y &= \arccos(\sin \phi \sin \theta) \\ \psi_z &= \arccos(\cos \theta) = \theta . \end{aligned} \quad (47)$$

⁷L'angle ψ_x est différent de ϕ car ϕ est mesuré de l'axe x vers la projection du vecteur dans le plan xy .

⁸On obtient $\cos \psi_x = \underline{a}_x \cdot \underline{a}_r = \underline{a}_x \cdot (\cos \phi \sin \theta \underline{a}_x + \sin \phi \sin \theta \underline{a}_y + \cos \theta \underline{a}_z) = \cos \phi \sin \theta$ et de même pour les autres.

De manière générale, on écrirait $\cos \psi_k = \underline{a}_k \cdot \underline{a}_r = \cos \phi_k \sin \theta_k \cos \phi \sin \theta + \sin \phi_k \sin \theta_k \sin \phi \sin \theta + \cos \theta_k \cos \theta$ ou les angles ϕ_k et θ_k correspondent aux angles de rotation nécessaire pour aligner les deux systèmes de coordonnées – celui de l'élément et celui global.

Selon le problème demandé, un de ces trois angles directeurs remplacera les différents ψ rencontrés. Par exemple, un réseau linéaire uniforme aligné suivant l'axe x , constitué de N dipôles courts avec alimentation identique, orientés suivant l'axe y et espacés d'une demi-longueur d'onde, aura la fonction caractéristique suivante :

$$f_a(\theta, \phi) = \underbrace{\sin(\arccos(\sin \phi \sin \theta))}_{F_e(\theta, \phi)} \underbrace{\frac{\sin(N(\pi/2)(\cos \phi \sin \theta))}{N \sin((\pi/2)(\cos \phi \sin \theta))}}_{F_r(\theta, \phi)} .$$

Exercice 7

Une antenne-réseau linéaire uniforme est composée de 4 dipôles $\lambda/2$ espacés de $\lambda/2$

- orientés suivant l'axe y
- positionnés sur l'axe x .

Chaque dipôle est alimentée par exactement le même courant en phase.

► Exprimez la fonction caractéristique (peut être non-normalisée) de l'antenne.

Il est clair ici que $\Psi_e \neq \Psi_r$ car $\Psi_e = \psi_y$ à cause de l'orientation des dipôles, et $\Psi_r = \psi_x$ car l'axe de réseau correspond à l'axe x . Ainsi :

$$F_e(\Psi_e) = \frac{\cos(\pi/2 \cos \psi_y)}{\sin \psi_y} = \frac{\cos(\pi/2 \sin \phi \sin \theta)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta}}$$

et

$$F_r(\Psi_r) = \frac{\sin(2\beta d \cos \psi_x)}{4 \sin(0.5\beta d \cos \psi_x)} = \frac{\sin(2\pi \cos \phi \sin \theta)}{4 \sin(0.5\pi \cos \phi \sin \theta)} .$$

On obtient finalement :

$$f_a(\theta, \phi) = \frac{\cos(\pi/2 \sin \phi \sin \theta)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta}} \frac{\sin(2\pi \cos \phi \sin \theta)}{4 \sin(\pi/2 \cos \phi \sin \theta)} .$$

7 Réseau planaire uniforme

Le réseau planaire ajoute une dimension qui permet un balayage sur deux angles : azimuth et élévation. Les applications incluent le radar de pistage ou de recherche, les télécommunications mobiles, etc.

Imaginons un réseau constitué de $N_x \times N_y$ éléments placés dans le plan xy comme sur la figure 18 . On peut voir cette antenne-réseau comme un réseau linéaire uniforme dans l'axe x dont les N_x éléments sont des antennes-réseaux linéaires uniformes de N_y éléments simples alignés dans l'autre axe i.e. y ; ou vice-versa. Pour que tous les “réseaux-éléments” soient considérés identiques, il doit exister une relation constante entre tous les phaseurs

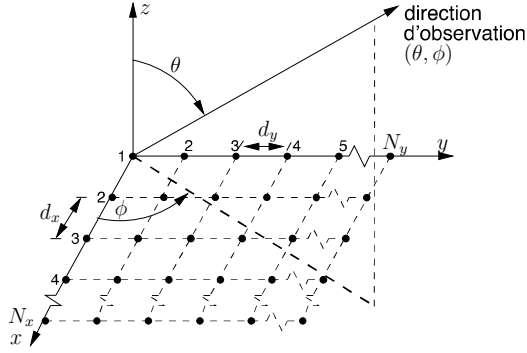


FIGURE 18 – Géométrie d'un réseau planaire uniforme.

courants d'une ligne, prenons la première \bar{i}_{1n} avec les phaseurs courants correspondants \bar{i}_{mn} de toutes les autres lignes ; ou vice-versa pour les colonnes en partant de la première \bar{i}_{m1} .

Ainsi, la fonction caractéristique non-normalisée s'écrit :

$$f_a = F_e(\theta, \phi) \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N_y} \bar{i}_{1n} e^{j(n-1)(\beta d_y \sin \phi \sin \theta - \alpha_y)} \right|}_{\bar{f}_{r_{lin-uni y}}(\theta, \phi)} \underbrace{\left| \sum_{m=1}^{N_x} \bar{i}_{m1} e^{j(m-1)(\beta d_x \cos \phi \sin \theta - \alpha_x)} \right|}_{\bar{f}_{r_{lin-uni x}}(\theta, \phi)} \quad (48)$$

$$= F_e(\theta, \phi) \left| \bar{f}_{r_{plan.uni}}(\theta, \phi) \right|. \quad (49)$$

On multiplie simplement, à cause de la symétrie, les facteurs de réseaux dans chacun des axes pour trouver celui du réseau planaire.

En appliquant (20), (21) et (17), la forme normalisée du facteur de réseau est :

$$F_{r_{plan.uni}}(\theta, \phi) = \left(\frac{\sin(N_x \gamma_x)}{N_x \sin \gamma_x} \right) \left(\frac{\sin(N_y \gamma_y)}{N_y \sin \gamma_y} \right), \quad (50)$$

avec

$$\gamma'_x = \gamma_x - \gamma_{0x} = \frac{1}{2}(\beta d_x \cos \phi \sin \theta - \alpha_x) \quad (51)$$

$$\gamma'_y = \gamma_y - \gamma_{0y} = \frac{1}{2}(\beta d_y \sin \phi \sin \theta - \alpha_y). \quad (52)$$

Deux équations, deux inconnues qui permettent le balayage du demi-espace 3D ; tout est possible. Lorsqu'on veut orienter le faisceau dans la direction (θ_0, ϕ_0) , les déphasages progressifs en x et y entre les éléments doivent être égaux à :

$$\alpha_x = \beta d_x \cos \phi_0 \sin \theta_0 \quad (53)$$

$$\alpha_y = \beta d_y \sin \phi_0 \sin \theta_0. \quad (54)$$

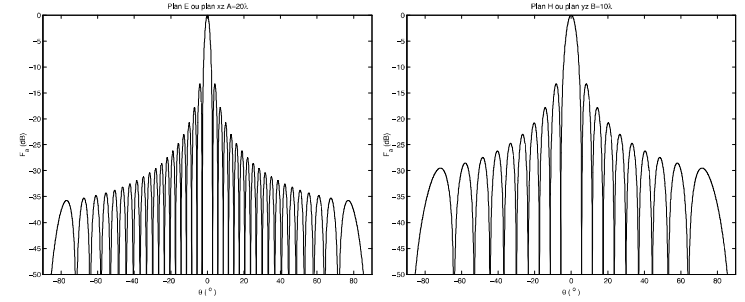


FIGURE 7 – Diagramme de rayonnement typique d'une antenne à ouverture rectangulaire $(20\lambda \times 10\lambda)$.

4 Cornet pyramidal

Le cornet est une antenne qui termine un guide d'onde et qui fait parti des antennes à ouverture. Il augmente graduellement la surface d'émission de la dimension du guide à celle voulue.

- Une large ouverture est souhaitable pour obtenir une bonne directivité ;
- un long cornet est souhaitable pour produire un rayonnement plus efficace par une meilleure adaptation.

4.1 Analyse du rayonnement

L'analyse du rayonnement est similaire mais :

- l'angle d'ouverture du cornet (dans les deux plans pour un cornet rectangulaire) est un paramètre qui s'ajoute pour le calcul du champ E_a dans l'ouverture ;
- la distribution du champ dans l'ouverture :
 - n'est pas uniforme ;
 - dépend du mode supérieur de propagation dans le guide d'alimentation.

