CHAPITRE 1 - RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES

1. INTRODUCTION

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$. On appelle racine de l'équation $f(x) = 0$ toute valeur $\alpha \in D_f$ vérifiant $f(\alpha) = 0$. α est aussi appelé racine ou zéro de la fonction f.

Bien qu'il existe des méthodes permettant d'affirmer l'existence ou non de racines pour une fonction donnée, il n'y a pas de méthodes analytiques générales pour trouver ces racines sauf pour certains cas particuliers, en l'occurrence les polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Le recours aux méthodes numériques devient indispensable pour trouver une solution approchée à ce type de problème.

La résolution numérique d'une équation $f(x) = 0$ se fait généralement en 2 étapes :

Etape 1 : séparation des racines,

Etape 2 : approximation des racines.

Ces étapes sont détaillées dans les paragraphes suivants.

2. SEPARATION DES RACINES

On dit qu'une racine α de l'équation $f(x) = 0$ est séparable s'il existe un intervalle $[a, b] \subset D_f$ tel que α soit la seule racine dans cet intervalle.

La séparation des racines consiste à localiser les racines, si elles existent, chacune dans un domaine suffisamment étroit pour être certain qu'elle soit unique dans ce domaine. Ceci peut être effectué en utilisant la *méthode graphique*.

2.1. METHODE GRAPHIQUE POUR LA SEPARATION DES RACINES

Elle consiste à tracer le graphe de la fonction f, généralement en étudiant ses variations sur sont domaine de définition. Les abscisses des points d'intersection avec l'axe des x représentent les racines de l'équation $f(x) = 0$.

EXEMPLE 1

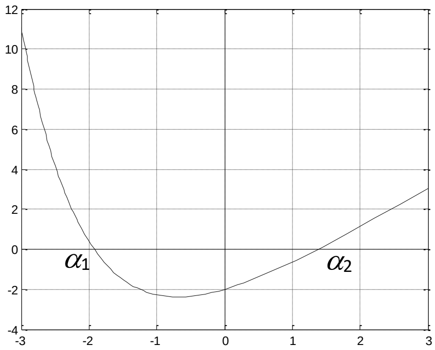
On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$

$f'(x) = -e^{-x} + 2$

Le tableau de variations et le graphe de la fonction sont donnés ci-dessous.

On constate que le graphe de la fonction f possède 2 points d'intersection avec l'axe x, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in$[-2,-1], $\alpha_2 \in$[1,2].

x	$-\infty$		$-ln(2) = -0.69$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2.39	$\nearrow$	$+\infty$

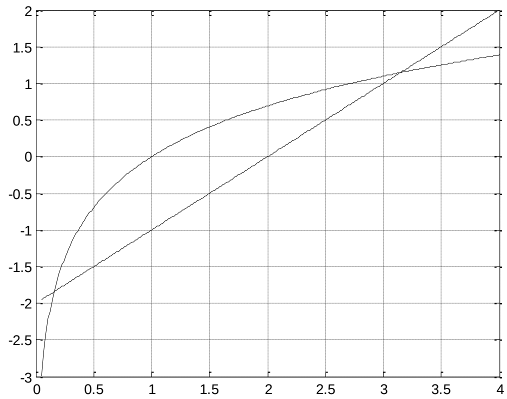


REMARQUE

Si on peut décomposer la fonction f en deux fonctions f_1 et f_2 sous la forme $f = f_1 - f_2$, on aura :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$

Les valeurs de x vérifiant cette dernière équation, qui sont eux même les racines de l'équation $f(x) = 0$, correspondent graphiquement aux abscisses des points d'intersection des graphes de f_1 et f_2.



EXEMPLE 2

On considère l'équation $f(x) = 0$,

Avec $f(x) = ln(x) - x + 2$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow ln(x) = x - 2$

$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$

Avec $f_1(x) = ln(x)$ et $f_2(x) = x - 2$.

Les graphes de f_1 et f_2 possèdent 2 points d'intersection, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in [0,1]$, $\alpha_2 \in [3,4]$.

3. APPROXIMATION DES RACINES

3.1. METHODE DE DICHOTOMIE (OU DE BISSECTION)

Soit une équation $f(x) = 0$ à résoudre sur un intervalle $[a, b]$.

CONDITIONS D'APPLICATION

On suppose que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

D1 : f continue sur $[a, b]$.

