



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات  
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2021

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 04 نقاط )

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = -\frac{3}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

(1) أ . تَحَقِّقْ أَنَّهُ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$

ب . برهن بالتراجع أَنَّهُ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-2 < u_n < -1$

ج . بَيِّنْ أَنَّ المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أَنَّهُا متقاربة.

(2) المتتالية العددية  $(v_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ . بَيِّنْ أَنَّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 3 ثم احسب حدّها الأول.

ب . اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أَنَّهُ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$

ج . احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أ . تَحَقِّقْ أَنَّهُ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

ب . نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \dots + \ln\left(\frac{3}{u_n + 2} - 2\right)$

احسب  $S_n$  بدلالة  $n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

كلّ من الكريّات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.

نرمز بـ:  $p_i$  إلى احتمال سحب كرية رقمها  $i$ ، حيث:  $p_1 = \frac{1}{3}$  ،  $p_2 = \frac{1}{6}$  ،  $p_3 = \frac{1}{4}$  و  $p_4 = \frac{1}{4}$

(1) ورّع الكريّات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

(2) احسب احتمال كلّ من الحوادث  $A$  ،  $B$  و  $C$  الآتية:

$A$  " سحب كرية تحمل رقما فرديا "

$B$  " سحب كرية تحمل رقما من أرقام نظام التّعداد ذي الأساس 4 "

$C$  " سحب كرية رقمها حلّ للمعادلة:  $x^2 = 2^x$  "



(3) المتغير العشوائي  $X$  يرفق بكل سحب لكرية الرّقم الذي تحمله.  
عين مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$  ثم احسب  $E(X)$  أمله الرياضيائي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة ذات المجهول  $(x; y)$ :  $(E) : 42x - y = 38 \dots$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.  
حل المعادلة  $(E)$  علما أنّ الثنائية  $(1; 4)$  حلّ لها.
- (2)  $a$  ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية حيث  $a$  غير معدوم.  
العدد الطبيعي  $N$  يكتب  $ab0cb$  في نظام تعداد أساسه 5 و يكتب  $a7c5$  في نظام تعداد أساسه 8  
أ. بين أنّ الأعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  تُحقّق:  $113a = 3(c - 42b + 151)$  ثم استنتج أنّ:  $a = 3$   
ب. جدّ العددين الطبيعيين  $b$  و  $c$  ثم اكتب العدد  $N$  في النظام العشري.
- (3) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $5^n$  على 6  
ب. بين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$ :  $2021^{2n} + 1441^n + 4$  مضاعف للعدد 6  
ج. نضع:  $A_n = 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n$   
جدّ قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون:  $A_n \equiv 0[6]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$   
(1) ادرس تغيّرات الدالة  $g$  ثم شكّل جدول تغيّراتها.  
(2) أ. بين أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  يُحقّق:  $1,53 < \alpha < 1,54$   
ب. احسب  $g(0)$  ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$
- (II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$   
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
(2) أ. بين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = g(x)$   
ب. استنتج أنّ  $f$  متزايدة تماما على كلّ من  $]-\infty; 0]$  و  $[\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على  $[0; \alpha]$   
ج. شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$
- (3) أ. بين أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 3x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C)$  عند  $-\infty$   
ب. ادرس وضعية  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$   
ج. بين أنّ  $(C)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\beta$  تُحقّق:  $2,03 < \beta < 2,04$   
د. بين أنّ  $(C)$  يقبل مماسين  $(T)$  و  $(T')$  موازيين لـ  $(\Delta)$  (لا يُطلب كتابة معادلة لـ  $(T)$  و  $(T')$ )
- (4) ارسم  $(\Delta)$  ،  $(T)$  ،  $(T')$  و  $(C)$  على  $]-\infty; 1 + \sqrt{2}]$   
(نأخذ:  $\alpha \approx 1,53$  ،  $f(\alpha) \approx -2,3$  ،  $f(\sqrt{3}) \approx -2,1$  و  $f(-\sqrt{3}) \approx -3,2$ )
- (5) الدالة العددية  $h$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = f[\ln(x)]$   
أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$   
ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $h$  ثم شكّل جدول تغيّراتها.



## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$

(1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 2$

ب. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) المتتالية العددية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = u_n^2 - 4$

أ. بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  يُطلب حساب حدّها الأول.