L'étude présentée *ne considérera que le mode fondamental TE_{10} avec un guide d'onde rectangulaire* (cornet pyramidal). Le cornet étudié apparaît à la figure 7.8. Les relations géométriques suivantes seront utilisées dans l'analyse subséquente :

$$\ell_h^2 = R_1^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 \quad (31)$$

$$R_h = \frac{A-a}{A} R_1 \quad (32)$$

$$\ell_e^2 = R_2^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \quad (33)$$

$$R_e = \frac{B-b}{B} R_2 \quad (34)$$

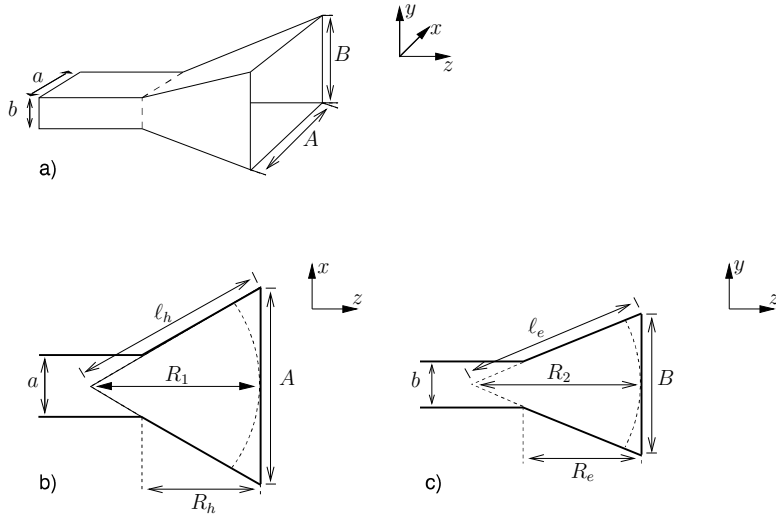


FIGURE 8 – Géométrie du cornet pyramidal : (a) vue en 3D ; coupes (b) dans le plan xz (c) dans le plan yz .

La distribution du champ dans le guide s'écrit :

$$\bar{E}_{ya}(x', y') = E_a \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) e^{-j\beta_{10}(z'+\delta)} \quad (35)$$

$$\bar{H}_{xa}(x', y') = -\frac{\bar{E}_{ya}}{\eta_{gTE_{10}}} \quad (36)$$

où $\eta_{gTE_{10}}$ est l'impédance transverse du guide en mode TE_{10} . Le module du champ dans le cornet est essentiellement une version élargie de la même distribution mais la constante de phase passe progressivement de β_{10} à celle de l'onde plane en espace libre β .

Cependant, les ondes arrivant aux différents points de l'ouverture ne sont plus en phase à cause de la différence de longueur des trajets δ chacun partant du sommet virtuel du cornet et s'en allant au centre de l'ouverture, d'une part, et à un point de coordonnées (x', y') dans l'ouverture, d'autre part. On doit déterminer le déphasage produit car l'intégration des contributions du champ dans l'ouverture est vectorielle. Par géométrie et par approximations binomiales, on trouve :

$$\delta \approx \frac{x'^2}{2R_1} + \frac{y'^2}{2R_2}.$$

La distribution du champ dans l'ouverture devient alors :

$$\bar{E}_{ya}(x', y') = E_a \cos\left(\frac{\pi x'}{A}\right) e^{-j(\frac{\beta_{10}}{2})(\frac{x'^2}{R_1} + \frac{y'^2}{R_2})} \quad (37)$$

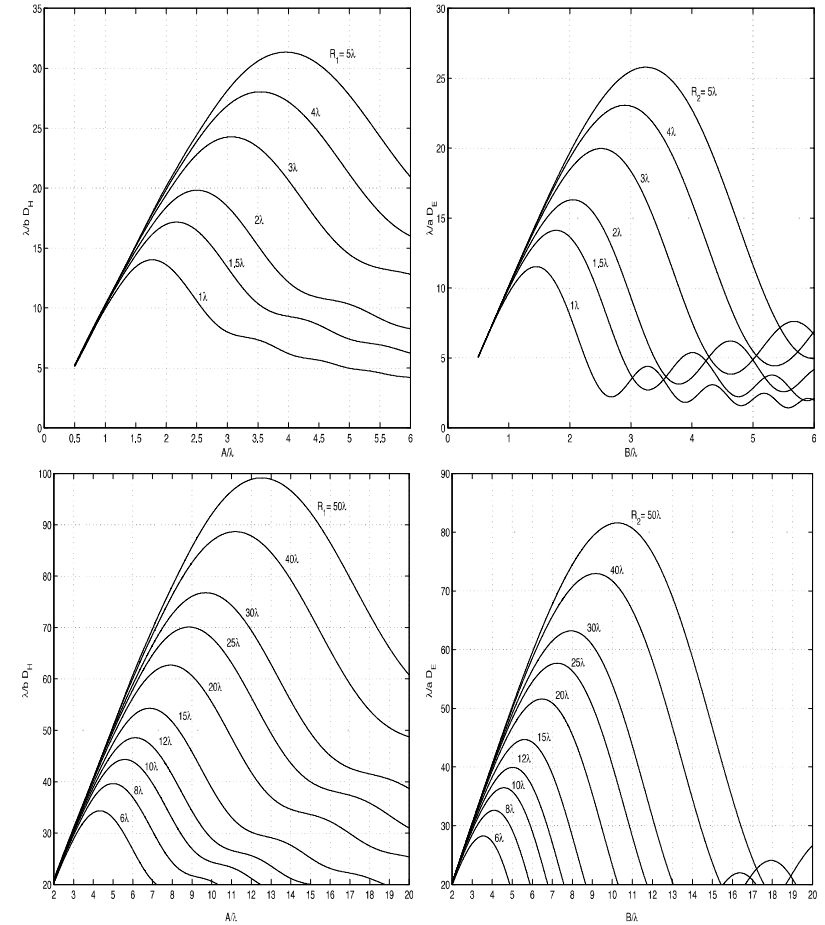


FIGURE 9 – Courbes de directivité universelle : (a) dans le plan H ou xz , (b) dans le plan E ou yz .

laquelle est intégrable avec beaucoup de difficultés. Le résultat est d'ailleurs fort complexe à transcrire.

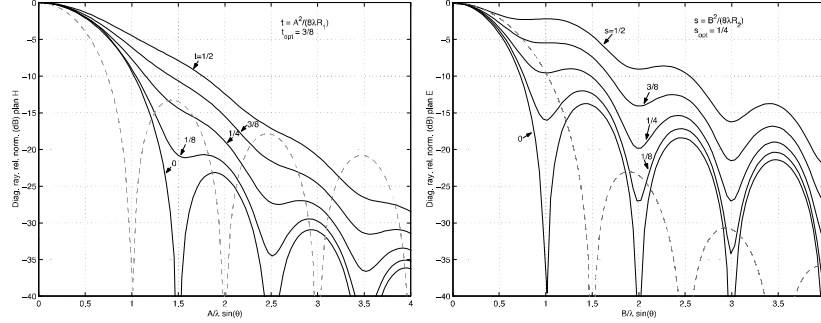


FIGURE 10 – Diagramme de rayonnement relatif normalisé : (a) dans le plan H ou xz , (b) dans le plan E ou yz . Le facteur $(1 + \cos \theta)/2$ est non-inclus.

Heureusement, il existe une famille de courbes dans chacune des plans principaux, reproduites à la figure 9 et à la figure 10, montrant :

- la directivité dite universelle selon les paramètres A , B , R_1 et R_2 . La directivité du cornet pyramidal est alors donnée par :

$$D_{cornet} = \frac{\pi}{32} \left(\frac{\lambda}{a} D_E \right) \left(\frac{\lambda}{b} D_H \right) ; \quad (38)$$

- le diagramme de rayonnement relatif normalisé selon des paramètres géométriques, t et s , définis sur la figure.

Sur les figures 9, on remarque que chaque courbe passe par un maximum. Ce sont les valeurs optimales de A vs R_1 ou B vs R_2 . Les valeurs optimales correspondent à :

$$A_{opt} = \sqrt{3\lambda R_1} \quad (39)$$

$$B_{opt} = \sqrt{2\lambda R_2} . \quad (40)$$

On peut aussi réécrire les deux mêmes équations pour plutôt déduire R_{1opt} et R_{2opt} connaissant A et B respectivement. Dans les deux cas, on obtient un bon compromis entre directivité et dimension lorsqu'on utilise ces valeurs optimales.

Les largeurs du lobe principal à 3 dB dans les plans principaux sont déduites des valeurs A_{opt} et B_{opt} :

$$\Theta_{EHPBW-opt} \approx 0.94 \frac{\lambda}{B_{opt}} \quad (41)$$

$$\Theta_{HHPBW-opt} \approx 1.36 \frac{\lambda}{A_{opt}} . \quad (42)$$

Exercice 1

Soient les deux antennes cornet dont les dimensions apparaissent ci-dessous :

a) $A = 3\lambda$, $B = 2\lambda$

b) $A = 4\lambda$, $B = 1.25\lambda$.

- Donnez les autres dimensions pour être dans le cas optimal.

Il suffit de prendre (39) et (40) d'où :

a) $R_{1opt} = 3\lambda$, $R_{2opt} = 2\lambda$

b) $R_{1opt} = 5.33\lambda$, $R_{2opt} = 0.78\lambda$.

- Calculez leur directivité et leur efficacité d'ouverture.

En regardant sur les courbes de directivité universelle de la figure 9, on lit :

a) $(\frac{\lambda}{a} D_E) \approx 16.3$ et $(\frac{\lambda}{b} D_H) \approx 24.2$ alors

$$D \approx \frac{\pi}{32} (16.3)(24.2) = 12.3\pi$$

$$D_{100\%} = D_{ouvu} = \frac{4\pi}{\lambda^2} (3\lambda)(2\lambda) = 24\pi$$

Donc une efficacité d'ouverture de presque 50%.

b) $(\frac{\lambda}{a} D_E) \approx 10.2$ et $(\frac{\lambda}{b} D_H) \approx 32.3$ alors

$$D \approx \frac{\pi}{32} (10.2)(32.3) = 10.3\pi$$

$$D_{100\%} = \frac{4\pi}{\lambda^2} (4\lambda)(1.25\lambda) = 20\pi$$

Encore et toujours une efficacité d'ouverture autour de 50%.