D2 : $f(a) \times f(b) < 0$.

D3 : f monotone sur $[a, b]$.

Ce sont des conditions suffisantes qui assurent l'existence et l'unicité de la racine sur l'intervalle $[a, b]$ et ainsi la méthode de dichotomie sera applicable.

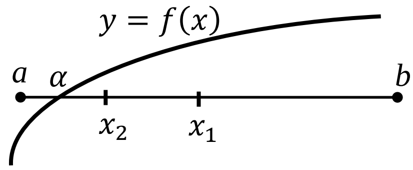
PRINCIPE DE LA METHODE

La dichotomie (action de couper en deux) consiste en une succession de division sur deux de l'intervalle contenant la racine jusqu'à ce que la longueur de ce dernier devienne suffisamment petite pour pouvoir considérer son milieu comme valeur approchée acceptable de la racine.

Pour vérifier qu'un sous-intervalle, qui est le résultat de la division sur deux de l'intervalle précédent, contient la racine il suffit de vérifier le signe de la fonction f à ses extrémités. Le changement de signe de f d'une extrémité à l'autre assure l'existence de la racine dans cet intervalle.

ALGORITHME DE LA METHODE

1- Calculer l'abscisse du milieu de l'intervalle $[a, b]$: $x_1 = \frac{a+b}{2}$ qui sera considérée comme première valeur approchée de la racine.



2- Si $f(a)f(x_1) < 0$ alors la racine $\alpha \in [a, x_1]$
Sinon la racine $\alpha \in [x_1, b]$.

3- Répéter les étapes 1 et 2 avec le nouvel intervalle contenant la racine.

4- Arrêter le processus après un certain nombre d'itérations (répétitions) n donné, ou lorsque la longueur de l'intervalle contenant la racine devient inférieure à une certaine tolérance ε donnée.

ESTIMATION DE L'ERREUR

Lors de l'application de la méthode de Dichotomie, nous pouvons constater que :

A la 1$^{\text{ère}}$ itération : $\Delta x = |\alpha - x_1| \leq \frac{b-a}{2}$

Où α est la racine exacte ; x_1 valeur approchée de racine à la 1$^{\text{ère}}$ itération ; Δx erreur absolue.

A la 2$^{\text{ème}}$ itération : $\Delta x = |\alpha - x_2| \leq \frac{b-a}{2^2}$

Donc on déduit qu'à l'itération n :

$$\boldsymbol{\Delta x = |\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}}$$

Cette dernière relation donne la borne supérieure de l'erreur absolue à l'itération n de la méthode de Dichotomie. On peut vérifier que lorsque $n \to +\infty$ l'erreur absolue $\Delta x \to 0$, d'où la convergence sûre de la méthode de dichotomie vers racine de l'équation.

A l'aide de cette relation on peut déterminer à priori le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine à ε près (en d'autre terme, pour que l'erreur absolue $\Delta x \leq \varepsilon$). Il suffit de mettre :

$$\Delta x \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n.ln(2) \geq ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \boldsymbol{n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)}}$$

EXEMPLE 1

On considère l'équation précédente $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$.

Nous avons déjà montré, en utilisant la méthode graphique, que cette équation possède 2 racines $\alpha_1 \in [-2, -1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$. Appliquons la méthode de Dichotomie pour approcher la racine se trouvant dans l'intervalle [1,2].

1ère itération :

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad ; \quad f(1.5) = 0.223$$

$f(1)f(1.5) = (-0.632)(0.223) < 0$ Donc la racine $\alpha \in [1,1.5]$

2ème itération :

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \quad ; \quad f(1.25) = -0.214$$

$f(1.25)f(1.5) = (-0.214)(0.223) < 0$ Donc la racine $\alpha \in [1.25,1.5]$

Le tableau suivant résume le résultat de 4 itérations :

N^o *itr.*	*a*	*b*	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	Δx
1	1	2	1.5	- 0.632	1.135	0.223	0.5
2	1	1.5	1.25	- 0.632	0.223	- 0.214	0.25
3	1.25	1.5	1.375	- 0.214	0.223	0.0028	0.125
4	1.25	1.375	**1.3125**	- 0.214	0.0028	- 0.106	**0.0625**

On peut donner une estimation de la racine après 4 itérations $\alpha = 1.3125 \pm 0.0625$

On peut déterminer le nombre d'itérations qu'il faudrait faire pour avoir une précision $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)} = \frac{ln\left(\frac{2-1}{10^{-3}}\right)}{ln(2)} \approx 9.96 \Rightarrow n = 10 \; itérations$$

EXEMPLE 2

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 - 4x + 1$.

