CHAPITRE 3 - RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. INTRODUCTION

Une équation différentielle est une équation établissant une relation entre une variable indépendante, qu'on notera t, une fonction inconnue de cette variable qu'on notera $y(t)$ ainsi que les dérivées jusqu'à l'ordre n de cette dernière $y', y'', \dots\dots, y^{(n)}$. n est dit *ordre* ou *degrés* de l'équation différentielle. Si y est fonction uniquement d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite *ordinaire*.

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à trouver toute les fonctions $y(t)$ vérifiant cette équation. En réalité, très peut d'équations différentielles sont solubles analytiquement de même que chaque type d'équation nécessite une méthode particulière de résolution. Le recours aux méthodes numériques pour résoudre la plupart des équations différentielles devient indispensable.

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques méthodes numériques pour la résolution d'un problème de Cauchy dans lequel on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 1 avec condition initiale dont la forme générale est

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ \quad y(t_o) = y_o \end{cases}$$

Où t est la variable indépendante,

y est la fonction inconnue à déterminer (appelée aussi variable dépendante),

f est une fonction à 2 variables vérifiant certaines conditions pour assurer l'existence d'une solution,

$y(t_o) = y_o$ représente la condition initiale.

Alors que les méthodes analytiques pour résoudre l'équation précédente, si ces méthodes existent, permettent d'obtenir l'expression analytique de $y(t)$, et donc la valeur exacte de $y(t)$ à tout instant t, les méthodes numériques ne permettent d'obtenir que des *valeurs approchées* de $y(t)$, qu'on notera $y_i \;\; i = \overline{1, n}$, pour *certaines valeurs* de t, notées $t_i \;\; i = \overline{1, n}$, avec $t_i > t_o$. On général, les instants t_i sont choisis tel que $t_{i+1} - t_i = h$ constant, h est appelée le pas de temps ou le pas d'intégration.

EXEMPLE

Cherchons la solution analytique de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Séparons les variables de cette équation

$$yy' = t \Leftrightarrow y\frac{dy}{dt} = t \Leftrightarrow ydy = tdt$$

Intégrons les deux membres de cette égalité

$$\int ydy = \int tdt \Leftrightarrow \frac{y^2(t)}{2} = \frac{t^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y^2(t) = t^2 + C$$

Où C_1 et C sont des constantes avec $C = 2C_1$.

On aura donc

$$y(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$$

Cette dernière expression est dite *solution générale* de l'équation différentielle.

Déterminons à présent une *solution particulière* vérifiant la condition initiale

$$y(0) = \sqrt{C} = 1 \Rightarrow C = 1$$

D'où

$$y(t) = \sqrt{t^2 + 1}$$

2. METHODE D'EULER

2.1. PRINCIPE DE LA METHODE

Considérons l'équation différentielle précédente

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer des valeurs approchées de $y(t)$ aux instants t_i avec $t_i = t_o + i.h$.

Notons $y(t_i)$ la valeur exacte de $y(t)$ à $t = t_i$ et y_i la valeur approchée de $y(t)$ au même instant.

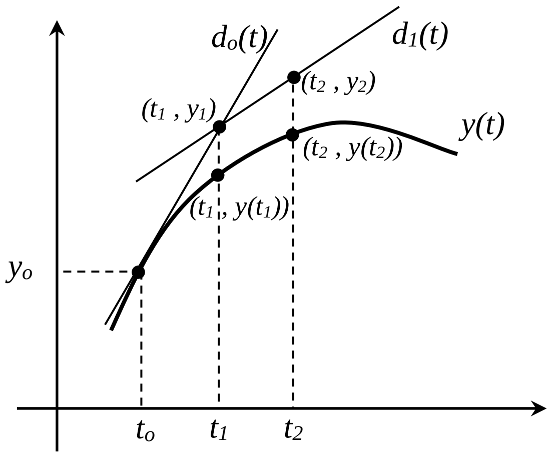
Le principe de la méthode d'Euler consiste d'abord à tracer la droite $d_o(t)$ tangente à la courbe de $y(t)$ au point (t_o, y_o).

Cette droite a une pente de $y'(t_o) = f\big(t_o, y(t_o)\big) = f(t_o, y_o)$ et aura pour équation

$$\frac{d_o(t) - y_o}{t - t_o} = f(t_o, y_o) \Leftrightarrow d_o(t) = y_o + (t - t_o)f(t_o, y_o)$$

En prenant un pas h suffisamment petit, on peut considérer que $d_o(t_1) = y_1$ est une valeur approchée acceptable de $y(t_1)$

$$y_1 = y_o + (t_1 - t_o)f(t_o, y_o) = y_o + hf(t_o, y_o)$$



De la même façon, en traçons la droite $d_1(t)$ passant par le point (t_1, y_1) et de pente $y'(t_1) = f\big(t_1, y(t_1)\big) \approx f(t_1, y_1)$, on peut avoir une approximation de $y(t_2)$ qui est $d_1(t_2) = y_2$qui aura pour valeur

$y_2 = y_1 + (t_2 - t_1)f(t_1, y_1) = y_1 + hf(t_1, y_1)$

On peut ainsi déduire la formule récurrente de l'algorithme d'Euler.