Exercice 2

Une antenne cornet d'un certain fabricant a les dimensions suivantes :

$$A = 4.8 \text{ cm}, B = 4.8 \text{ cm}$$

$$R_e = R_h = 4.8 \text{ cm} .$$

Le cornet s'adapte sur un guide d'onde WR-90 ($0.9'' \times 0.4''$ ou $2.286 \text{ cm} \times 1.016 \text{ cm}$) opérant en monomode (TE_{10}) dans la bande X i.e. de 8 à 12 GHz.

Les expressions tenant compte de la géométrie d'un cornet pyramidal, fournissent les dimensions utiles pour les calculs soient $R_1 \approx 9.2 \text{ cm}$, $R_2 \approx 6.1 \text{ cm}$.

- Déterminez la directivité du cornet à la fréquence de 10 GHz soit en plein centre de la bande d'opération.

À cette fréquence, $\lambda = 3 \text{ cm}$. Ainsi, on a $A/\lambda = 1.6$, $B/\lambda = 1.6$, $R_1/\lambda = 3.07$ et $R_2/\lambda = 2.03$.

En extrapolant sur les graphiques de directivité universelle de la figure 7.9, on voit que :

$$\left(\frac{\lambda}{a}D_E\right) \approx 14.9$$

$$\left(\frac{\lambda}{b}D_H\right) \approx 16.1 .$$

Donc :

$$D \approx \frac{\pi}{32}(14.9)(16.1) = 23.6$$

Le fabriquant en question indique dans les caractéristiques de l'antenne, qu'il a mesuré une directivité de 26.

- Dites si le cornet est optimal et calculez l'efficacité d'ouverture.

En vérifiant avec (39) et (40), on s'aperçoit rapidement que les dimensions ne sont pas optimales car avec une telle ouverture – i.e. en conservant A et B – il faudrait que $R_{1opt} = 2.56 \text{ cm}$ seulement et $R_{2opt} = 4.34 \text{ cm}$. Une telle antenne ne serait pas réalisable mécaniquement.

Quant à l'efficacité, elle vaut :

$$\varepsilon_{ap} = \frac{D}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{A}\right) \left(\frac{\lambda}{B}\right)$$

soit

$$\varepsilon_{ap} = \frac{23.6}{4\pi} \frac{1}{1.6} \frac{1}{1.6} = 0.73 .$$

4.2 Efficacité d'ouverture

Pour une ouverture donnée, l'allongement du cornet i.e. prendre des valeurs de R_1 et R_2 plus grandes :

- conduit à une directivité de plus en plus élevée puisque les valeurs $\frac{\lambda}{a}D_E$ et $\frac{\lambda}{b}D_H$ tirées des graphiques de directivité universelle croissent avec R_2 et R_1 respectivement jusqu'à une certaine limite. Comme A et B sont fixées, il en résulte du même coup une augmentation de l'efficacité d'ouverture.

- diminue le niveau des lobes secondaires par rapport au lobe principal selon les diagrammes de rayonnement relatif de la figure 10 : si $R_1 \uparrow$ alors $t \downarrow$; similairement avec R_2 et s . Moins de puissance émise se perd dans les directions autres que paraxiale. Ainsi, l'approximation de l'angle solide du faisceau Ω_a donnée par (1.18) devient de plus en plus valide. En fait, il faut considérer l'efficacité d'ouverture car celle-ci indique, dans une certaine mesure, l'importance des lobes secondaires, d'où :

$$\Omega_{acornet} \approx \frac{1}{\varepsilon_{ap}}(\pi/4)\Theta_{EPBW}\Theta_{HPBW} . \quad (43)$$

Pour un cornet ayant les dimensions optimales, quelques essais suffisent pour montrer que l'efficacité se situe toujours aux alentours de 50% (en fait $\varepsilon_{apopt} \approx 0.51$); que le diagramme de rayonnement exhibe des lobes secondaires importants de sorte que la vraie valeur de Ω_a est plutôt le double de celui fourni par (1.18) en prenant les estimés $\Theta_{EPBW-opt}$ et $\Theta_{HPBW-opt}$.

En augmentant davantage A et B tout en conservant R_1 et R_2 , les champs dans les parties ajoutées de l'ouverture viennent plutôt contribuer de manière destructive au champ lointain dans les directions paraxiales. Ainsi, on perd en directivité – en conséquence, en efficacité – avec, en prime, plus d'encombrement.

L'efficacité d'ouverture augmente alors jusqu'à une valeur limite discutée dans la sous-section 4.3. L'amélioration de l'efficacité se fait cependant au détriment de l'encombrement i.e. la dimension physique dans les 3 dimensions de l'antenne.

4.3 Approximation onde plane

Il existe une manière approximative pour estimer le diagramme de rayonnement et la directivité d'un cornet pyramidal. Cette approximation est particulièrement intéressante pour des cornets électriquement longs car elle suppose une onde plane dans l'ouverture³ donc aucune variation de phase. On tend effectivement vers un front d'onde plan en allongeant le cornet car l'onde sphérique dans l'ouverture AB a une courbure de plus en plus faible.

L'intégrale de la distribution du champ dans l'ouverture s'écrit :

$$\bar{E}(x, y, z) = j \frac{e^{-j\beta r}}{\lambda r} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-A/2}^{A/2} E_a \cos\left(\frac{\pi x'}{A}\right) e^{j\beta(xx'+yy')/r} dx' dy' \quad (44)$$

donc

$$\bar{E}(x, y, z) = j E_a \frac{e^{-j\beta r}}{\lambda r} (AB) \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(\beta Ax/2r)}{1 - (\beta Ax/\pi r)^2} \right) \text{sinc}\left(\frac{\beta By}{2r}\right) . \quad (45)$$

À partir de l'équation (45), on vérifie aisément que E_{max} s'obtient lorsque $x = y = 0$ et qu'alors, l'intensité maximale vaut :

$$K_{maxcornet-op} = \frac{2E_a^2(AB)^2}{\eta_0 \pi^2 \lambda^2} .$$

³Ce qui devient de plus en plus vrai au fur et à mesure que le cornet s'allonge.

Quant à l'intensité moyenne, elle s'exprime toujours comme $\frac{\langle P_t \rangle}{4\pi}$ avec cette fois

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_a^2(AB)}{2\eta_0}$$

à cause de la distribution non-uniforme du champ – mode TE_{10} . La directivité obtenue (qui correspond donc à la directivité maximale atteinte pour un très long cornet) vaut :

$$D_{\text{cornet}_{\text{max}}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left(\frac{8AB}{\pi^2} \right) \quad (46)$$

ce qui procure une efficacité d'ouverture maximale de $8/\pi^2$ soit $\varepsilon_{\text{ap}_{\text{max}}} \approx 0.81$ (81%).

On arrive au même résultat en utilisant (22) qui suppose aussi une onde plane dans l'ouverture.

4.4 Conception

La conception d'une antenne cornet exige la détermination des paramètres géométriques compte tenue de la directivité désirée.

Pour permettre une réalisation physique, il faut prendre $R_p = R_e = R_h$ sur la figure 8 sinon on risque d'avoir des problèmes pratico-pratiques lors de l'usinage.

- Avec cette imposition, la géométrie permet d'écrire que $R_1 = \frac{A}{A-a} R_p$ et $R_2 = \frac{B}{B-b} R_p$. Dans le cas optimal, on a $R_{p_{\text{opt}}} = \frac{(B-b)}{2\lambda} B$, ce qui donne la relation quadratique $B^2 - bB - 2\lambda R_{p_{\text{opt}}} = 0$. Sachant de plus que $R_{p_{\text{opt}}} = \frac{(A-a)}{3\lambda} A$, la seule solution possible est :

$$B = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 + \frac{8A(A-a)}{3}} \right).$$

- D'autre part, la relation entre la directivité et les dimensions de l'ouverture dans le cas optimal $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} (0.51 AB)$ ($\varepsilon_{\text{ap}_{\text{opt}}} = 0.51$) permet de remplacer B pour obtenir une équation⁴ du quatrième ordre en A seulement :

$$A^4 - aA^3 + \frac{3}{2}b \left(\frac{D\lambda^2}{0.51 \cdot 4\pi} \right) A - \frac{3}{2} \left(\frac{D\lambda^2}{0.51 \cdot 4\pi} \right)^2 = 0. \quad (47)$$

Les étapes sont alors :

- trouver la valeur de A qui provoque l'égalité dans (47) ;
- de là, la dimension B est déduite de $D_{\text{cornet}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} (0.51 AB)$;
- les autres paramètres tels R_1 et R_2 s'obtiennent facilement sachant que les dimensions sont optimales à partir de (39) et (40).

⁴J. F. Aurand, "Pyramidal Horns, Part 2 : A Novel Design Method for Horns of Any Desired Gain and Aperture Phase Error", IEEE-AP Newsletter, Vol. 31, pp. 33-34, June 1989. Prendre ensuite les valeurs de t et s pour le cas optimal soit $t_{\text{opt}} = 3/8$ et $s_{\text{opt}} = 1/4$ de la figure 10.

Pour la première étape, on peut prendre les racines de l'équation quartique mais il est parfois plus simple d'y aller par un algorithme de recherche des zéros (méthode de *Newton*). Ce faisant, comme premier essai pour trouver A , il est conseillé de prendre :

$$A_0 = 0.45\lambda\sqrt{D}. \quad (48)$$

Exercice 3

On veut réaliser une antenne cornet dont la directivité serait de 22.1 dB à la fréquence de 9.294 GHz ($\lambda = 3.226$ cm). Le cornet s'adapte sur un guide d'onde WR-90 ($0.9'' \times 0.4''$ ou 2.286 cm \times 1.016 cm).

