CHAPITRE 2 - INTEGRATION NUMERIQUE

1. INTRODUCTION

L'objectif de l'intégration numérique est d'obtenir une valeur approchée d'une intégrale définie $I = \int_a^b f(x)dx$ lorsque cette dernière ne peut être évaluée analytiquement (soit que l'expression de f est compliquée ou que f est mal connue : on ne dispose que d'un ensemble de valeurs de f).

Le principe des méthodes qui seront étudiées consiste à remplacer f sur l'intervalle d'intégration $[a, b]$ par son polynôme d'interpolation P_n de degré *n*, il s'agit d'un polynôme proche de la fonction car ayant un ensemble de points communs avec cette dernière, puis intégrer ce polynôme et dire que $I \approx I_n = \int_a^b P_n(x)dx$. Les méthodes basées sur ce principe sont dites *méthodes de Newton-Cotes*.

Trois méthodes seront décrites dans ce chapitre : rectangles, trapèzes et Simpson. Pour chacune de ces méthodes deux versions ou formules seront proposées : simple et composite.

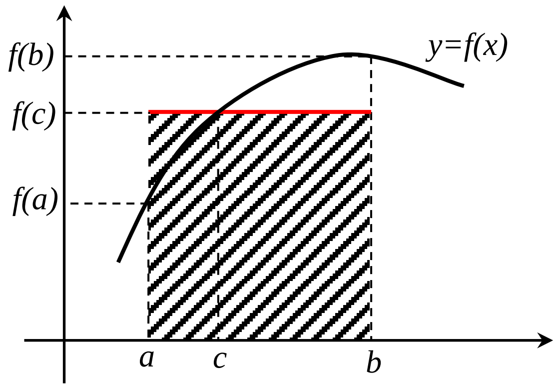
2. METHODE DES RECTANGLES

2.1. FORMULE SIMPLE

Elle consiste à remplacer f sur l'intervalle $[a, b]$ par une constante (polynôme de degré 0) correspondant à sa valeur en un point donné de cet intervalle $f(c)$ tel que $c \in [a, b]$.

La valeur approchée de l'intégrale, notée I_0, correspond dans ce cas à la surface d'un rectangle de largeur $(b - a)$ et de hauteur $f(c)$.

$I \approx I_0 = (b - a)f(c)$



On note les cas particuliers suivants :

$c = a \Rightarrow \boldsymbol{I_0 = (b - a)f(a)}$ Formule des ***rectangles simple point-gauche***.

$c = b \Rightarrow \boldsymbol{I_0 = (b - a)f(b)}$ Formule des ***rectangles simple point-droit***.

$c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \boldsymbol{I_0 = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ Formule des ***rectangles simple point-milieu***.

2.2. FORMULE COMPOSITE

Elle consiste à décomposer l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$, puis appliquer la méthode des rectangles simple sur chaque sous-intervalle. La valeur approchée de l'intégrale, notée dans ce cas I_R, correspond à la somme des surfaces des rectangles hachurés.

En adoptant les notations suivantes :

$x_0 = a$

$x_1 = x_0 + h = a + h$

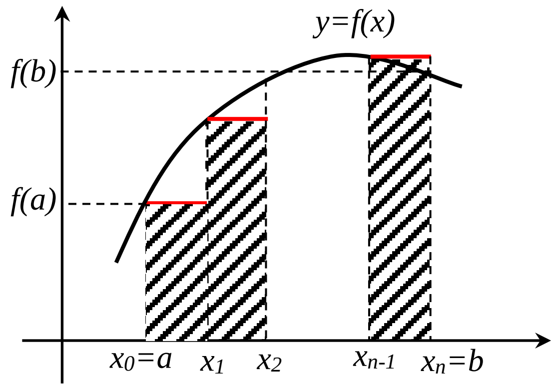
$x_2 = x_1 + h = a + 2h$

…

$x_i = x_{i-1} + h = a + ih$

…

$x_n = b = a + nh$



Et en appliquant la formule simple des rectangles point-gauche pour chaque sous-intervalle, on aura :

$$I \approx I_R = \sum surfaces\ des\ recatngles$$

$$= h.f(x_0) + h.f(x_1) + \cdots + h.f(x_{n-1})$$

D'où on obtient la formule des ***rectangles composite*** :

$$\boldsymbol{I_R = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad avec\ h = \frac{b-a}{n} \quad et\ \ x_i = a + ih}$$

