## Corrigé Type : Communications Numériques avancées

## Master 1 STC

### Exercice 01 :

**1. le seuil de détection (décision) optimal $\lambda$:**

La sortie de l'intégrateur est donnée par :

$$Z(t) = \int_0^T \left(s_{0,1}(t) + n(t)\right) dt = \begin{cases} \int_0^T (0 + n(t))dt \\ \int_0^T (A + n(t))dt \end{cases} = \begin{cases} b_0 \\ AT + b_0 \end{cases}$$

Le rapport de vraisemblance est donnés par :

$$\Lambda(Z) = \frac{f(Z/s_0)}{f(Z/s_1)} \underset{<}{\overset{>}{}} \frac{p(s_1)}{p(s_0)}$$

$$f(Z/s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(Z-0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(Z/s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(Z-AT)^2}{2\sigma^2}\right)$$

D'où $\Lambda(Z) = \frac{\exp\left(\frac{-(Z)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{-(Z-AT)^2}{2\sigma^2}\right)} = exp\left(\frac{-(Z)^2+(Z-AT)^2}{2\sigma^2}\right) \underset{<}{\overset{>}{}} \frac{p(s_1)}{p(s_0)}$

L'introduction du log Néperien et les simplifications donnes :

$$Z \underset{<}{\overset{>}{}} \frac{AT}{2} - \frac{\sigma^2}{AT} \ln \frac{p(s_1)}{p(s_0)}$$

Donc le seuil optimal est : $\boldsymbol{\lambda = \frac{AT}{2} - \frac{\sigma^2}{AT} ln \frac{p(s_1)}{p(s_0)}}$ **02 points**

Pour $p(s_1)=0.5$ *et* $p(s_2)=0.5$ : $\boldsymbol{\lambda = \frac{AT}{2}}$ **01 points**

**2- Calcul de la probabilité d'erreur $P_e$ :**

$$P_e = p(s_0)P_{es0} + p(s_1)P_{es1}$$

$$\boldsymbol{P_{es0}} = \int_\lambda^{+\infty} f(Z/s_0)dZ$$

$$\boldsymbol{P_{es1}} = \int_{-\infty}^{\lambda} f(Z/s_1)dZ$$

*On a*

$\boldsymbol{p(s_0) = p(s_1) = 0.5 \Rightarrow P_e = \frac{1}{2}P_{es0} + \frac{1}{2}P_{es1}} =$

$\frac{1}{2}\int_\lambda^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left(\frac{-(Z)^2}{2\sigma^2}\right) dZ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left(\frac{-(Z-AT)^2}{2\sigma^2}\right) dZ$

*Mettant* $\boldsymbol{y} = \frac{Z-AT}{\sigma} \Rightarrow dz = \sigma dy$

$\boldsymbol{D'o\grave{u}\ P_e} = \frac{1}{2}\int_{\frac{AT}{2\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(y)^2}{2}\right) dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\frac{AT}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(y)^2}{2}\right) dy$

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{AT}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{AT}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{AT}{2\sigma}\right), car\ Q(-x) = Q(x),$$

$$\boldsymbol{P_e = Q\left(\frac{AT}{2\sigma}\right)}$$

$$P_e = Q\left(\frac{AT}{2\sigma}\right)$$

Pour $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}T \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right)$ **03 points**

3- **Pour $p(s_0) = 0.5$; $\frac{N_0}{2} = 10^{-9}W/Hz$ ; *A=10mV, et* un débit de *1 Kbit/s* :**

a. Calcul de la probabilité d'erreur $P_e$ :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(10.10^{-3})^2.10^{-3}}{2.2.10^{-9}}}\right) = Q(5) = 2.87.10^{-7}$$

$\boldsymbol{P_e = 2.87.10^{-7}}$ **02 points**

b. Pour un débit de ***10 Kbits/s***, calcul de *A* pour atteindre la $p_e$ de la question (a) :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = 2.87.10^{-7} = Q\left(A\sqrt{\frac{10^{-4}.}{2.2.10^{-9}}}\right) = Q(5)$$

$$A\sqrt{\frac{10^{-4}.}{2.2.10^{-9}}} = 5 = A\sqrt{\frac{10^5.}{4}}$$

$d'ou\ \boldsymbol{A = 31.62\ mV}$ **02 points**

**Exercice 02 :**

1- Calculer de ***n*** et ***M***. et le type de modulation employé :

On à ***R=2400 baud*** et ***$D_b$ =4800bits/s***

$$n = \frac{D_b}{R} = \frac{4800}{2400} = 2\ bits$$

$$M = 2^n = 4$$

Type de modulation : **4-QAM**

De la même façon pour les autres débits, on peut résumer les résultats dans le tableau ci-dissous.

2- Le rapport énergie par bit sur bruit $E_b/N_0$ (en dB) requis pour obtenir une probabilité d'erreur de $P_e$=$10^{-5}$.

$$P_e = 4Q\left(\sqrt{\frac{3n}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5}$$

*Pour n=2 et M=4*

$$Q\left(\sqrt{2.\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{10^{-5}}{4} = 2{,}5\,.10^{-5} \Rightarrow \sqrt{2.\frac{E_b}{N_0}} = 4.55 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{4.55^2}{2} = 10.35$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 10.35 = 10.15\ dB$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 10.35 = 10.15\ dB$$

De la même façon en calcul $\frac{E_b}{N_0}$ pour les autres débits on peut résumer les résultats dans le tableau suivant : **08 points**

| | 4800 bits/s | 9600 bits/s | 19200 bits/s | 31200 bits/s |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | 2 | 4 | 8 | 13 |
| $M$ | 4 | 16 | 256 | 8192 |
| M-QAM | 4-QAM | 16-QAM | 256-QAM | 8192-QAM |
| $\frac{E_b}{N_0}$ | 10.35 | 26.45 | 224.82 | 4444.14 |
| $\frac{E_b}{N_0}$ $(dB)$ | 10.15 | 14.12 | 23.42 | 36.38 |

3-Comme observé dans le graphique suivant, il y a une augmentation de la puissance transmise moyenne d'environ 2,5 dB par bit supplémentaire par symbole : **02 points**