- Donnez toutes les dimensions requises dans le cas optimal.

La directivité doit être convertie sous forme linéaire, ce qui donne $D = 162.2$.

Il faut trouver A qui permet l'égalité de (47). La valeur de départ suggérée par (48) pour commencer la recherche vaut :

$$A_0 = 0.1850 \text{ m}$$

À l'aide d'une fonction de recherche des zéros, on trouve une valeur plus précise :

$$A_{\text{opt}} = 0.1825 \text{ m} = 18.25 \text{ cm}.$$

Il ne reste qu'à suivre les étapes indiquées soit

$$\begin{aligned} B_{\text{opt}} &= \frac{D_{\text{cornet}} \lambda^2}{0.51} \frac{1}{4\pi A_{\text{opt}}} = \frac{162.2 (3.226)^2}{0.51} \frac{1}{4\pi \cdot 18.25} = 14.45 \text{ cm} \\ R_{1_{\text{opt}}} &= \frac{(18.25)^2}{3(3.226)} = 34.38 \text{ cm} \\ R_{2_{\text{opt}}} &= \frac{(14.45)^2}{2(3.226)} = 32.35 \text{ cm} \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \ell_h &= \sqrt{(34.38)^2 + (18.25/2)^2} = 35.57 \text{ cm} \\ \ell_e &= \sqrt{(32.35)^2 + (14.45/2)^2} = 33.14 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Une petite vérification s'impose pour s'assurer que le cornet est réalisable mécaniquement. Il faut obtenir $R_e \approx R_h$ selon (34) et (32) sachant les dimensions du guide d'onde.

On trouve :

$$R_e = 30.07 \text{ cm} \quad \text{et} \quad R_h = 30.08 \text{ cm} !$$

- Faites la vérification du résultat précédent.

On a :

$$\begin{aligned} R_1/\lambda &= 10.65 & R_2/\lambda &= 10.02 \\ A/\lambda &= 5.65 & B/\lambda &= 4.48 \\ (\tfrac{\lambda}{b}D_H) &\approx 45.7 & (\tfrac{\lambda}{a}D_E) &\approx 36.5 \end{aligned}$$

d'où :

$$D = \frac{\pi}{32}(46.2)(36.7) = 163.7 .$$

On serait tenté d'essayer en passant par les largeurs du lobe principal à 3 dB pour le cas optimal, pour ensuite obtenir l'angle solide du faisceau suivant (1.18) et, de là, la directivité :

$$\begin{aligned} \Theta_{E_{HPBW}} &\approx 0.94(1/4.48) = 0.21 \text{ rad} \\ \Theta_{H_{HPBW}} &\approx 1.36(1/5.65) = 0.24 \text{ rad} \end{aligned}$$

alors considérant une efficacité d'ouverture ($1/\varepsilon_{opt} \approx 2$)

$$\Omega_a \approx 2(\pi/4)(0.21)(0.24) = 0.078 \text{ sr}$$

Et finalement :

$$D \approx \frac{4\pi}{0.078} = 161.5 .$$

5 Réflecteur parabolique

Les caractéristiques de rayonnement d'une antenne peuvent être facilement améliorées (grande directivité, diagramme de rayonnement avec lobe principal étroit et lobes secondaires faibles, etc.) si une structure supplémentaire comme un réflecteur :

- concentre les rayons ;
- modifie la distribution du champ dans l'ouverture.

Le réflecteur parabolique, en réception, est tout indiqué pour faire converger toute la puissance d'une onde plane incidente vers un point appelé le point focal d_f . Il faut que cette onde arrive d'une direction particulière sans quoi la convergence vers un seul point ne sera pas possible. Par réciprocité, une source électromagnétique située au point focal verra la partie de sa puissance capturée par le réflecteur, redirigée vers la direction privilégiée. La figure 11 illustre les divers paramètres géométriques de ce type de réflecteur dans sa version axisymétrique (symétrie par rapport à l'axe z contenant le foyer). On note que les variables reliées au réflecteur sont surmontées d'un accent tilde (e.g. \tilde{r}) pour bien les identifier et éviter une ambiguïté avec les variables de distribution dans l'ouverture (e.g. r') et celles de l'observateur (e.g. r).

Il existe au moins 3 façons de voir le rayonnement d'une antenne microruban :

- le modèle par cavité résonnante ;
- le modèle par ligne de transmission ;
- le modèle onde-pleine ("full-wave") impliquant les équations intégrales et la méthode des moments.

On ne procédera ici en utilisant le modèle qui assure une meilleure compréhension pour l'application désirée. Par exemple, la cavité résonnante simplifie de manière toute relative, les mécanismes de rayonnement alors que la ligne de transmission facilite la tâche de la détermination de l'impédance d'entrée.

On recommande la lecture du texte de *Balanis* pour ceux ou celles qui aimeraient avoir plus de détails sur la compréhension des antennes microrubans.

2 Modèle par cavité

Au départ, on assume que le champ dans le diélectrique est limité par l'espace entre directement sous la plaque, entre la plaque et le plan de masse. On traite donc cet espace comme une cavité rectangulaire

- remplie d'un diélectrique $\epsilon_{r_{eff}}$

dont les 6 parois sont :

- les 2 conducteurs électriques de la plaque et du plan de masse (parfaits conducteurs électriques) ;
- les 4 murs magnétiques qui simulent le circuit-ouvert, à la périphérie de la plaque (parfaits conducteurs magnétiques).

Les murs magnétiques se comportent sur le champ magnétique comme un conducteur avec le champ électrique ; ceci découle de la réciprocité où on crée des charges et des courants magnétiques. Malheureusement, si l'antenne microruban est traitée comme une cavité résonnante avec murs magnétiques, aucun rayonnement n'est possible puisque l'impédance d'entrée vue devient purement réactive. Le facteur Q tend vers l'infini d'où une largeur de bande nulle. Il faut ajouter des mécanismes de pertes sur les parois magnétiques pour obtenir du rayonnement.

2.1 Champs dans la cavité

En fait, les champs ne sont pas tout-à-fait circonscrits à l'intérieur de la cavité. Ainsi, une faible quantité de la puissance incidente est rayonnée à travers les ouvertures latérales que sont les murs magnétiques. Les antennes microrubans possèdent donc une faible efficacité de rayonnement, d'où la validité du modèle.

À cause de la faible épaisseur du diélectrique, l'onde dans l'espace entre la plaque et le plan de masse subit une forte réflexion lorsqu'elle arrive aux extrémités vis-à-vis les murs magnétiques. Le diagramme d'onde stationnaire produit par les réflexions avec l'onde incidente, suit donc assez bien une forme cosinusoidale (comme un circuit-ouvert). On sait que cette même forme cosinusoidale décrit aussi l'amplitude du champ électrique dans un mode transverse-magnétique avec composante nulle de H suivant l'axe de la hauteur z , soit $TM^z - H$ doit être tangentiel au niveau du plan de masse et de la plaque. De plus, comme le diélectrique est mince, l'amplitude du champ E selon z est considérée constante, soit TM_{mn0}^z .

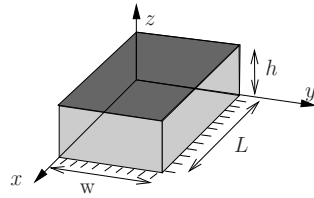


FIGURE 3 – Géométrie pour analyse d'une antenne microruban.

Si on conserve uniquement la cavité, la géométrie pour l'analyse d'une antenne microruban apparaît sur la figure 3. La configuration des champs dans la cavité est décrit à partir de l'approche utilisant le potentiel vecteur. Dans le mode transverse en z , le potentiel vecteur A_z doit satisfaire l'équation d'onde homogène :

$$\nabla^2 \bar{A}_z + \beta^2 \bar{A}_z = 0 \quad (1)$$

dont la solution générale s'obtient par la technique de séparation des variables :

$$\bar{A}_z = \left(\bar{C}_1 \cos(\beta_x x) + \bar{S}_1 \sin(\beta_x x) \right) \left(\bar{C}_2 \cos(\beta_y y) + \bar{S}_2 \sin(\beta_y y) \right) \left(\bar{C}_3 \cos(\beta_z z) + \bar{S}_3 \sin(\beta_z z) \right) \quad (2)$$

Les constantes de propagation $\beta_{x,y,z}$, ainsi que les constantes \bar{C}_k et \bar{S}_k sont déterminées en appliquant les conditions aux limites. Les diverses composantes des champs sont ainsi reliées à \bar{A}_z :

$$\bar{E}_x = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \bar{A}_z}{\partial x \partial z} \quad (3)$$

$$\bar{E}_y = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \bar{A}_z}{\partial y \partial z} \quad (4)$$

$$\bar{E}_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) \bar{A}_z \quad (5)$$

$$\bar{H}_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial y} \quad (6)$$

$$\bar{H}_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial x} \quad (7)$$

$$\bar{H}_z = 0 \quad (8)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\bar{E}_x(z' = 0, h) = 0$$

$$\bar{H}_x(y' = 0, w) = 0$$

$$\bar{H}_y(x' = 0, L) = 0.$$

Les coordonnées x', y', z' sont utilisées pour représenter les champs dans la cavité.