2.2. ALGORITHME DE LA METHODE

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)} \\ \boldsymbol{t_{i+1} = t_i + h} \end{cases}$$

$\boldsymbol{avec\ \ t_o, y_o\ et\ h\ \ donn}$**és**

2.3. INTERPRETATION SIMPLE DE L'ALGORITHME

L'algorithme d'Euler pouvait être obtenu autrement d'une façon plus simple. En effet, considérons l'équation différentielle précédente

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big) \Leftrightarrow dy(t) = f\big(t, y(t)\big)dt$$

Intégrons cette équation sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dy(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \Leftrightarrow y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

Appliquons maintenant la méthode des rectangles simple point-gauche pour évaluer l'intégrale du second membre. Dans la mesure où cette évaluation n'est qu'une approximation de l'intégrale, $y(t_{i+1})\ et\ y(t_i)$ seront remplacés par leurs valeurs approchées $y_{i+1}\ et\ y_i$. On aura donc

$$y_{i+1} - y_i = (t_{i+1} - t_i)f(t_i, y_i) = hf(t_i, y_i) \Leftrightarrow \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)}$$

EXEMPLE

Faire 3 itérations de la méthode d'Euler pour résoudre numériquement l'équation différentielle de l'exemple précédent. Prendre $h = 0.1$ puis $h = 0.05$.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il faudra calculer les 3 premiers termes de la suite

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\dfrac{t_i}{y_i} \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\ , y_o = 1\ , h = 0.1$

<u>1ère itération</u>

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h\dfrac{t_o}{y_o} = 1 + 0.1 \times \dfrac{0}{1} = 1 \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases}$$

<u>2ème itération</u>

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + h\dfrac{t_1}{y_1} = 1 + 0.1 \times \dfrac{0.1}{1} = 1.01 \\ t_2 = t_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \end{cases}$$

<u>3ème itération</u>

$$\begin{cases} y_3 = y_2 + h\dfrac{t_2}{y_2} = 1.01 + 0.1 \times \dfrac{0.2}{1.01} = 1.0298 \\ t_3 = t_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3 \end{cases}$$

Le tableau ci-dessous regroupe les résultats obtenus ainsi que les erreurs par rapport aux valeurs exactes.

i	t_i	y_i	$y(t_i)$	$E_a = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$
1	**0.1**	**1**	**1.005**	**0.005**
2	0.2	1.01	1.0198	0.0098
3	0.3	1.0298	1.0440	0.0142

De la même façon, et pour $h = 0.05$, les résultats sont résumés dans le tableau suivant

i	t_i	y_i	$y(t_i)$	$E_a = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$
1	0.05	1	1.0013	0.0013
2	**0.1**	**1.0025**	**1.005**	**0.0025**
3	0.15	1.0075	1.0112	0.0037

REMARQUES

Deux remarques sont constatées à partir des résultats obtenus dans l'exemple précédent :

1- L'erreur augmente avec les itérations : en effet, l'erreur commise sur le calcul d'une itération se répercute directement sur le calcul de l'itération suivante.

2- L'erreur diminue lorsque le pas d'intégration diminue : ceci est remarquable en comparant la valeur approchée de $y(0.1)$ obtenue pour $h = 0.1$ ($E_a = 0.005$) et celle obtenue pour $h = 0.05$ ($E_a = 0.0025$). Ce résultat peut être expliqué en partant de l'interprétation graphique de la méthode d'Euler. En effet on constate que plus le pas h est petit, plus le point de la tangente est proche du point de la courbe, et l'approximation de la valeur de la fonction sera alors meilleure.

3. METHODE DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 2 (RK2)

3.1. PRINCIPE DE LA METHODE

L'objectif ici est de montrer, d'une façon simple, comment l'algorithme de cette méthode peut être obtenu.

Considérons l'équation différentielle précédente

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big) \Leftrightarrow dy(t) = f\big(t, y(t)\big)dt$$

Intégrons cette équation sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dy(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \Leftrightarrow y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

Appliquons maintenant la méthode des trapèzes simple pour évaluer l'intégrale du second membre. Dans la mesure où cette évaluation n'est qu'une approximation de l'intégrale, $y(t_{i+1})\ et\ y(t_i)$ seront remplacés par leurs valeurs approchées $y_{i+1}\ et\ y_i$.

Par rapport à la méthode d'Euler, où l'intégrale du second membre était approchée par la méthode des rectangles simple, il faut s'attendre que la méthode RK2 donne de meilleurs résultats car c'est la méthode des trapèzes, meilleur que celle des rectangles, qui est employée ici.