2.3. MAJORATION DE L'ERREUR

Les relations suivantes donnent une estimation de l'erreur absolue entre la valeur exacte et la valeur approchée de l'intégrale pour chacune des méthodes simple et composite

$$\begin{cases} |\boldsymbol{I - I_o}| \leq \dfrac{(\boldsymbol{b-a})^2}{\boldsymbol{2}} . \max\limits_{[\boldsymbol{a,b}]} |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \\ |\boldsymbol{I - I_R}| \leq \dfrac{(\boldsymbol{b-a})^2}{\boldsymbol{2n}} . \max\limits_{[\boldsymbol{a,b}]} |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \end{cases}$$

2.4. EXEMPLE

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Pour cet exemple nous avons : $a = 1$; $b = 2$; $f(x) = \frac{1}{x}$.

Valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = [ln(x)]_1^2 = ln(2) \approx 0.6931$$

Valeur approchée de l'intégrale

1. ***Méthode des rectangles simple point-gauche***

$I_0 = (b-a)f(a) = (2-1)f(1) = 1 \times 1 = 1$

Erreur absolue : $E_a = |I - I_0| = 0.3069$

Erreur relative : $E_r = \frac{E_a}{|I|} \approx 0.4428 = 44.28\ \%$

2. ***Méthode des rectangles simple point-milieu***

$$I_0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (2-1)f(1.5) = 1 \times \frac{1}{1.5} \approx 0.6667$$

$E_a = 0.0264$

$E_r \approx 3.81\ \%$

3. ***Méthode des rectangles composite avec 4 intervalles***

$$I_R = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Pour $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_0 = 1$; $x_1 = 1.25$; $x_2 = 1.5$; $x_3 = 1.75$

$$I_R = h\sum_{i=0}^{3} f(x_i) = h\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) = 0.25\left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75}\right) \approx 0.7595$$

$E_a = |I - I_R| = 0.1785$

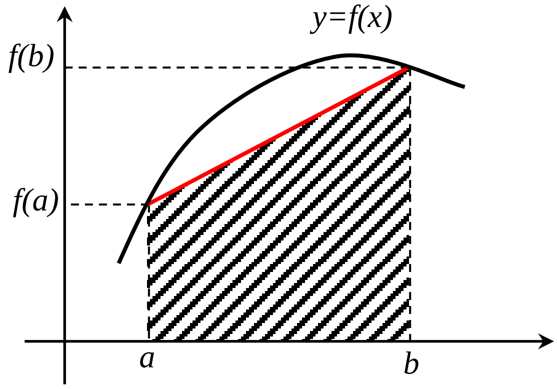
$$E_r = \frac{E_a}{|I|} \approx 0.0827 = 8.27\ \%$$

3. METHODE DES TRAPEZES

3.1. FORMULE SIMPLE

Elle consiste à remplacer f sur l'intervalle $[a, b]$ par une droite (polynôme de degré 1) passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$ puis calculer l'intégrale.