L'application de chacune des conditions aux limites donne respectivement :

- $\bar{S}_3 = 0$
 $\beta_z = \frac{p\pi}{h}$ pour $p = 0, 1, 2 \dots$
- $\bar{S}_2 = 0$
 $\beta_y = \frac{n\pi}{w}$ pour $n = 0, 1, 2 \dots$
- $\bar{S}_1 = 0$
 $\beta_x = \frac{m\pi}{L}$ pour $m = 0, 1, 2 \dots$

La forme finale de l'expression du potentiel vecteur \bar{A}_z dans la cavité, devient :

$$\bar{A}_z = \bar{C}_{mnp} \cos(\beta_x x') \cos(\beta_y y') \cos(\beta_z z') \quad (9)$$

où \bar{C}_{mnp} , le coefficient d'amplitude du mode mnp , dépend du niveau de puissance associée au mode en question.

Puisque les projections de la constante de propagation dans chacun des axes, sont sujets à la contrainte :

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h} \right)^2 = \beta_r^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (10)$$

alors la fréquence de résonance de la cavité pour le mode mnp vaut :

$$(f_r)_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}. \quad (11)$$

On peut maintenant exprimer les champs dans la cavité en substituant (9) dans les équations de (3) à (8). D'où :

$$\bar{E}_x = -j \frac{\beta_x \beta_z}{\omega \mu \epsilon} \bar{C}_{mnp} \sin(\beta_x x') \cos(\beta_y y') \sin(\beta_z z') \quad (12)$$

$$\bar{E}_y = -j \frac{\beta_y \beta_z}{\omega \mu \epsilon} \bar{C}_{mnp} \cos(\beta_x x') \sin(\beta_y y') \sin(\beta_z z') \quad (13)$$

$$\bar{E}_z = -j \frac{(\beta^2 - \beta_z^2)}{\omega \mu \epsilon} \bar{C}_{mnp} \cos(\beta_x x') \cos(\beta_y y') \cos(\beta_z z') \quad (14)$$

$$\bar{H}_x = -\frac{\beta_y}{\mu} \bar{C}_{mnp} \cos(\beta_x x') \sin(\beta_y y') \cos(\beta_z z') \quad (15)$$

$$\bar{H}_y = \frac{\beta_x}{\mu} \bar{C}_{mnp} \sin(\beta_x x') \cos(\beta_y y') \cos(\beta_z z') \quad (16)$$

$$\bar{H}_z = 0. \quad (17)$$

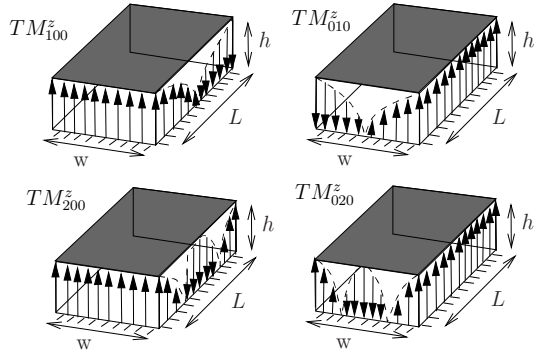


FIGURE 4 – Distribution du champ électrique dans la cavité selon le mode : a) mode TM_{100}^z , b) mode TM_{010}^z , c) mode TM_{200}^z , d) mode TM_{020}^z .

On retrouve, à la figure 4, l'allure de la distribution du champ électrique dans la cavité résonnante pour les principaux modes. Le champ est indépendant de z dans tous les cas ($p = 0$) ; la longueur de la flèche indique l'amplitude. Habituellement, on opère l'antenne microruban à la plus basse fréquence de résonance i.e. dans le mode dominant. Pour déterminer ce mode dominant, une analyse de l'équation (11) suffit pour voir que la plus basse fréquence est obtenue avec un seul des paramètres m, n ou p égal à 1 et les deux autres à 0 (les trois paramètres ne peuvent être à 0 simultanément). Celui correspondant à la plus grande dimension habituellement L , est celui qui vaut 1.

En conséquence, le reste de la démonstration suppose le mode TM_{100}^z pour lequel on a $\beta_x = \frac{\pi}{L}$, $\beta_y = \beta_z = 0$.

2.2 Rayonnement par les ouvertures

Dans le mode TM_{100}^z , les seules composantes non-nulles des champs dans la cavité sont

$$\bar{E}_z = -j E_o \cos\left(\frac{\pi x'}{L}\right)$$

$$\bar{H}_y = \frac{E_o}{\eta_d} \sin\left(\frac{\pi x'}{L}\right)$$

avec $E_o = \frac{\beta^2}{\omega \mu \epsilon} \bar{C}_{100} = \omega \bar{C}_{100}$ et η_d , l'impédance intrinsèque du diélectrique.

Il suffit maintenant de combiner les champs rayonnés à grande distance, produits par chacune des 4 ouvertures connaissant la distribution des champs dans les ouvertures respectives. On doit donc revenir aux notions sur les antennes à ouverture pour comprendre le fonctionnement des antennes microrubans. D'ores et déjà, on vérifie que deux ouvertures opposées rayonnent mais leurs contributions s'annulent dans la direction du lobe principal i.e. dans les plans principaux de rayonnement alors que les deux autres ouvertures forment les ouvertures dites rayonnantes car ce sont elles qui produiront des contributions constructives. Pour éviter des calculs inutiles, on admet que :

- les ouvertures latérales avant et arrière ($x = 0$ et $x = L$) constituent les ouvertures rayonnantes effectives ;
- celles latérales gauche et droite ($y = 0$ et $y = w$) rayonnent des champs s'éliminant dans la direction optimale³.

Pour favoriser une meilleure efficacité, la distance entre les deux ouvertures rayonnantes approchera $L = \lambda_g/2$ ($\lambda_g = \lambda_x$ est la longueur d'onde guidée suivant l'axe x dans le diélectrique) de sorte que les champs lointains issus de chacune des ouvertures soient en construction maximale. De cette manière les polarisations du champ \bar{E}_a dans les ouvertures rayonnantes sont en complètes opposition de phase mais les courants magnétiques \bar{M}_{sa} , eux, seront en phase.

L'examen de la distribution des champs dans les ouvertures rayonnantes pour le mode TM_{100}^z , montre que cette distribution est uniforme dans les deux ouvertures. Toutefois, il n'est malheureusement pas possible d'utiliser l'équation (6.27) puisque l'approximation paraxiale ne tient pas. Il faut remonter aussi loin qu'aux équations (6.1) et (6.2) combinées avec (6.5) et (6.6). On doit faire gaffe aux angles car la normale aux ouvertures est $\pm \mathbf{a}_x$ et non plus \mathbf{a}_z .

³En appliquant les conditions limites du champ électrique en mode TM_{100} sur ces parois magnétiques, on obtient des densités de courants magnétiques de même amplitude mais de directions opposées dans le plan $E(xz)$ et déphasées de 180° dans le plan $H(yz)$.

Avant tout, il convient d'éliminer les effets produits par la présence des conducteurs grâce aux modèles équivalents montrés à la section 7.2. Ainsi donc, avec les conducteurs retirés et l'équivalence simple, les champs dans les ouvertures rayonnantes sont remplacés par :

$$\bar{\mathbf{M}}_{sa_k} = 2 \bar{\mathbf{E}}_{a_k} \times \mathbf{a}_{n_k}$$

où l'indice k vaut 1 ou 2 selon l'ouverture choisie.

- Pour celle en avant ($k = 1$), on a :

$$\bar{\mathbf{E}}_{a_1} = E_o \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{n_1} = \mathbf{a}_x .$$

- Pour celle en arrière ($k = 2$), on a :

$$\bar{\mathbf{E}}_{a_2} = E_o (-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{a}_{n_2} = -\mathbf{a}_x .$$

Ce qui donne :

$$\bar{\mathbf{M}}_{sa_1} = \bar{\mathbf{M}}_{sa_2} = 2 E_o \mathbf{a}_y . \quad (18)$$

Pour déterminer les expressions⁴ de $\bar{\mathbf{L}}_1$ et $\bar{\mathbf{L}}_2$, il faut tenir compte de l'emplacement des ouvertures. En fait, on pourrait voir les deux ouvertures comme 2 éléments d'une antenne-réseau dont les courants d'alimentation sont identiques et en phase produisant un rayonnement transversal. Autrement, ce sont les expressions des termes r'_1 et r'_2 qui diffèrent. On vérifie que :

$$r''_1 = \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (19)$$

$$\approx \sqrt{x^2 - xL + y^2 - 2yy' + z^2 - 2zz'} = \sqrt{r - (xL + 2yy' + 2zz')} \quad (20)$$

$$\approx r \left(1 - \frac{xL + 2yy' + 2zz'}{2r^2}\right) \quad (21)$$

$$\approx r - \underbrace{\frac{xL + 2yy' + 2zz'}{2r}}_{r'_1} \quad (22)$$

$$r''_2 \approx r - \underbrace{\frac{-xL + 2yy' + 2zz'}{2r}}_{r'_2} . \quad (23)$$

Le passage de (20) à (21) est rendu possible grâce à l'approximation binômiale. Si on considère que l'épaisseur h est faible de sorte que $\beta h \ll 1$ alors on néglige le terme de phase zz' car l'intégrale en z' sur h assumera une variation trop fine.

Ainsi, les intégrales sur les ouvertures conduisent à ceci.

⁴Les $\bar{\mathbf{N}}_k$ n'existent pas parce-qu'il y a absence de courant électrique.