Il est possible de vérifier, sans utiliser la méthode graphique, l'existence d'une racine unique de cette équation sur l'intervalle [0,1] et l'applicabilité de la méthode de dichotomie sur le même intervalle en vérifiant simplement les conditions D1, D2 et D3 citées précédemment.

D1 : f est continue sur l'intervalle [0,1]

D2 : $f(0) \times f(1) = -2 < 0$

D3 : $f'(x) = 3x^2 - 4$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq 3x^2 - 4 \leq -1 \Leftrightarrow -4 \leq f'(x) \leq -1$$

Donc : $\forall x \in [0,1], f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur l'intervalle [0,1].

Le tableau suivant résume les résultats de 5 itérations :

N° itr.	*a*	*b*	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	Δx
1	0	1	0.5	1	- 2	- 0.875	0.5
2	0	0.5	0.25	1	- 0.875	0.016	0.25
3	0.25	0.5	0.375	0.016	- 0.875	- 0.447	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	0.016	- 0.447	- 0.219	0.0625
5	0.25	0.3125	0.28125	0.016	- 0.219	- 0.103	0.03125

On remarque que $x_2 = 0.25$ ($2^{ème}$ itération) est le meilleur résultat obtenu car $f(x_2) = 0.016$ est le plus proche de 0. On conclu que même si la convergence de la méthode de Dichotomie vers la racine est sûre, elle n'est pas monotone.

REMARQUE

La méthode de Dichotomie est simple à mettre en œuvre mais elle est de convergence lente.

3.2. METHODE DE NEWTON (OU METHODE DES TANGENTES)

Soit une équation $f(x) = 0$ à résoudre sur un intervalle $[a, b]$.

CONDITIONS D'APPLICATION

On suppose que f vérifie les conditions suivantes :

N1 : f continue sur $[a, b]$.

N2 : $f(a) \times f(b) < 0$.

N3 : f monotone sur $[a, b]$.

N4 : f dérivable sur $[a, b]$ et $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$.

N5 : f deux fois dérivable sur $[a, b]$.

PRINCIPE DE LA METHODE

Une approche graphique nous permettra d'expliquer le principe de cette méthode.

Considérons une fonction f ayant une racine α qu'on essaye d'approcher (voir figure ci-dessous).

A partir d'une abscisse initiale $x_0 \in [a, b]$ proche de la racine, traçons la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Cette tangente coupe l'axe des x en x_1. Traçons ensuite une $2^{ème}$ tangente à la courbe de f au point $(x_1, f(x_1))$ qui coupe l'axe des x en x_2 … et ainsi de suite.

En continuant de la même façon, nous constatons que les abscisses x_0 , x_1 , x_2 ... constituent une suite qui converge vers la racine α de l'équation $f(x) = 0$.

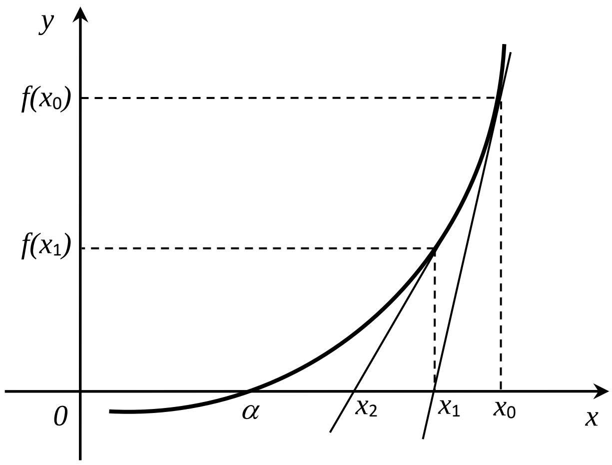
Déterminons à présent x_1 à partir de x_o. Pour cela considérons la pente de la droite tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ qui vaut :

$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De la même façon on peut déterminer x_2 à partir de x_1, x_3 à partir de x_2 …et ainsi de suite, en utilisant la formule de récurrence suivante, dite formule de Newton,

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$



ALGORITHME DE LA METHODE

1- Choix d'une valeur initiale $x_o \in [a, b]$.

