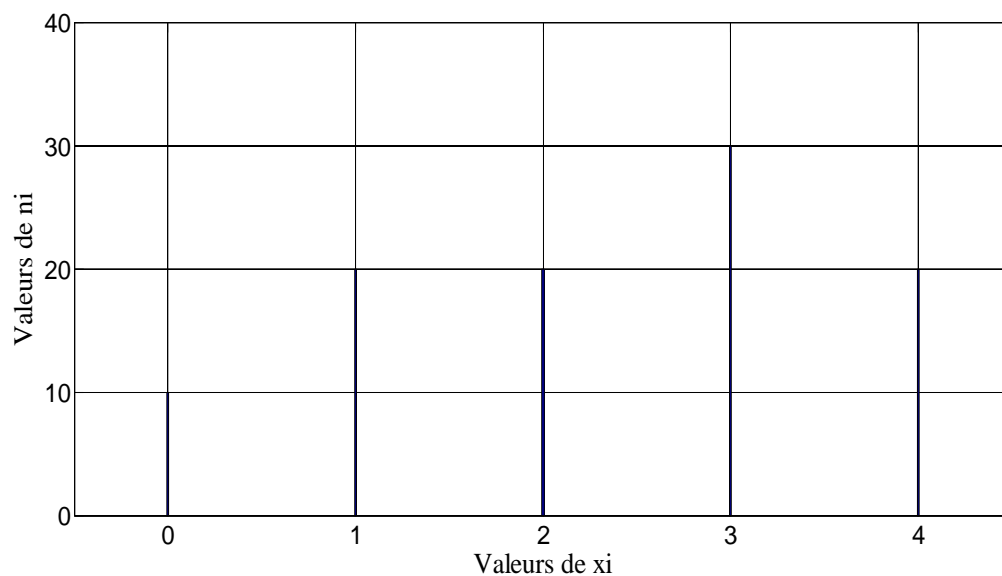
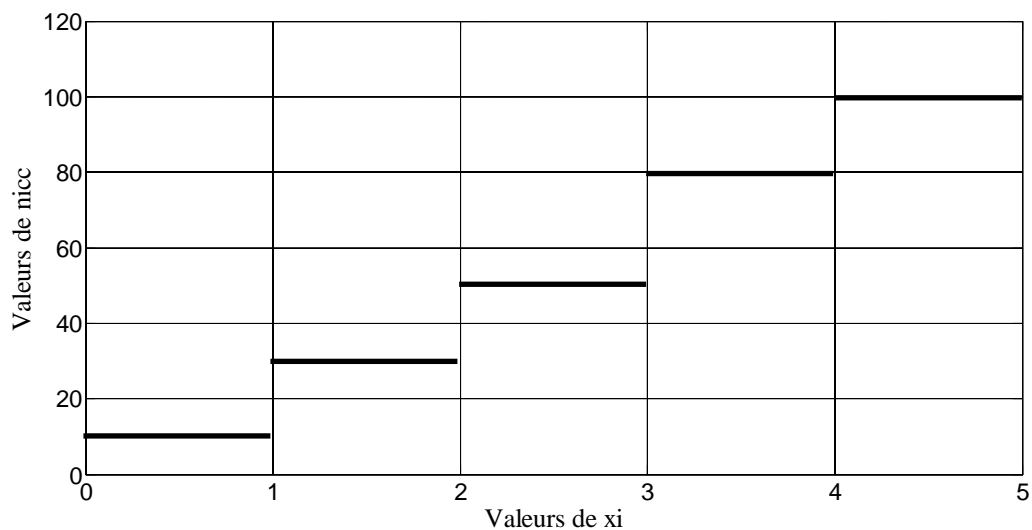