- Pour $k = 1$, on a :

$$\bar{\mathbf{L}}_1 \approx \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2E_o \mathbf{a}_y) e^{j\beta \frac{xL + 2yy'}{2r}} dz' dy' \quad (24)$$

$$\approx 2E_o \mathbf{a}_y e^{j\beta xL/2r} h \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} e^{j\beta \frac{yy'}{r}} dy' \quad (25)$$

$$\approx 2E_o e^{j\beta xL/2r} h w \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{yw}{2r}\right) \mathbf{a}_y . \quad (26)$$

Comme :

$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

on arrive à :

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = 2E_o h w \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) e^{j\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta} \mathbf{a}_y . \quad (27)$$

- Pour $k = 2$, on a sensiblement la même chose, exception faite du signe de l'argument du phaseur car l'ouverture se situe en $x' = -L/2$:

$$\bar{\mathbf{L}}_2 = 2E_o h w \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) e^{-j\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta} \mathbf{a}_y . \quad (28)$$

Il devient évident selon (27) et (28) que la direction et le module des $\bar{\mathbf{L}}_k$ sont identiques.

L'addition des deux contributions met en évidence le facteur de réseau :

$$\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}_1 + \bar{\mathbf{L}}_2 = 2 \underbrace{E_o h w}_{V_o} \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) \underbrace{2 \cos\left(\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta\right)}_{f_r(\theta, \phi)} \mathbf{a}_y \quad (29)$$

La suite des opérations utilise les équations (6.5) et (6.6) pour trouver les champs électriques en fonction des composantes transverses de $\bar{\mathbf{L}}$ seulement (on rappelle que $\bar{\mathbf{N}}$ est nul). Or, les composantes transverses s'expriment comme :

$$\bar{L}_\theta = \bar{L}_y \sin \phi \cos \theta$$

$$\bar{L}_\phi = \bar{L}_y \cos \phi$$

de sorte que selon (2.40) et (2.41), le champ électrique lointain devient :

$$\bar{E}_\theta = -j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} 4V_o w \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) \cos\left(\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta\right) \cos \phi \quad (30)$$

$$\bar{E}_\phi = j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} 4V_o w \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) \cos\left(\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta\right) \sin \phi \cos \theta . \quad (31)$$

La fonction caractéristique non-normalisée s'exprime ainsi :

$$F_a = \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \phi \sin \theta\right) \cos\left(\beta \frac{L}{2} \cos \phi \sin \theta\right) \sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta} . \quad (32)$$

2.3 Diagrammes de rayonnement

Les équations (30), (31) et (32) permettent difficilement l'interprétation du rayonnement. Le plus simple consiste à analyser la fonction caractéristique dans les deux plans principaux. Encore faut-il déterminer quels sont ces deux plans. Revenant en arrière, il fut remarqué que le facteur de réseau induit un rayonnement transversal. Donc, les plans contenant l'axe z i.e. le plan xz et le plan yz sont les plans recherchés.

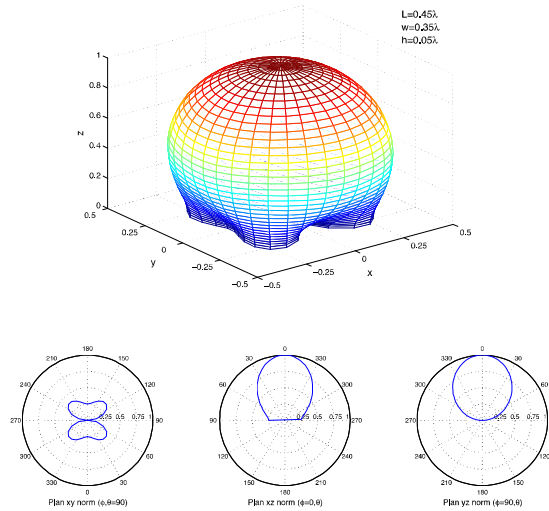


FIGURE 5 – Diagramme de rayonnement d'une antenne microruban avec : $L = 0.45\lambda$, $w = 0.35\lambda$ et $h = 0.05\lambda$.

Les fonctions caractéristiques s'expriment ainsi dans chacun des plans principaux :

- valeur maximale obtenue à $\theta = 0$ soit

$$E_{max}(r) = \frac{\beta V_o w}{\pi r} ; \quad (33)$$

- plan xz ou plan $\phi = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\theta(\phi = 0) &= -j \frac{\beta V_o w}{\pi r} e^{-j\beta r} \cos\left(\beta \frac{L}{2} \sin \theta\right) \\ \bar{E}_\phi(\phi = 0) &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$F_a(\phi = 0) = \cos\left(\beta \frac{L}{2} \sin \theta\right) ; \quad (34)$$

- plan yz ou plan $\phi = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\theta(\phi = 90^\circ) &= 0 \\ \bar{E}_\phi(\phi = 90^\circ) &= j \frac{\beta V_o w}{\pi r} e^{-j\beta r} \text{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \theta\right) \cos \theta \end{aligned}$$

d'où :

$$F_a(\phi = 90^\circ) = \text{sinc}\left(\beta \frac{w}{2} \sin \theta\right) \cos \theta . \quad (35)$$

En examinant la direction du champ électrique, on déduit que le plan xz devient le plan E tandis que celui yz , le plan H . En effet, avec $E_\phi = 0$, le champ électrique est contenu dans le plan xz ; avec $E_\theta = 0$, le champ électrique est par contre, perpendiculaire au plan yz .

La figure 5 illustre bien un diagramme de rayonnement typique d'une antenne microruban rectangulaire. On y observe le rayonnement principal suivant l'axe z soit perpendiculairement à la plaque. Un nul existe dans la direction des ouvertures non-rayonnantes alors qu'un minimum seulement (et non un nul) se situe du côté des ouvertures rayonnantes. Le lobe principal est relativement large, ce qui, à l'avance, laisse entrevoir que la directivité est plus ou moins élevée comparativement à des antennes à ouverture. Il faut comprendre que les ouvertures rayonnantes de l'antenne microruban sont très petites car limitées par l'épaisseur du substrat.

3 Directivité

Le calcul de la directivité implique que la fonction caractéristique :

- doit d'abord être normalisée,
- mise au carré,
- puis intégrée sur l'hémisphère⁵ qui contient les champs rayonnés.

On convient que l'intégrale à faire n'est pas de tout repos ; certaines rotations du système de coordonnées parviennent à simplifier surtout lorsqu'on ne tient compte que du facteur d'élément i.e. chaque ouverture.

On arrive à l'expression suivante de la directivité pour le rayonnement d'une seule ouverture :

$$D_{micro1-ouv} = (\beta w)^2 \frac{1}{I_1} \quad (36)$$

$$I_1 = -2 + \cos(\beta w) + \beta w S_i(\beta w) + \text{sinc}(\beta w) \quad (37)$$

où la fonction S_i est appelée l'intégrale du sinus soit $\int_0^x \text{sinc}(x) dx$, laquelle est tabulée dans toutes bonnes tables de mathématiques.

⁵L'antenne microruban ressemble au monopôle à cause de la présence du plan de masse. La rayonnement se fait donc dans l'hémisphère supérieure ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

Asymptotiquement, les valeurs de la directivité d'une seule ouverture sont :

$$D_{micro1-ouv} \approx \begin{cases} 3 & w \ll \lambda \\ 4 \frac{w}{\lambda} & w \gg \lambda \end{cases} \quad (38)$$

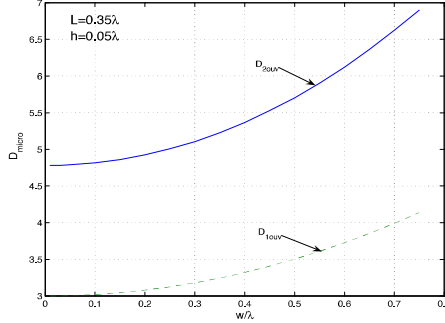


FIGURE 6 – Directivité pour une seule ouverture obtenue à partir de l'équation (36) selon w pour $L = 0.35\lambda$.

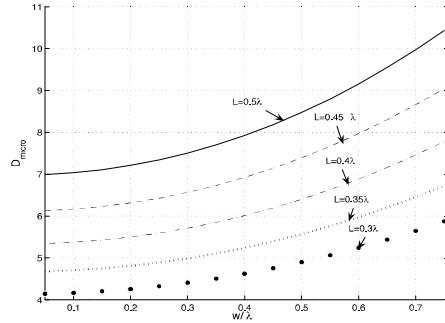


FIGURE 7 – Directivité obtenue numériquement selon w pour quelques valeurs de L .

Avec le facteur de réseau i.e. avec les deux ouvertures rayonnantes, il n'existe pas d'expressions analytiques; la seule manière de parvenir à une réponse consiste à passer par l'intégration numérique. Pour un rayonnement transversal comme ici, et pour une distance inter-élément de $\lambda/2$ à la résonance, la directivité double environ à cause du facteur de réseau (voir figure 6). Pour quelques valeurs de L et selon w exprimées toutes deux en terme de longueurs d'onde dans le vide, on obtient les courbes de directivités tracées à la figure 7 avec une épaisseur $h = 0.05\lambda$. Tant que l'épaisseur demeure faible devant la longueur d'onde, les courbes restent les mêmes. Il ne faut pas oublier que $L = \lambda_g/2$ à la résonance. Le cas $L = \lambda/2$ serait optimal si et seulement si, cette longueur correspond aussi à la résonance de la cavité ce qui présuppose que le diélectrique a une constante proche de l'unité!