ب. اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

ج. احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $S_n = \frac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}) = PGCD(2^n; 3)$

ج. استنتج أن:  $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}) = 1$

د. جد قيمة العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون:  $S_n = \frac{83}{8}$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال  $H_1, H_2, H_3$  و أربع نساء  $F_1, F_2, F_3, F_4$

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42

(2) نعتبر الحوادث الآتية: "A" اللجنة من نفس الجنس "B" اللجنة من جنسين مختلفين

"C"  $H_1$  هو الرئيس "E" اللجنة لا تضم كلا من  $H_1$  و  $F_1$

أ. احسب  $P(A)$  احتمال الحدث  $A$  ثم استنتج  $P(B)$

ب. احسب  $P(C)$  و  $P(E)$

(3) المتغير العشوائي  $X$  يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

عين قانون احتمال  $X$  ثم احسب  $E(X)$  أمله الرياضيائي.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة ذات المجهول  $(x; y)$ :  $7x - 6y = 1 \dots (E)$  ، حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.

أ. حلّ المعادلة  $(E)$  علما أن الثنائية  $(1; 1)$  حلّ لها.

ب. تحقّق أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلّا للمعادلة  $(E)$  فإن  $xy$  عدد طبيعي غير معدوم.

(2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $4^n$  على 7

ب. بين أن العدد  $4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022}$  يقبل القسمة على 7



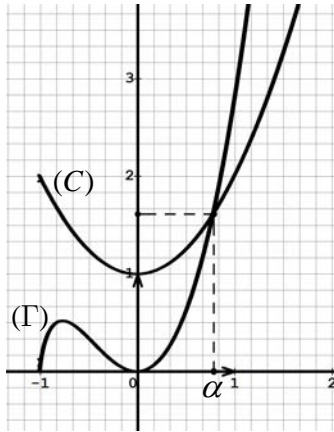
(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ :  $4^n \equiv 4[6]$

(4) نفرض أن الثنائية  $(a; b)$  حل للمعادلة (E)

$A$  عدد طبيعي يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 4 على الشكل:  $333\ldots330$  (عدد أرقامه  $a \times b$ )

أ. بين أن:  $A = 4^{ab} - 4$

ب. تحقق أن:  $A \equiv 0[6]$  ثم عين كل الثنائيات  $(a; b)$  التي من أجلها يكون  $A$  قابلا للقسمة على 42



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشكل المقابل (C) و (Γ) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان

للدالتين العدديتين المعرفتين على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:

$$x \mapsto 1+x^2 \quad \text{و} \quad x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$$

(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  تُحقق:  $0,78 < \alpha < 0,79$

الدالة العددية  $g$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

(1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

(2) استنتج حسب قيم  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  إشارة  $g(x)$

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة: 2 cm)

(1) أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  و بين أن:

ب. فسّر النهايتين هندسيا.

(2) أ. بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج. بين أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$  ثم استنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى ( $C_f$ ) عند المبدأ O

(3) ارسم (T) و ( $C_f$ ) (نأخذ:  $f(\alpha) \approx 0,36$ )

(4) الدالة العددية  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$  و ( $C_h$ ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بين أن الدالة  $h$  زوجية.

ب. بين أن الدالة  $h$  غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم فسّر ذلك بيانيا.

ج. اشرح كيفية رسم ( $C_h$ ) انطلاقا من ( $C_f$ ) ثم ارسمه.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)						
مجموعة	مجزأة							
التمرين الأول: ( 04 نقاط)								
01.25	0.25	(1)أ. التحقق : $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$ ب. البرهان بالتراجع : $-2 < u_n < -1$ ج. $(u_n)$ متناقصة تماما ، $(u_n)$ متقاربة.						
	0.50							
	0.25+0.25							
02.00	0.50	(2) أ. $(v_n)$ هندسية أساسها 3 : $v_{n+1} = v_n \times 3$ حدّها الأول $v_0 = -4$ ب. $v_n = -4 \times 3^n$ استنتاج: $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$ ج. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$						
	0.25							
	0.50							
	0.50							
	0.25							
0.75	0.25	(3) أ. التَّحَقُّق : $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$ ب. $S_n = (n + 1) \ln 4 + \frac{(n + 1)n}{2} \ln 3$						
	0.50							
التمرين الثاني: (04 نقاط)								
01	0.25x4	(1) توزيع الكريات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 عدد الكريات التي تحمل الرقم 1 هو 4 ، عدد الكريات التي تحمل الرقم 2 هو 2 عدد الكريات التي تحمل الرقم 3 هو 3 ، عدد الكريات التي تحمل الرقم 4 هو 3						
02.25	3x0.75	(2) $p(C) = \frac{5}{12}$ ، $p(B) = \frac{3}{4}$ ، $p(A) = \frac{7}{12}$						
0.75	0.25	(3) مجموعة قيم المتغير العشوائي $X$ هي 1, 2, 3, 4 $E(X) = \frac{29}{12}$						
	0.50							
التمرين الثالث: (05 نقاط)								
01	01.00	(1) حلّ المعادلة $(x, y) = (k + 1, 42k + 4)$ $k \in \mathbb{Z}$ (E)						
02.75	0.50	(2) أ. تبين أن الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ تُحقّق : $113a = 3(c - 42b + 151)$ استنتاج أن: $a = 3$ ب. $a = 3$ و $113a = 3(c - 42b + 151)$ تكافئ $42b - c = 38$ $b = 1$ و $c = 4$ ، $N = 2021$						
	0.50							
	0.25 3x0.50							
01.25	0.50	(3) أ. بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 6 <table><tr><td>n</td><td>2k</td><td>2k+1</td></tr><tr><td>الباقى</td><td>1</td><td>5</td></tr></table> ب. $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مضاعف للعدد 6 ج. $A_n \equiv 0[6]$ يعنى: $n$ فردي	n	2k	2k+1	الباقى	1	5
	n		2k	2k+1				
	الباقى		1	5				
0.50								
0.25								