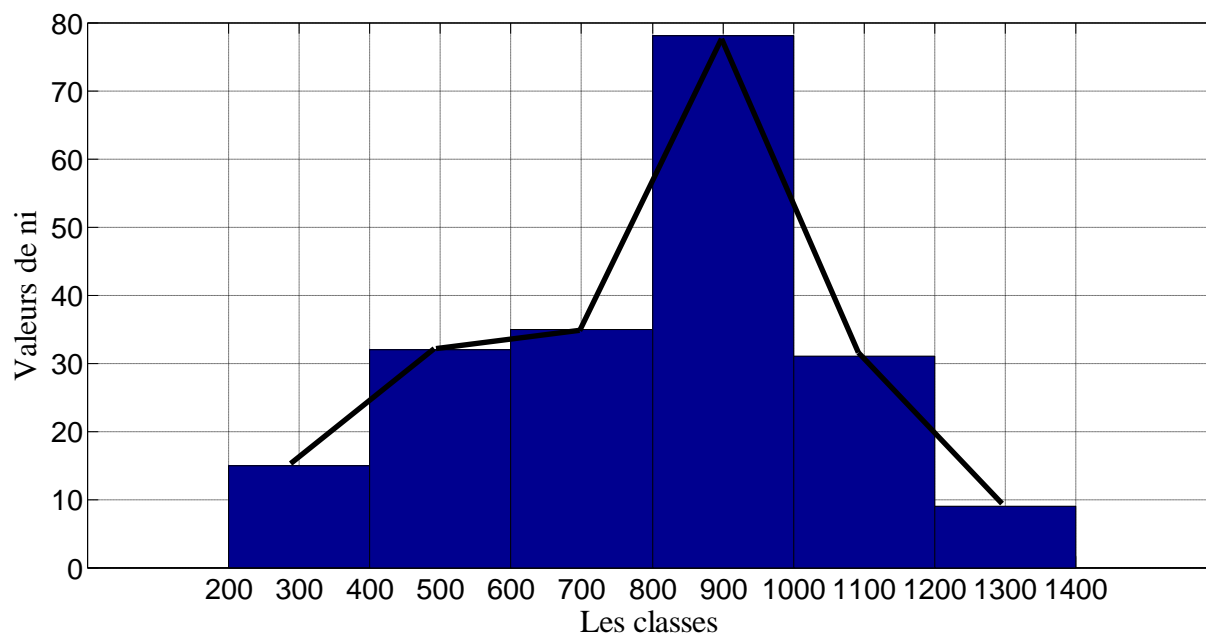
Solution du TD N° 2**Exercice 1:**

nombre d'enfants (x_i)	Nombre de familles (n_i)	n_{iCC}
0	10	10
1	20	30
2	20	50
3	30	80
4	20	100

1- Diagramme en bâtons :**2- Diagramme des effectifs cumulés croissants :**

Exercice 2:

Temps de connexion (heures par an)	[200, 400[[400, 600[[600, 800[[800, 1000[[1000, 1200[[1200, 1400[
Nombre d'utilisateurs	15	32	35	78	31	9

L'histogramme et le polygone des effectifs**Exercice 3:**

Mention au BAC	Passable	Assez Bien	Bien	Très Bien
Nombre de lycéens	12	8	3	2

1- **Le diagramme en secteurs :** On calcule les différents angles avec la formule :

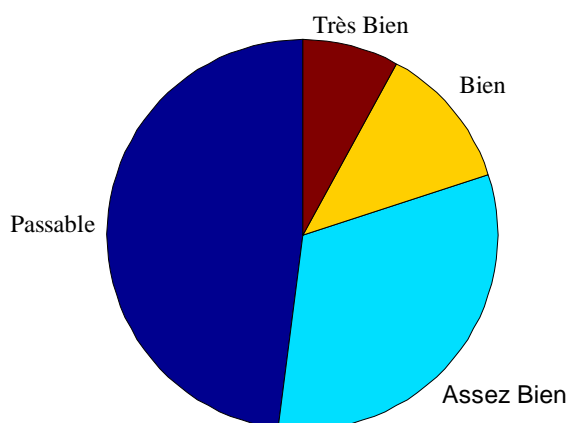
$$\theta_i = 360 * f_i = \frac{360 * n_i}{N}$$

$$\theta_1 = \frac{360 * 12}{25} = 172.8^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{360 * 8}{25} = 115.2^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{360 * 3}{25} = 43.2^\circ$$