3.1 Facteur de qualité et efficacité

Dans le modèle par cavité, la fréquence d'opération est celle de résonance dans l'un des modes supérieurs. La cavité agit donc comme un crystal dans un circuit électrique. On verra plus tard que l'analogie se prête bien car à la résonance, l'impédance d'entrée de l'antenne microruban devient purement active comme celle d'un crystal à sa fréquence propre.

- La connaissance du facteur de qualité Q d'un circuit résonnant permet de déterminer la largeur de bande à mi-puissance (ou 3 dB) B ; par conséquent ici, celle de l'antenne. En effet, on a :

$$Q = \frac{f_o}{B} \quad (39)$$

où $f_o = f$ correspond à la fréquence d'opération i.e. celle de résonance choisie.

- D'autre part, le facteur de qualité Q tend vers l'infini dans le cas sans perte – $R = 0$ en circuit. À cause du rayonnement, le facteur chute. Il chutera davantage en combinant les pertes dans le diélectrique et dans le conducteur. On peut donc déduire l'efficacité de rayonnement par le rapport entre le facteur de qualité final Q et celui dû uniquement aux pertes par rayonnement Q_r :

$$\varepsilon_r = \frac{Q}{Q_r} \quad (40)$$

La relation entre les facteurs de qualité pour chacun des types de pertes s'écrit :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_r} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} \quad (41)$$

où Q_d est reliée aux pertes dans le diélectrique et Q_c , aux pertes de conduction.

Pour une cavité, le facteur Q s'établit via le rapport entre l'énergie emmagasinée U_{em} et l'énergie dissipée par cycle. Cette dernière énergie est aussi reliée à la puissance moyenne dissipée $\langle \mathcal{P}_{dis} \rangle$ de sorte que le facteur de qualité équivaut à :

$$Q = 2\pi f_o \frac{U_{em}}{\langle \mathcal{P}_{dis} \rangle} \quad (42)$$

Il s'avère (des détails supplémentaires sont disponibles dans *Balanis*) que pour des substrats très minces $h \ll \lambda$:

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} \quad (43)$$

$$Q_c = \frac{1}{h\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} \quad (44)$$

et, pour des plaques rectangulaires dans le mode TM_{100}^z :

$$Q_r = \frac{4\pi f \epsilon_r R_{ri} w}{h} \frac{L}{4} \quad (45)$$

Dans ces 3 dernières équations, $\tan \delta$ représente la tangente de pertes du diélectrique i.e. le rapport $\sigma_d/\omega\epsilon$ avec σ_d , la conductivité du diélectrique; σ_c est la conductivité finie des

plaques conductrices ; R_{ri} représente toujours la résistance de rayonnement à l'entrée et sa détermination sera vue dans la prochaine section.

Lorsque tous les paramètres sont connus, on peut facilement rechercher les facteurs de qualité associés au rayonnement Q_r , aux pertes Q_d et Q_c pour trouver ensuite Q de l'antenne selon (41). De là, on déduit la largeur de bande disponible (39) et l'efficacité de rayonnement (40). Bien vite, on comprend que dans la conception, des compromis doivent être faits car l'amélioration de l'efficacité passe par un Q_r élevé devant les autres ce qui rend la largeur de bande encore plus étroite – en gardant les autres constants. Si on tente de maximiser l'efficacité en optant pour un meilleur substrat et des meilleurs conducteurs, même chose, le facteur Q résultant sera encore ici plus élevé d'où une plus faible largeur de bande.

4 Modèle par ligne de transmission

La plaque peut être vue comme le prolongement d'une ligne de transmission avec une impédance caractéristique différente mais aussi avec pertes puisqu'une partie de la puissance incidente est rayonnée selon R_{ri} et une autre est perdue dans le diélectrique selon R_{di} . Ces deux résistances diminuent le facteur Q de la cavité et ainsi, élargissent la largeur de bande. Le modèle par ligne de transmission permet non seulement la détermination de l'impédance vue à l'entrée de la plaque, mais aussi explique pourquoi les dimensions physiques de la plaque ne conviennent pas tout-à-fait aux calculs prévus des champs rayonnés à cause des effets de bord.

4.1 Effets de bord

Évidemment, comme on cherche à produire du rayonnement, une partie du flux électrique se retrouve dans le substrat de la plaque et une autre partie dans l'air. Il faut donc considérer non-pas la constante diélectrique du substrat seul mais plutôt de celui effectif ϵ_{reff} . Le même phénomène était considéré dans le traitement des lignes microruban en supposant un mode quasi-TEM. Une bonne approximation valide lorsque $w/h > 1$ est :

$$\epsilon_{reff} \approx \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + 12 \frac{w}{h}\right)^{-1/2} \quad (46)$$

À cause des effets de bord importants, la plaque donne l'impression d'être plus grande électriquement. Il importe d'en tenir compte dans les calculs par le biais des dimensions effectives plutôt que de prendre les dimensions physiques. On rajoute donc une longueur extra Δ_L de chaque côté, à la longueur physique L_p pour obtenir L effectif :

$$L_{eff} = L_p + 2\Delta_L. \quad (47)$$

Si le rapport w/h est élevé – ce qui est souvent le cas – on a :

$$\frac{\Delta_L}{h} = 0.412 \frac{(\epsilon_{reff} + 0.3) \left(\frac{w}{h} + 0.264\right)}{(\epsilon_{reff} - 0.258) \left(\frac{w}{h} + 0.8\right)}. \quad (48)$$

Cette dernière équation (48), quoique empirique⁶, reste la plus populaire actuellement.

Ce sont les valeurs effectives de ϵ_r et de L données par (46) et (47) qui doivent être utilisées dans les équations précédentes développées avec le modèle par cavité.

4.2 Impédance d'entrée

Pour déterminer l'impédance d'entrée de l'antenne microruban, on doit savoir que :

- seules les ouvertures avant et arrière contribuent au rayonnement dans le champs lointain ;
- les champs dans ces ouvertures possèdent une distribution identique de même valeur et peuvent être vues comme les éléments d'une antenne-réseau à 2 éléments avec alimentation identique en phase ;
- la puissance fournie à l'entrée de la plaque vaut :

$$\langle P_{in} \rangle = \frac{V_o^2}{2R_{ri}}. \quad (49)$$

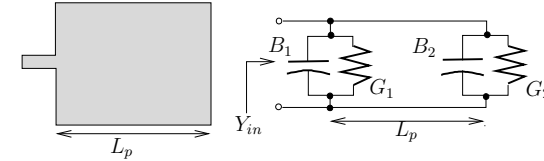


FIGURE 8 – Équivalent circuit de l'antenne microruban pour la détermination de l'impédance d'entrée.

Les deux premiers items servent à démontrer qu'au point de vue impédance, la plaque s'assimile à deux admittances en parallèles identiques \bar{Y}_{ouv} et espacées de la distance L_p comme sur la figure 8. Ainsi, :

$$\bar{Y}_{in} = \bar{Y}_{1ouv} + \bar{Y}_{1ouv}(d = L_p) \quad (50)$$

où $\bar{Y}_{1ouv}(d = L_p)$ correspond à l'admittance généralisée vue à une distance d étant donnée l'impédance caractéristique $Z_{TM_{micro}}$ du bout de ligne de transmission de longueur L_p avec la constante diélectrique ϵ_{reff} dans un mode supérieur – i.e. non-TEM. Pour simplifier la chose au maximum, disons qu'au moment de la résonance lorsque⁷ $L_p \approx \frac{\lambda_g}{2}$, la partie imaginaire de l'admittance – la susceptance – d'une ouverture vue au niveau de l'autre ouverture, équivaut exactement à l'opposé de la susceptance de cette autre ouverture i.e. :

$$B_{1ouv}(d = L_p) = -B_{1ouv}. \quad (51)$$

⁶E.O. Hammerstad, "Equations for Microstrip Circuit Design", Proc. Fifth European Microwave Conf., 1976, pp. 632-636.

⁷En fait, à cause des effets de bord, la longueur effective de la plaque est légèrement plus grande que la longueur physique ; ainsi, on a en pratique $0.48\lambda < L_p < 0.49\lambda$.

Ainsi, à l'entrée de la plaque les susceptances s'annulent mutuellement ne laissant apparaître qu'une impédance purement réelle :

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1}{Y_{in}} = R_{ri} . \quad (52)$$

Quant à la partie réelle de l'impédance d'entrée, la seule qui demeure non-nulle, elle peut être déduite facilement en exprimant la puissance totale émise en fonction de V_o^2 puis en se servant de (49). On suppose que toute la puissance fournie est émise, ce qui est bien justifiable. Dans le cas contraire, une résistance de pertes est simplement ajoutée faisant en sorte que l'efficacité soit moindre que 100%.

L'intégrale du calcul de la puissance totale émise $\langle P \rangle$ ressemble beaucoup à celle du calcul de la directivité à la différence que l'expression du champ électrique s'utilise directement plutôt que de prendre celle normalisée de la fonction caractéristique F_a . Comme avec la directivité, on peut commencer par obtenir la conductance de chacune des ouvertures prises individuellement G_{1ouv} . Dans le calcul de la puissance émise par une ouverture, on se sert

- du résultat donné par (36) pour la détermination de l'angle solide $\Omega_{a1ouv} = \frac{4\pi}{D_{1ouv}}$;
- du champ électrique maximal donné par (33) divisé par 2 (une ouverture seulement) pour la détermination de $K_{max1ouv} = \frac{E_{max1ouv}^2}{2\eta_o} r$.