La valeur approchée de l'intégrale, notée I_1, correspond dans ce cas à la surface d'un trapèze ayant pour bases $f(a)$ et $f(b)$ et pour hauteur $(b-a)$.



$$I \approx \boldsymbol{I_1} = \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})}{\mathbf{2}}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\big)$$

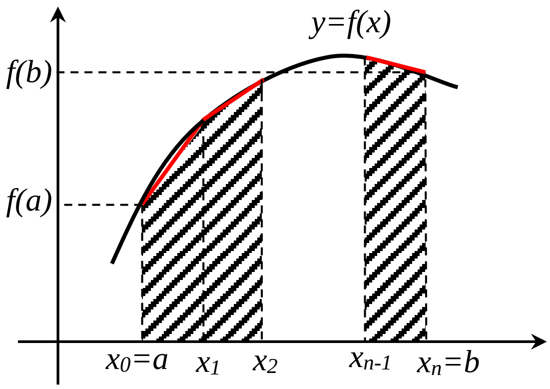
3.2. FORMULE COMPOSITE

Elle consiste à décomposer l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$, puis appliquer la méthode des trapèzes simple sur chaque sous-intervalle. La valeur approchée de l'intégrale, notée dans ce cas I_T, correspond à la somme des surfaces des trapèzes hachurés.

Soit S_i la surface d'un trapèze sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

$$= \frac{h}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$



On aura donc :

$$I \approx I_T = \sum surfaces\ des\ trapèzes$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} S_i$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

Après développement et simplification, nous obtenons la formule des ***trapèzes composite*** :

$$\boldsymbol{I_T = h\left[\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right] \quad avec\ h = \frac{b-a}{n} \quad et\ \ x_i = a + ih}$$

3.3. MAJORATION DE L'ERREUR

On montre que

$$\begin{cases} |\boldsymbol{I - I_1}| \leq \frac{(\boldsymbol{b-a})^3}{\boldsymbol{12}} . \max\limits_{[\boldsymbol{a,b}]}|\boldsymbol{f''}(\boldsymbol{x})| \\ |\boldsymbol{I - I_T}| \leq \frac{(\boldsymbol{b-a})^3}{\boldsymbol{12n^2}} . \max\limits_{[\boldsymbol{a,b}]}|\boldsymbol{f''}(\boldsymbol{x})| \end{cases}$$

3.4. EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Rappelons que : $a = 1$; $b = 2$; $f(x) = \frac{1}{x}$.

Valeur approchée de l'intégrale

1. ***Méthode des trapèzes simple***

$$I_1 = \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = \frac{2-1}{2}\big(f(1) + f(2)\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$

$E_a = 0.0569$; $E_r \approx 8.21$ %

2. ***Méthode des trapèzes composite avec 8 intervalles***

$$I_T = h\left(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Pour $n = 8$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$

$x_0 = 1; x_1 = 1.125;\ x_2 = 1.25;\ x_3 = 1.375; x_4 = 1.5; x_5 = 1.625;\ x_6 = 1.75;\ x_7 = 1.875$

$$I_T = h\left(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{7} f(x_i)\right)$$

$$I_T = 0.125\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(1 + \frac{1}{1.125} + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.375} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.625} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{1.875}\right)\right) \approx 0.6941$$

$$E_a = |I - I_T| = 0.0010$$

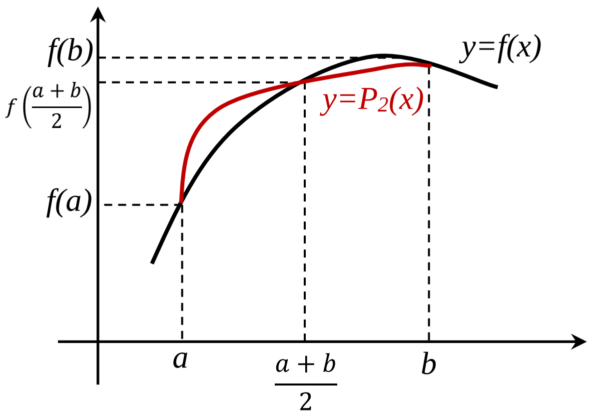
$$E_r = \frac{E_a}{|I|} \approx 0.0014 = 0.14\ \%$$

4. METHODE DE SIMPSON

4.1. FORMULE SIMPLE

Elle consiste à remplacer f sur l'intervalle $[a, b]$ par son polynôme d'interpolation de degré 2, noté P_2, passant par les points $\left(a, f(a)\right)$; $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$; $\left(b, f(b)\right)$ puis intégrer ce polynôme.