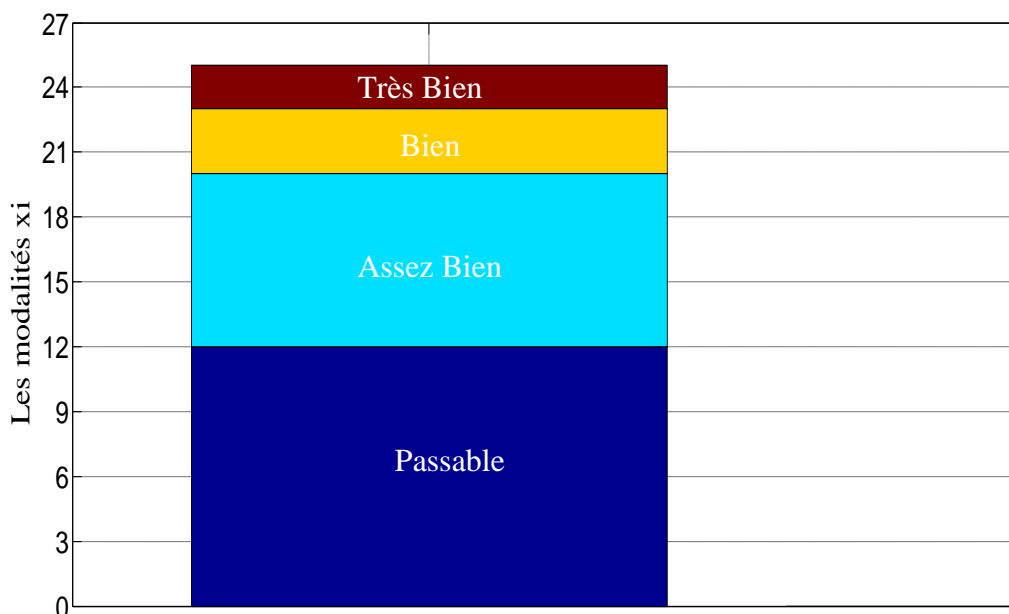
$$\theta_4 = \frac{360 * 2}{25} = 28.8^\circ$$



2- Le diagramme en bandes :

On calcule d'abord les effectifs cumulés croissants :

n_{iCC}	12	20	23	25
-----------	----	----	----	----



Exercice 4:

Soit la série statistique suivante : 5, 1, 8, 11, 4, 4, 10, 7, 6, 2, 3, 9, 12, 2, 7

➤ **Le mode :**

Le mode est la valeur de l'observation la plus fréquente, les observations 2, 4 et 7 sont les plus fréquentes et elles apparaissent avec le même nombre de fois, donc les modes : 2, 4 et 7

➤ **La médiane :**

On ordonne les observations par ordre croissant : 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12

On a le nombre d'observations $n = 15 = 2 \times 7 + 1$ (impair) donc la médiane sera $Me = (7+1)^{\text{ème}} = 8^{\text{ème}}$ observation $\Rightarrow Me = 6$

➤ **La moyenne arithmétique:**

$$Moy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O_i = \frac{1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12}{15} = \frac{91}{15} = 6.0667$$

➤ **La moyenne harmonique:**

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{O_i}} = \frac{15}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}} = 3.7537$$

➤ **L'étendue:**

C'est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur plus petite parmi les observations.

$$e = O_{\max} - O_{\min} = 12 - 1 = 11$$

➤ **Les quartiles:**

On organise les valeurs par ordre croissant : 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12

- Le nombre de valeurs est $n = 15$, $\frac{n}{4} = 3.75$ n'est pas un entier naturel alors on l'arrondit à 4. Le 1^{er} quartile Q_1 est la 4^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_1=3$.
- $\frac{n}{2} = 7.5$, ce n'est pas un entier naturel alors on l'arrondit à 8. Le 2^{ème} quartile Q_2 est la 8^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_2=6$.
- $\frac{3n}{4} = 11.25$, ce n'est pas un entier naturel alors on l'arrondit à 12. Le 3^{ème} quartile Q_3 est la 12^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_3=9$.

Finalement, les cinq quartiles de la série sont $Q_0=1$, $Q_1=3$, $Q_2=6$, $Q_3=9$ et $Q_4=12$

➤ **La variance:**

Elle est donnée par la relation suivante : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{x})^2}{n}$ ($\bar{x} = Moy$)

$$V(X) = \frac{(1 - 6.0667)^2 + (2 - 6.0667)^2 + (2 - 6.0667)^2 + (3 - 6.0667)^2 + (4 - 6.0667)^2 + (4 - 6.0667)^2 + (5 - 6.0667)^2 + (6 - 6.0667)^2 + (7 - 6.0667)^2 + (7 - 6.0667)^2 + (8 - 6.0667)^2 + (9 - 6.0667)^2 + (10 - 6.0667)^2 + (11 - 6.0667)^2 + (12 - 6.0667)^2}{15}$$

$$V(X) = 11.1289$$

➤ **L'écart type:**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11.1289} = 3.336$$