D'où :

$$\langle P_{t1ouv} \rangle = K_{max1ouv} \Omega_{a1ouv} = \frac{V_o^2}{2\pi\eta_o} I_1 = \frac{V_o^2}{2} G_{1ouv} \quad (53)$$

avec I_1 tel qu'exprimé en (37). Ainsi, on déduit que :

$$G_{1ouv} = \frac{I_1}{120\pi^2} \approx \begin{cases} \frac{1}{90} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^2 & w \ll \lambda \\ \frac{1}{120} \left(\frac{w}{\lambda}\right) & w \gg \lambda \end{cases} \quad (54)$$

Si on tient compte des deux ouvertures et du couplage entre les deux ouvertures rayonnantes, la résistance de rayonnement à l'entrée s'écrit :

$$R_{ri} = \frac{1}{2(G_{1ouv} \pm G_{12})} \quad (55)$$

où le signe (+) est utilisé pour les modes de résonance impairs i.e. la distribution en tension entre les ouvertures est anti-symétrique ; le signe (-), pour les modes de résonance pairs. Le facteur 2 apparaît parce que la conductance en parallèle de la seconde ouverture est équivalente à celle de la première ouverture et que les conductances en parallèle s'additionnent. La conductance mutuelle G_{12} est définie par l'inter-dépendance des champs E et H lointains produits par chacune des ouvertures notées avec l'indice inférieur 1 ou 2, soit :

$$G_{12} = \frac{1}{V_o^2} \text{Re} \left\{ \oint_S \bar{\mathbf{E}}_1 \times \bar{\mathbf{H}}_2^* \cdot d\mathbf{S} \right\} . \quad (56)$$

Quelques essais avec des paramètres typiques montrent que déjà à la première fréquence de résonance (anti-symétrique), la conductance mutuelle est nettement plus faible que la conductance propre à une seule ouverture. Cela devient encore plus vrai aux fréquences de résonances supérieures. Dons $R_{ri} \approx 0.5/G_{1ouv}$.

4.3 Efficacité de rayonnement

La longueur L de la plaque permet à l'antenne d'entrer en résonance comme il vient d'être vu. Cependant, la largeur de la plaque w n'affecte en réalité que la constante diélectrique effective et la valeur de la conductance de chacune des ouvertures selon (46) et (54) respectivement.

En réalité, w joue aussi un rôle sur l'efficacité de rayonnement. Selon le classique livre⁸ de Bahl et Bhartia, la largeur w pratique qui donne de bons rendements est donnée par :

$$w = \frac{c}{2(f_r)_{100}} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_r + 1}} \quad (57)$$

4.4 Adaptation

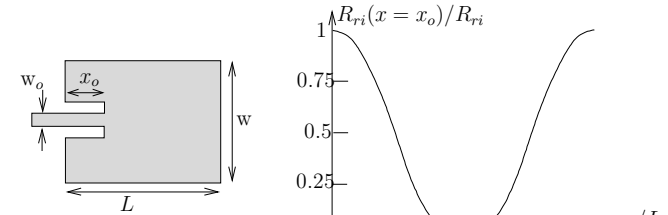


FIGURE 9 – Alimentation d'une antenne microruban avec retrait pour adaptation.

La résistance de rayonnement trouvée avec (55) correspond l'impédance vue au niveau de la première ouverture soit $x = L$ ou encore $x = 0$. On peut ramener l'impédance vue à une distance $x = L - x_o$ en alimentant la plaque en un point interne ; ceci se réalise par l'entremise d'un retrait dans le dessin de la plaque comme sur la figure 9 . Ainsi, il faut maintenant déterminer l'impédance vue au nouveau point d'alimentation avec un déplacement vers la "charge" d'une distance x_o sur la ligne d'alimentation – d'impédance caractéristique Z_o . L'impédance caractéristique de la ligne d'alimentation peut être approximée par une équation empirique⁹ :

$$Z_{omicro} = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{reff}}} \ln \left(\frac{8h}{w_o} + \frac{w_o}{4h} \right) & \frac{w_o}{h} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{reff}}} \frac{1}{\left(\frac{w_o}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w_o}{h} + 1.444 \right) \right)} & \frac{w_o}{h} > 1 \end{cases} \quad (58)$$

où w_o est la largeur de la ligne microruban d'alimentation. Si l'alimentation se fait au moyen d'un autre type de ligne, on emploie évidemment, l'impédance caractéristique de cette autre ligne.

En appliquant la théorie des lignes de transmission en régime sinusoïdal permanent, il faudrait :

⁸I.J. Bahl et P. Bhartia *Microstrip Antennas*, Artech House, Dedham, MA, 1980.

⁹Une ligne microruban est traitée dans un mode quasi-TEM avec un constante diélectrique effective.

- déterminer le coefficient de réflexion de la “charge” $\bar{\Gamma}_r$;
- déduire le coefficient de réflexion vue en se déplaçant de x_o vers la “charge” $\bar{\Gamma}_r(x_o)$ – le module reste constant et l’argument augmente d’une valeur égale à $2\beta_x x_o$;
- retrouver la charge ayant ce nouveau coefficient $\bar{Z}_r(x_o) = Z_o \frac{1+\bar{\Gamma}_r(x_o)}{1-\bar{\Gamma}_r(x_o)}$.

Cependant, une expression plus simple est possible si : $G_{1ouv}/Y_o \ll 1$ et $B_{1ouv}/Y_o \ll 1$. Dans ces conditions, le tout se réduit à :

$$R_{ri}(x_o) \approx R_{ri} \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} x_o \right) . \quad (59)$$

Le terme $\cos(\pi x_o/L)$ apparaît à cause de la variation du champ électrique en x dans le mode TM_{100} . Comme la fonction cosinus au carré est toujours inférieure (ou égale à la limite) à l’unité, il devient possible d’abaisser la résistance vue de l’antenne pour l’adapter à la ligne d’alimentation. Dans les cas pratiques en effet, l’antenne microruban présente souvent une impédance très élevée en comparaison avec celle caractéristique de la ligne d’alimentation ; cette technique offre donc une opportunité d’adaptation simple et peu coûteuse. On mentionne cependant dans *Balanis* deux inconvénients :

- le retrait provoque une capacitance de jonction supplémentaire qui modifie la fréquence de résonance de l’ordre de 1% ;
- la fonction cosinus au carré varie rapidement dans la zone intéressante de sorte qu’une tolérance faible est requise à la construction.

5 Réseautage

La mise en réseau d’antennes microrubans implique :

- des effets mutuels – couplage entre les différentes plaques ;
- de l’adaptation à chaque embranchement de la distribution du signal.

En ce qui concerne le deuxième item, la théorie est bien connue et relève entièrement des techniques utilisées en transmission des ondes électromagnétiques. On peut aisément faire les calculs qui s’imposent et rajouter, par exemple, des transformateurs $\lambda/4$ aux embranchements afin d’assurer la distribution du signal à chacune des plaques. La figure 10 illustre bien un exemple où l’impédance d’entrée de l’antenne microruban est de 100Ω tandis que la ligne de transmission a une impédance caractéristique de 50Ω . Ce type de géométrie, très classique, fonctionne bien si le nombre d’éléments est une puissance de 2 (i.e. 2^n soit 2, 4, 8, 16 ...).

Le premier item exige cependant une bonne expérience : c’est véritablement de l’art. Il faut fouiller dans les articles scientifiques sur le sujet pour comprendre ce qui se passe ; puis, essayer différentes configurations, noter les résultats obtenus et en tirer des leçons. En bref, le découplage est favorisé par :

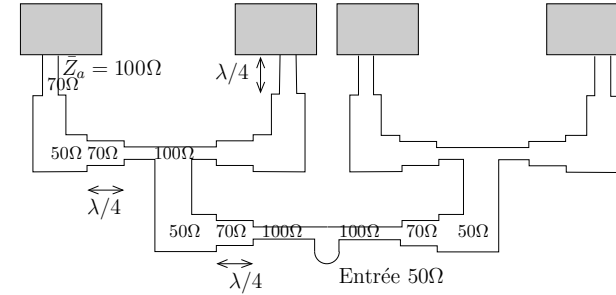


FIGURE 10 – Transformateurs $\lambda/4$ pour adaptation dans la distribution du signal avec réseau d’antennes microrubans.

- un espacement plus grand entre les éléments, jusqu’à une certaine limite toutefois ;
- la juxtaposition des éléments dans le plan H i.e. aligner les éléments dans l’axe du champ H .

Il faut savoir que le couplage se fait par l’intermédiaire des ondes qui rampent à la surface du diélectrique.

Le couplage se détermine par l’intermédiaire du paramètre S_{12} ¹⁰, lequel détermine le rapport entre le signal transmis au port #2 et le signal injecté au port #1 lorsque les entrées et sorties sont adaptées. Ici, les ports sont constitués par chacun des éléments du réseau. En activant une antenne microruban (port #1), on mesure le signal aux bornes d’une autre antenne microruban adjacente (port #2). On préfère, dans le cas des antennes, définir le couplage en fonction de la densité de puissance émise qu’importe la relation de phase de sorte que le paramètre utilisé devient plutôt $|S_{21}|^2$.

¹⁰Pour une jonction passive sans ferrite, le théorème de réciprocité oblige $S_{12} = S_{21}$.