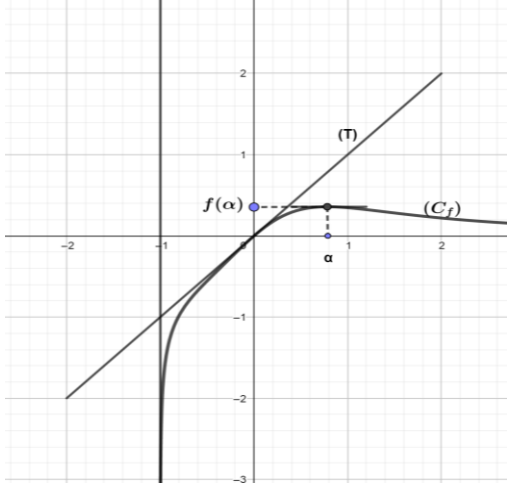
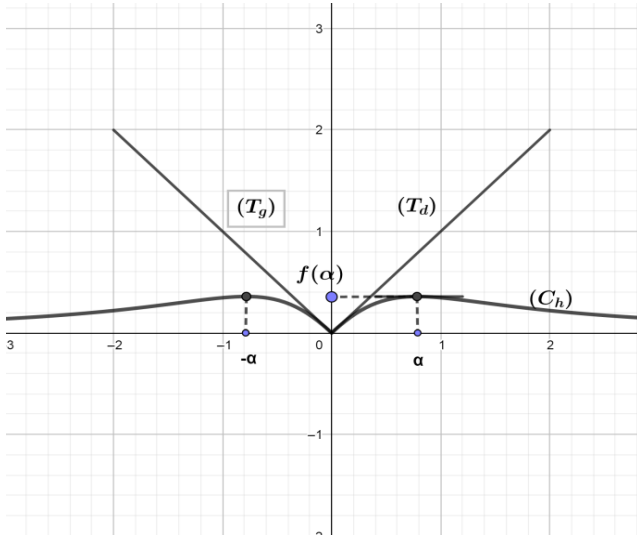
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)																				
مجموعة	مجزأة																					
التمرين الرابع: (07 نقاط)																						
01.50	0.25+0.25	(I) دراسة تغيّرات الدالة $g$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$ $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$																				
	0.25	إشارة $g'(x)$ : $g'(x) > 0$ على $]-\infty; -3[$ و $]1; +\infty[$ و $g'(x) < 0$ على $] -3; 1[$ و $g'(x) = 0$ من أجل $x = -3$ أو $x = 1$																				
	0.25	$g$ متزايدة تماما على كل من $]-\infty; -3[$ و $]1; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-3; 1[$																				
	0.25	جدول التغيّرات.																				
	0.25	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-3</math></td><td><math>0</math></td><td><math>1</math></td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>g'(x)</math></td><td></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>g(x)</math></td><td><math>3</math></td><td><math>g(-3)</math></td><td><math>0</math></td><td><math>g(1)</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$1$	$\alpha$	$+\infty$	$g'(x)$		$0$	$-$	$0$	$+$	$+$	$g(x)$	$3$	$g(-3)$	$0$	$g(1)$	$0$
$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$1$	$\alpha$	$+\infty$																
$g'(x)$		$0$	$-$	$0$	$+$	$+$																
$g(x)$	$3$	$g(-3)$	$0$	$g(1)$	$0$	$+\infty$																
01.00	0.50	(2) أ. $g$ مستمرة و متزايدة تماما ، $g(1,53) \times g(1,54) < 0$																				
	0.25	ب. $g(0) = 0$																				
	0.25	إشارة $g(x)$ : $g(x) > 0$ على $] -\infty; 0[$ و $] \alpha; +\infty[$ و $g(x) < 0$ على $]0; \alpha[$ $g(x) = 0$ لما $x = 0$ أو $x = \alpha$																				
0.50	0.25+0.25	(II) 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$																				
0.75	0.25	(2) أ. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = g(x)$																				
	0.25	ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$																				
	0.25	ج. جدول تغيّرات الدالة $f$ <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f'(x)</math></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>f(\alpha)</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$	$f(x)$	$-\infty$	$0$	$f(\alpha)$	$+\infty$					
$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$																		
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$																		
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$f(\alpha)$	$+\infty$																		
01.25	0.25	(3) أ. تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ $(C)$ عند $-\infty$																				
	0.25	ب. وضعيّة $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ : $(C)$ أعلى $(\Delta)$ على $] -\infty; 1 - \sqrt{2}[$ و $]1 + \sqrt{2}; +\infty[$ و $(C)$ أسفل $(\Delta)$ على $]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[$																				
	0.25	$(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند $H(1 - \sqrt{2}; -3\sqrt{2} + 4)$ و $H'(1 + \sqrt{2}; 3\sqrt{2} + 4)$																				
	0.25	ج. تبيان أنّ $(C)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\beta$																				
	0.50	د. تبيان أنّ $(C)$ يقبل مماسين $(T)$ و $(T')$ موازيين لـ $(\Delta)$ تُحقّق: $2,03 < \beta < 2,04$																				