Exercice 5:

Soit la série statistique suivante : 6, 10, 14, 17, 9, 6, 4, 12, 9, 10, 10, 11, 12, 18, 10, 9, 11, 8, 7, 10

➤ **Le mode :**

L'observation 10 est la plus fréquente donc le mode = 10

➤ **La médiane :**

On ordonne les observations par ordre croissant :

4, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 14, 17, 18

On a le nombre d'observations $n = 20 = 2 \times 10$ (pair)

$$Me = \frac{(10)^{\text{ème}} \text{ observation} + (11)^{\text{ème}} \text{ observation}}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10$$

➤ **La moyenne arithmétique:**

$$\begin{aligned}
 Moy &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O_i \\
 &= \frac{4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 9 + 9 + 9 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 11 + 11 + 12 + 12 + 14 + 17 + 18}{20} \\
 &= \frac{203}{20} = 10.15
 \end{aligned}$$

➤ **La moyenne harmonique:**

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{O_i}} \\
 &= \frac{20}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18}} \\
 &= 9.0138
 \end{aligned}$$

➤ **L'étendue:**

$$e = O_{\max} - O_{\min} = 18 - 4 = 14$$

➤ **Les quartiles:**

On organise les valeurs par ordre croissant :

4, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 14, 17, 18

- Le nombre de valeurs est $n = 20$, $\frac{n}{4} = 5$ c'est un entier naturel. Le 1^{er} quartile Q_1 est la 5^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_1 = 8$.
- $\frac{n}{2} = 10$, c'est un entier naturel. Le 2^{ème} quartile Q_2 est la 10^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_2 = 10$.
- $\frac{3n}{4} = 15$, c'est un entier naturel. Le 3^{ème} quartile Q_3 est la 15^{ème} valeur, c'est-à-dire $Q_3 = 11$.

Finalement, les cinq quartiles de la série sont $Q_0 = 4$, $Q_1 = 8$, $Q_2 = 10$, $Q_3 = 11$ et $Q_4 = 18$

➤ **La variance:**

Elle est donnée par la relation suivante : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{x})^2}{n}$ ($\bar{x} = Moy$)

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \frac{(4 - 10.15)^2 + (6 - 10.15)^2 + (6 - 10.15)^2 + (7 - 10.15)^2 + (8 - 10.15)^2}{20} + \\
 &\quad \frac{(9 - 10.15)^2 + (9 - 10.15)^2 + (9 - 10.15)^2 + (10 - 10.15)^2 + (10 - 10.15)^2 + (10 - 10.15)^2}{20} + \\
 &\quad \frac{(10 - 10.15)^2 + (10 - 10.15)^2 + (11 - 10.15)^2 + (11 - 10.15)^2 + (12 - 10.15)^2 + (12 - 10.15)^2}{20} + \\
 &\quad \frac{(14 - 10.15)^2 + (17 - 10.15)^2 + (18 - 10.15)^2}{20}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = 11.1264$$

➤ **L'écart type:**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11.1264} = 3.3356$$

Exercice 6:

Soit la série statistique suivante :

12, 17, 10, 17, 16, 15, 15, 18, 17, 16

1- Mettre ces données sous forme d'un tableau à variable quantitative discrète (modalités + effectifs) ?

- La valeur « 12 » apparaît « 1 » fois
- La valeur « 17 » apparaît « 3 » fois
- La valeur « 10 » apparaît « 1 » fois
- La valeur « 16 » apparaît « 2 » fois
- La valeur « 15 » apparaît « 2 » fois
- La valeur « 18 » apparaît « 1 » fois

⇒

Modalités x_i	Effectifs n_i
12	1
17	3
10	1
16	2
15	2
18	1

2- Calcul du le mode, la médiane, les moyennes arithmétique et harmonique, l'étendue, les quartiles, la variance et l'écart type ?

➤ **Le mode :**

Le mode correspond à la valeur de la modalité x_i qui correspond à l'effectif n_i le plus grand.

Donc le mode = 17.

➤ **La médiane :**

On ordonne les modalités par ordre croissant :

Pour déterminer la médiane, on repère la valeur « 0.5 » dans la

colonne de f_{iCC} ou bien $\frac{N}{2}$ dans la colonne de n_{iCC} . On choisit

ensuite la valeur de f_{iCC} égale ou immédiatement supérieure à « 0.5 »

ou bien la valeur de n_{iCC} égale ou immédiatement supérieure à $\frac{N}{2}$.