On aura donc

$$y_{i+1} - y_i = \frac{(\boldsymbol{t_{i+1}} - \boldsymbol{t_i})}{2}\big(f(t_i, y_i) + f(\boldsymbol{t_{i+1}}, \boldsymbol{y_{i+1}})\big)$$

Dans le second membre de cette équation remplaçons

$(t_{i+1} - t_i)$ par h,

t_{i+1} par $t_i + h$,

y_{i+1} par $y_i + hf(t_i, y_i)$ (son approximation par la méthode d'Euler).

L'équation précédente devient

$$y_{i+1} - y_i = \frac{1}{2}\Big(hf(t_i, y_i) + hf\big(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)\big)\Big)$$

En posant maintenant

$$K_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$K_2 = hf\big(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)\big) = hf(t_i + h, y_i + K_1)$$

On aura

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

Avec $K_1\ et\ K_2$ définis précédemment.

3.2. ALGORITHME DE LA METHODE

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_1 = hf(t_i, y_i)} \\ \boldsymbol{K_2 = hf(t_i + h, y_i + K_1)} \\ \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)} \\ \boldsymbol{t_{i+1} = t_i + h} \end{cases}$$

$\boldsymbol{avec\ \ t_o, y_o\ et\ h\ \ donn}$*é*$\boldsymbol{s}$

EXEMPLE

Faisons 3 itérations de la méthode de RK2 pour résoudre numériquement l'équation différentielle précédente en prenant $h = 0.1$.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>1</u>

1ère itération

$$K_1 = h\frac{t_o}{y_o} = 0.1 \times \frac{0}{1} = 0$$

$$K_2 = h\frac{t_o + h}{y_o + K_1} = 0.1 \times \frac{0 + 0.1}{1 + 0} = 0.01$$

$$y_1 = y_o + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{1}{2}(0 + 0.01) = 1.005$$

$$t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

2ème itération

$$K_1 = h\frac{t_1}{y_1} = 0.1 \times \frac{0.1}{1.005} = 0.009950$$

$$K_2 = h\frac{t_1 + h}{y_1 + K_1} = 0.1 \times \frac{0.1 + 0.1}{1.005 + 0.009950} = 0.019705$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1.005 + \frac{1}{2}(0.009950 + 0.019705) = 1.019828$$

$$t_2 = t_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

3ème itération

$$K_1 = h\frac{t_2}{y_2} = 0.1 \times \frac{0.2}{1.019828} = 0.019611$$

$$K_2 = h\frac{t_2 + h}{y_2 + K_1} = 0.1 \times \frac{0.2 + 0.1}{1.019828 + 0.019611} = 0.028862$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1.019828 + \frac{1}{2}(0.019611 + 0.028862) = 1.044065$$

$$t_3 = t_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

Le tableau ci-dessous regroupe les résultats obtenus ainsi que les erreurs par rapport aux valeurs exactes. Une comparaison avec la méthode d'Euler est effectuée.

i	t_i	y_i	$y(t_i)$	$E_a = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$	E_a (Euler)
1	0.1	1.005	1.004988	0.000012	0.004988
2	0.2	1.019828	1.019804	0.000024	0.009804
3	0.3	1.044065	1.044031	0.000034	0.014229

REMARQUE

On constate que, pour le même pas h, la méthode RK2 donne des résultats nettement meilleurs que la méthode d'Euler. Ce résultat était attendu comme nous l'avons cité précédemment.

4. METHODE DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4 (RK4)

Nous nous limiterons pour cette méthode de donner l'algorithme et un exemple simple.

4.1. ALGORITHME DE LA METHODE

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_1 = hf(t_i, y_i)} \\ \boldsymbol{K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)} \\ \boldsymbol{K_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)} \\ \boldsymbol{K_4 = hf(t_i + h, y_i + K_3)} \\ \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)} \\ \boldsymbol{t_{i+1} = t_i + h} \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{t_o, y_o}$ ***et*** $\boldsymbol{h}$ ***donnés***

EXEMPLE

Faisons une itération de la méthode de RK4 avec un pas $h = 0.1$ pour le même exemple précédent.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$K_1 = h\frac{t_o}{y_o} = 0.1 \times \frac{0}{1} = 0$$

$$K_2 = h\frac{t_o + h/2}{y_o + K_1/2} = 0.1 \times \frac{0 + 0.1/2}{1 + 0/2} = 0.005$$

$$K_3 = h\frac{t_o + h/2}{y_o + K_2/2} = 0.1 \times \frac{0 + 0.1/2}{1 + 0.005/2} = 0.004988$$

$$K_4 = h\frac{t_o + h}{y_o + K_3} = 0.1 \times \frac{0 + 0.1}{1 + 0.004988} = 0.009950$$

$$y_1 = y_o + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2 \times (0.005 + 0.004988) + 0.009950)$$

$$= 1.004988$$

$$t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

i	t_i	y_i	$y(t_i)$	$E_a = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$	E_a (RK2)
1	0.1	1.004988	1.004988	0.000000	0.000012

La méthode RK4 est plus précise par rapport à la méthode RK2.