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)															
مجموعة	مجزأة																
01.00	0.25x3  0.25	<p>(4) رسم <math>(\Delta)</math> ، <math>(T)</math> ، <math>(T')</math> رسم <math>(C)</math> على <math>]-\infty ; 1+\sqrt{2}]</math></p>															
01.00	0.25+0.25  0.25  0.25	<p>(5) أ. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty</math> و <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty</math> ب. <math>h</math> متزايدة تماما على كل من <math>[0; 1]</math> و <math>[e^\alpha; +\infty[</math> ومتناقصة تماما على <math>[1; e^\alpha]</math> جدول تغيّراتها.</p> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td><math>e^\alpha</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>h'(x)</math></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td><math>h(x)</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>f(0)</math></td> <td><math>f(\alpha)</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table>	$x$	0	1	$e^\alpha$	$+\infty$	$h'(x)$	+	0	-	0	$h(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$f(\alpha)$	$+\infty$
	$x$	0	1	$e^\alpha$	$+\infty$												
$h'(x)$	+	0	-	0													
$h(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$f(\alpha)$	$+\infty$													

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)								
مجموعة	مجزأة									
التمرين الأول: ( 04 نقاط)										
01.25	0.50	(1) أ . البرهان بالتراجع : $0 < u_n < 2$ ب. $(u_n)$ متزايدة تماما ، $(u_n)$ متقاربة.								
	0.25+0.50									
01.25	0.25+0.25	(2) أ . $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، $v_0 = -3$ ب. $u_n = \sqrt{4 - 3(\frac{1}{2})^n}$ ، $v_n = -3(\frac{1}{2})^n$ ج. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$								
	0.25+0.25									
	0.25									
01.50	0.50	(3) أ . تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n = \frac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$ ب. تبيان أن : $PGCD(2^n ; 3 + n \times 2^{n+2}) = PGCD(2^n ; 3)$ ج. استنتاج أن : $PGCD(2^n ; 3 + n \times 2^{n+2}) = 1$ د. إيجاد قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون : $S_n = \frac{83}{8}$ $99 \times 2^n = 8(3 + n \times 2^{n+2})$ يعني $S_n = \frac{83}{8}$ نجد : $n = 3$								
	0.25									
	0.25									
	0.25									
	0.25									
التمرين الثاني: (04 نقاط)										
0.50	0.50	(1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42								
02	0.50+0.50	(2) أ . $P(A) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ و $P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{7}$ ب. $P(C) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ و $P(E) = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$								
	0.50+0.50									
01.50	0.25	(3) قانون احتمال مجموعة قيم $X$ هي : $\{0;1;2\}$ <table><tr><td><math>x_i</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td><math>P(X = x_i)</math></td><td><math>\frac{12}{42}</math></td><td><math>\frac{24}{42}</math></td><td><math>\frac{6}{42}</math></td></tr></table> أمله الرياضيائي: $E(X) = \frac{6}{7}$	$x_i$	0	1	2	$P(X = x_i)$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$
	$x_i$		0	1	2					
	$P(X = x_i)$		$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$					
0.75										
0.50										



العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)														
مجموعة	مجزأة															
التمرين الثالث: (05 نقاط)																
01.25	0.75 0.50	(1) أ. حلّ المعادلة (E): $(x; y) = (6k + 1, 7k + 1) \quad k \in \mathbb{Z}$ ب. التحقق أنّ $xy$ عدد طبيعي غير معدوم يكفي أن نثبت $(6k + 1)(7k + 1) > 0$														
01.25	0.75	<table><tr><td>n</td><td>3k</td><td>3k+1</td><td>3k+2</td></tr><tr><td>بواقي قسمة <math>4^n</math> على 7</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	n	3k	3k+1	3k+2	بواقي قسمة $4^n$ على 7	1	4	2	(2) أ. بواقي قسمة $4^n$ على 7					
	n	3k	3k+1	3k+2												
بواقي قسمة $4^n$ على 7	1	4	2													
	0.50	ب. $4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7														
0.50	0.50	(3) البرهان بالتراجع $4^n \equiv 4[6]$														
02	0.50	(4) أ. تبين أنّ: $A = 4^{ab} - 4$														
	0.50	$A = 0 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + \dots + 3 \times 4^{ab-1} = 3 \times (4^1 + \dots + 4^{ab-1})$														
	01	ب. التَّحَقَّقْ أنّ: $A \equiv 0[6]$ ( $ab \in \mathbb{N}^*$ و $4^n \equiv 4[6]$ ) تعيّن الثنائيات $(a; b)$ التي من أجلها يكون $A$ قابلا للقسمة على 42 $A \equiv 0[42]$ يعني $A \equiv 0[7]$ و منه $4^{k+1} \equiv 4[7]$ أي $k = 3h \quad h \in \mathbb{N}$ و منه : $(a; b) = (18p + 1; 21p + 1) \quad p \in \mathbb{N}$														
التمرين الرابع: (07 نقاط)																
0.75	0.75	(I) 1 (C) أعلى $(\Gamma)$ على $]-1; \alpha[$ و (C) أسفل $(\Gamma)$ على $[\alpha; +\infty[$ (C) يتقاطعان $(\Gamma)$ في $H(\alpha; \alpha^2 + 1)$														
0.75	0.75	(2) إشارة $g(x)$ $g(x) > 0$ على $]-1; \alpha[$ و $g(x) < 0$ على $[\alpha; +\infty[$ $g(x) = 0$ لما $x = \alpha$														
0.75	0.25+0.25 0.25	(II) 1 أ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ب. $x = -1$ و $y = 0$ معادلتا مستقيمان مقاربان للمنحني $(C_f)$														
01.50	0.50	(2) أ. تبين أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$														
	0.50	ب. $f$ متزايدة تماما على $]-1; \alpha[$ و متناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$														
	0.50	جدول تغيّراتها الدالة $f$ . <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>f(x)</td><td><math>-\infty</math></td><td><math>f(\alpha)</math></td><td>0</td></tr></table>				x	-1	$\alpha$	$+\infty$	f'(x)		+	-	f(x)	$-\infty$	$f(\alpha)$
x	-1	$\alpha$	$+\infty$													
f'(x)		+	-													
f(x)	$-\infty$	$f(\alpha)$	0													

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
0.75	0.25	<p>ج. <math>f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}</math></p> <p><math>0.35 &lt; f(\alpha) &lt; 0.36</math></p> <p>د. معادلة لـ (T) : <math>y = x</math></p>
	0.25	
	0.25	
0.75	0.25	<p>5 رسم (T)</p> <p>رسم <math>(C_f)</math></p> 
	0.50	
01.75	0.25	<p>أ. الدالة <math>h</math> زوجية.</p> <p>ب. <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = -1</math> و <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = 1</math> ، <math>h</math> غير قابلة للاشتقاق من أجل الصفر</p> <p>التفسير: وجود نصفي مماسين في المبدأ</p> <p>ج. <math>(C_h)</math> ينطبق على <math>(C_f)</math> على <math>[0; +\infty[</math> ثم نتم الرسم بالتناظر بالنسبة الى حامل محور الترتيب .</p>  <p>رسم <math>(C_h)</math> انطلاقا من <math>(C_f)</math></p>
	0.25+0.25	
	0.25	
	0.25	
	0.50	