La valeur de la médiane sera égale à la valeur de x_i se trouvant sur la même ligne que $f_{iCC} = 0.5$ ou

$$n_{iCC} = \frac{N}{2}$$

Modalités x_i	Effectifs n_i
10	1
12	1
15	2
16	2
17	3
18	1

Modalités x_i	Effectifs n_i	n_{iCC}	f_i	f_{iCC}
10	1	1	0.1	0.1
12	1	2	0.1	0.2
15	2	4	0.2	0.4
16	2	6	0.2	0.6
17	3	9	0.3	0.9
18	1	10	0.1	1

D'après le tableau $f_{iCC} = 0.5$ ou $n_{iCC} = \frac{10}{2} = 5$ est atteint pour $x_4 = 16$ donc $Me = 16$

➤ **La moyenne arithmétique:**

$$Moy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r n_i x_i = \frac{1 * 10 + 1 * 12 + 2 * 15 + 2 * 16 + 3 * 17 + 1 * 18}{10} = 15.3$$

➤ **La moyenne harmonique:**

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{x_i}} = \frac{10}{\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{2}{15} + \frac{2}{16} + \frac{3}{17} + \frac{1}{18}} = 14.8436$$

➤ **L'étendue:**

C'est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur plus petite parmi les modalités.

$$.e = x_{\max} - x_{\min} = 18 - 10 = 8$$

➤ **Les quartiles:**

Pour une variable discrète, on calcule la valeur du quart de l'effectif total ($\frac{N}{4}$ ou son arrondi), on la localise dans les effectifs cumulés croissants puis on repère la valeur de x_i correspondante qui sera le 1^{er} quartile Q_1 .

On fait la même chose pour Q_2 et Q_3 en prenant, respectivement, $\frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{4}$

➤ $N = 10$, donc $\frac{10}{4} = 2.5$, on arrondit à 3 donc le 1^{er} quartile $Q_1 = x_3 = 15$.

➤ $\frac{N}{2} = 5$ (entier), donc le 2^{ème} quartile $Q_2 = x_4 = 16$.

$\frac{3N}{4} = 7.5$, on arrondit à 8 donc le 3^{ème} quartile $Q_3 = x_5 = 17$.

Finalement, les cinq quartiles sont $Q_0=10$, $Q_1=15$, $Q_2=16$, $Q_3=17$ et $Q_4=18$.

➤ **La variance:**

Elle est donnée par la relation suivante : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^r n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ ($\bar{x} = Moy$)

$$V(X) = \frac{1 * (10 - 15.3)^2 + 1 * (12 - 15.3)^2 + 2 * (15 - 15.3)^2 + 2 * (16 - 15.3)^2 + 3 * (17 - 15.3)^2 + 1 * (18 - 15.3)^2}{10} = 5.61$$

➤ **L'écart type:**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5.61} = 2.3685$$

Exercice 7:

Soit la série statistique suivante : 12, 17, 10, 17, 16, 15, 15, 18, 17, 16

1- mettre les données sous forme d'un tableau à variable continue avec 04 classes d'amplitudes respectives : 3, 4, 1 et 2 sachant que la borne inférieure de la 1^{ère} classe est égale à 10

➤ La borne inférieure de la 1^{ère} classe est 10, son amplitude est 3 donc :

$$A_1 = b_1 - a_1 \Rightarrow b_1 = A_1 + a_1 = 3 + 10 = 13$$

- Pour la 2^{ème} classe, la borne inférieure est 13, son amplitude est 4 donc :

$$A_2 = b_2 - a_2 \Rightarrow b_2 = A_2 + a_2 = 4 + 13 = 17$$

- La borne inférieure de la 3^{ème} classe est 17, son amplitude est 1 donc :

$$A_3 = b_3 - a_3 \Rightarrow b_3 = A_3 + a_3 = 1 + 17 = 18$$

- La borne inférieure de la 3^{ème} classe est 18, son amplitude est 2 donc :

$$A_3 = b_3 - a_3 \Rightarrow b_3 = A_3 + a_3 = 2 + 18 = 20$$

Après avoir défini les classes, on inscrit dans chaque classe le nombre de notes qui s'y trouvent ce qui nous donnera l'effectif de chaque classe.