Contrairement aux formules simples précédentes, où le calcul pouvait être effectué graphiquement car la valeur approchée de l'intégrale correspondait à la surface de formes géométriques connues entre autres rectangle et trapèze, pour la formule simple de Simpson nous somme contraint de faire le calcul analytiquement en 2 étapes :



Etape 1 : Détermination du polynôme P_2

Ceci peut être effectué soit en appliquant une méthode d'interpolation polynômiale (Newton ou Lagrange, voir le chapitre concernant l'interpolation), ou en appliquant une méthode directe qui conduit à la résolution d'un système d'équations linéaire pour déterminer les coefficients du polynôme.

Considérons le polynôme P_2de degré 2 suivant

$P_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$

P_2 passe par les points $(a, f(a))$; $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$; $(b, f(b))$ signifie que

$$\begin{cases} P_2(a) = f(a) \\ P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ P_2(b) = f(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_o} + \boldsymbol{a_1} a + \boldsymbol{a_2} a^2 = f(a) \\ \boldsymbol{a_o} + \boldsymbol{a_1}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \boldsymbol{a_2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \boldsymbol{a_o} + \boldsymbol{a_1} b + \boldsymbol{a_2} b^2 = f(b) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les coefficients $\boldsymbol{a_o}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ du polynôme P_2.

Etape 2 : Intégration du polynôme P_2

Intégrer le polynôme P_2 sur l'intervalle $[a, b]$ pour obtenir une valeur approchée de I.

$$I \approx I_2 = \int_a^b P_2(x)dx$$

Après calcul et simplification, nous obtenons la formule ***simple de Simpson*** :

$$\boldsymbol{I_2 = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

4.2. FORMULE COMPOSITE

En suivant le même principe des méthodes composites, on obtient la formule de ***Simpson composite***

$$\boldsymbol{I_S = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]}$$

$$\boldsymbol{avec\ h = \frac{b-a}{n} \quad et\ \ x_i = a + ih}$$

4.3. MAJORATION DE L'ERREUR

On montre que

$$\begin{cases} \boldsymbol{|I - I_2| \le \frac{(b-a)^5}{2880} . \max_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|} \\ \boldsymbol{|I - I_S| \le \frac{(b-a)^5}{180 n^4} . \max_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|} \end{cases}$$

Où $f^{(4)}$ est la dérivée d'ordre 4 de f.

4.4. EXEMPLE

Pour l'exemple précédent $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$

$a = 1$; $b = 2$; $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. ***Méthode de Simpson simple***

$$I_2 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1}{6}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36}$$

$$\approx 0.6944$$

$E_a = 0.0013$; $E_r \approx 0.19\ \%$

2. ***Méthode de Simpson composite avec 4 intervalles***

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

Pour $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_0 = 1$; $x_1 = 1.25$; $x_2 = 1.5$; $x_3 = 1.75$; $x_4 = 2$

$\frac{x_0 + x_1}{2} = 1.125$; $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1.375$; $\frac{x_2 + x_3}{2} = 1.625$; $\frac{x_3 + x_4}{2} = 1.875$

$$I_s = \frac{h}{6}\Bigg[f(b) - f(a) + 2\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)$$
$$+ 4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right)\Bigg]$$

$$I_s = \frac{0.25}{6}\left[\frac{1}{2} - 1 + 2\left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75}\right) + 4\left(\frac{1}{1.125} + \frac{1}{1.375} + \frac{1}{1.625} + \frac{1}{1.875}\right)\right] \approx 0.6932$$

$E_a = |I - I_T| = 0.0001$

$E_r = \frac{E_a}{|I|} \approx 0.0014 = 0.01\ \%$