2- Calcul des termes de la suite de Newton $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

3- Arrêter le calcul au terme x_n avec *n* donné, ou lorsque $|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$ avec *ε* donné.

ESTIMATION DE L'ERREUR

On montre qu'à l'itération *n* de la méthode de Newton

$$\Delta \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x_n}| \le \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2^n}} \quad \boldsymbol{avec} \quad \boldsymbol{c} = \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{\boldsymbol{f''(x)}}{\boldsymbol{2f'(x)}}\right|$$

Cette relation montre qu'avec un choix de l'intervalle $[a, b]$ tel que $c\,(b - a) < 1$, on peut remarquer que lorsque $n \to +\infty$ l'erreur absolue $\Delta x \to 0$. Et on peut ainsi dire que, $\forall x_o \in [a, b]$ l'algorithme de la méthode de Newton converge vers la racine α de l'équation $f(x) = 0$.

A l'aide de cette relation on peut déterminer à priori le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine à ε près. Il suffit de mettre :

$$\Delta x \le \frac{1}{c}[c(b-a)]^{2^n} \le \varepsilon \Rightarrow [c(b-a)]^{2^n} \le c\varepsilon \Rightarrow 2^n\, ln[c(b-a)] \le ln(c\varepsilon)$$

$$\Rightarrow 2^n \ \ge \frac{ln(c\varepsilon)}{ln\big(c(b-a)\big)}$$

(le choix de l'intervalle [*a*,*b*] est tel que *c*(*b* – *a*) < 1, donc *ln*[*c*(*b* – *a*)] < 0)

$$\Leftrightarrow n\, ln(2) \ \ge ln\left(\frac{ln(c\varepsilon)}{ln[c(b-a)]}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{n} \ \ \ge \frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{ln(c\varepsilon)}}{\boldsymbol{ln[c(b-a)]}}\right)}{\boldsymbol{ln(2)}}$$

EXEMPLE

On considère l'équation précédente $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$.

Appliquons la méthode de Newton pour approcher la racine se trouvant dans l'intervalle [1,2] à 10^{-3} près en prenant $x_0 = 1.5$.

Algorithme de Newton $\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$

1ère itération :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.3744$$

$$|x_1 - x_0| = |1.3744 - 1.5| = 0.1256$$

2ème itération :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3744 - \frac{f(1.3744)}{f'(1.3744)} = 1.3734$$

$$|x_2 - x_1| = |1.3734 - 1.3744| = 0.001 \leq 10^{-3}$$

Estimation de la racine après 2 itérations $\alpha = 1.3734 \pm 0.001$

On peut déterminer le nombre d'itérations qu'il faudrait faire pour avoir une précision $\varepsilon = 10^{-8}$:

$$n \ \geq \frac{ln\left(\frac{ln(c\varepsilon)}{ln[c(b-a)]}\right)}{ln(2)} \quad avec \ c = \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$$

Détermination de *c* :

$$f(x) = e^{-x} + 2x - 3$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 2 \ \ ; \ \ f''(x) = e^{-x}$$

On pose

$$g(x) = \frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{e^{-x}}{2(2 - e^{-x})} = \frac{1}{2(2e^{x} - 1)}$$

On aura alors

$$c = \max_{x\in[1,2]}|g(x)| = g(1) = \frac{1}{2(2e - 1)} = 0.1127$$

Donc

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{ln(0.1127 \times 10^{-8})}{ln\left(0.1127(2-1)\right)}\right)}{ln(2)} \approx 3.24 \Rightarrow \boldsymbol{n = 4}$$

Ce résultat peut être vérifié. En effet, en faisant 4 itérations nous allons atteindre une précision de 10^{-8} (on remarque qu'en moins 8 chiffres après la virgule, dans l'approximation de la racine, vont se fixer à partir de la 4ème itération) :

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = \underline{\mathbf{1.37}}4425151947501$$

$$x_2 = \underline{\mathbf{1.373374}}625298628$$

$$x_3 = \underline{\mathbf{1.373374545351944}}$$

$$x_4 = \underline{\mathbf{1.373374545351944}}$$

REMARQUE

La méthode de Newton est caractérisée par sa convergence rapide vers la racine.