Notes du module (x_i)	Nombre d'étudiants (n_i)	n_{icc}	d_i	c_i
[10, 13[2	2	0.6667	11.5
[13, 17[4	6	1	15
[17, 18[3	9	3	17.5
[18, 20[1	10	0.5	19

2- Calculer le mode, la médiane, les moyennes arithmétique et harmonique, l'étendue, les quartiles, la variance et l'écart type ?

➤ **Le mode :**

On calcule d'abord la classe modale avec le calcul de la densité d'effectif : $d_i = \frac{n_i}{A_i}$

La plus grande densité obtenue est 3 alors la classe [17, 18[est la classe modale.

➤ **La médiane :**

On cherche d'abord la classe dans laquelle on atteint la moitié de l'effectif total $\left(\frac{N}{2}\right)$ et cela à partir de l'effectif cumulé croissant. Ensuite on peut calculer la valeur approchée de la médiane en

utilisant la relation suivante : $Me = a_i + A_i \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - n_{(i-1)cc}\right)}{n_i} \right]$

On a la moitié de l'effectif total $\frac{N}{2} = \frac{10}{2} = 5$

A partir des valeurs de n_{icc} , la valeur « 5 » est atteinte dans la classe [13,17[. La classe médiane sera donc [13,17[.

$a_i = 13$, $n_i = 4$ et $n_{(i-1)cc} = 2$, $A_i = 4$

$$Me = a_i + A_i \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - n_{(i-1)cc}\right)}{n_i} \right] = 13 + 4 \left[\frac{5 - 2}{4} \right] = 16$$

➤ **La moyenne arithmétique:**

$$Moy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r n_i c_i = \frac{2 * 11.5 + 4 * 15 + 3 * 17.5 + 1 * 19}{10} = 15.45$$

➤ **La moyenne harmonique:**

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{c_i}} = \frac{10}{\frac{2}{11.5} + \frac{4}{15} + \frac{3}{17.5} + \frac{1}{19}} = 15.0457$$

➤ **L'étendue:**

$$e = 20 - 10 = 10$$

➤ **Les quartiles:**

Pour une variable continue en classes, on calcule les effectifs cumulés croissants puis on localise la classe où les valeurs de $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{4}$ se trouvent. Enfin on utilise la formule générale suivante pour calculer les trois quartiles (Q_1 , Q_2 et Q_3)

$$Q_j = a_i + A_i \left[\frac{j * \frac{N}{4} - n_{(i-1)cc}}{n_i} \right], \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

- $N = 10$, donc $\frac{N}{4} = 2.5$, on arrondit à 3, donc le 1^{er} quartile $Q_1 \in [13, 17[$. En utilisant la formule pour le calcul de Q_1 , on aura :

$$Q_1 = a_i + A_i \left[\frac{\frac{N}{4} - n_{(i-1)cc}}{n_i} \right] = 13 + 4 \left[\frac{2.5 - 2}{4} \right] \Rightarrow Q_1 = 13.5$$

- $\frac{N}{2} = 5$, donc le 2^{ème} quartile $Q_2 \in [13, 17[$. En utilisant la formule pour le calcul de Q_2 , on aura :

$$Q_2 = a_i + A_i \left[\frac{\frac{N}{2} - n_{(i-1)cc}}{n_i} \right] = 13 + 4 \left[\frac{5 - 2}{4} \right] \Rightarrow Q_2 = 16$$

- $\frac{3N}{4} = 7.5$, on arrondit à 8 donc le 3^{ème} quartile $Q_3 \in [17, 18[$. En utilisant la formule pour le calcul de Q_3 , on aura :

$$Q_3 = a_i + A_i \left[\frac{\frac{3N}{4} - n_{(i-1)cc}}{n_i} \right] = 17 + 1 \left[\frac{7.5 - 6}{3} \right] \Rightarrow Q_3 = 17.5$$

Finalement, les cinq quartiles sont $Q_0=10$, $Q_1=13.5$, $Q_2=16$, $Q_3=17.5$ et $Q_4=20$.

➤ **La variance:**

Elle est donnée par la relation suivante : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^r n_i c_i^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (\bar{x} = Moy)$

$$V(X) = \frac{2 * (11.5)^2 + 4 * (15)^2 + 3 * (17.5)^2 + 1 * (19)^2}{10} - (15.45)^2 = 5.7225$$

- **L'écart type:** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5.7225} = 2.3922$