# INTRODUCTION AUX METHODES NUMERIQUES

## 1. METHODES NUMERIQUES : OBJECTIFS ET INTERETS

L'analyse numérique est un domaine des mathématiques dont l'objectif est de définir et développer des méthodes utilisant le calcul numérique afin de résoudre des problèmes mathématiques qui n'ont pas de méthodes analytiques de résolution.

La plupart des méthodes numériques utilisent le calcul itératif pour fournir une solution approchée d'un problème mathématique, s'il y a solution. C'est pour cela que ce domaine s'intéresse aussi à l'étude de :

1- L'existence des solutions (conditions d'existence),
2- La stabilité ou la convergence des méthodes,
3- L'efficacité du point de vue temps de calcul,
4- L'estimation de l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte.

Les méthodes numériques occupent une place importante dans les différents domaines de physique, chimie et sciences techniques. En effet, les phénomènes et systèmes physiques mis en jeu sont intrinsèquement complexes, d'où la complexité de leurs modèles mathématiques de représentation, ce qui rend le recours aux méthodes numériques pour résoudre les problèmes liés est inévitable.

## 2. NOTIONS SUR L'ANALYSE DES ERREURS

Un résultat numérique approché n'a de valeur que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur par rapport au résultat exact. Dans ce paragraphe nous introduisons certaines notions relatives aux erreurs.

### ERREUR ABSOLUE ET ERREUR RELATIVE

Soit $\boldsymbol{x}$ un nombre (valeur exacte connue avec certitude)

et $\boldsymbol{x}^*$ une approximation de $\boldsymbol{x}$ (valeur approchée).

L'***erreur absolue***, notée $\Delta\boldsymbol{x}$, est définie par $\Delta\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*|$.

L'***erreur relative***, notée $\boldsymbol{Er}$, est définie par $\boldsymbol{Er} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ .

**Exemple 1**

Soit $x = 87$ nombre d'étudiants présents dans un amphi (valeur exacte obtenue par comptage) et $x^* = 80$ une approximation de *x* (valeur approchée obtenue par une vue d'ensemble).

$$\Delta x = |x - x^*| = |87 - 80| = 7$$

$$Er = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{7}{87} \approx 0.08$$

Quel pourcentage (%) représente l'erreur absolue $\Delta x$ par rapport à la valeur exacte *x* ?

$$\begin{matrix} |x| \to 100\ \% \\ \Delta x \to Erp \end{matrix} \Rightarrow Erp = \frac{\Delta x}{|x|}.100 = Er.100 = 8\ \%$$

$Erp$ est appelée ***erreur relative en pourcentage***.

**Remarques**

1- En pratique il est difficile dévaluer l'erreur absolue car on ne connait généralement pas la valeur exacte $\boldsymbol{x}$. On ne peut avoir qu'une borne supérieure de cette erreur qui dépend de la précision des instruments de mesure ou des méthodes numériques utilisés pour obtenir la valeur approchée $\boldsymbol{x^*}$. Cette borne supérieure est elle-même appelée erreur absolue et est notée $\boldsymbol{\Delta x}$. On notera dans ce cas :

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*| \le \Delta \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^* - \Delta \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x} ,$$

ou encore $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* \pm \Delta \boldsymbol{x}$.

2- L'erreur absolue est une mesure quantitative de l'erreur alors que l'erreur relative est une mesure qualitative de l'erreur.

**Exemple 2**

Une erreur absolue $\Delta x = 1\, mètre$ dans la mesure de la hauteur d'un sommet de $1000\, mètres$ est négligeable

$$Er = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{1}{1000} = 0.001 = 0.1\ \%$$

Par contre, la même erreur absolue est considérée comme très grande et non acceptable dans la mesure de la largeur d'une voie de l'autoroute de $8\, mètres$

$$Er = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\ \%$$

**Exemple 3**

Lorsqu'une règle de 30 cm graduée en millimètre (mm) est utilisée pour mesurer une longueur. On peut admettre qu'une borne supérieure de l'erreur absolue est de $\Delta x = 0.5\ mm$. Que peut-on dire si on utilise cette règle pour mesurer la longueur, largeur et épaisseur d'une feuille de format A4 ?

Longueur $L = 297 \pm 0.5\ mm$

Largeur $W = 210 \pm 0.5\ mm$

Epaisseur $T = 0.1 \pm 0.5\ mm$ ?? $Er = \frac{0.5}{0.1} = 5 = 500\ \%$

Il est clair que cette règle ne peut être utilisée pour mesurer l'épaisseur de la feuille.

## 3. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] RADI B. et EL HAMI A., ***Méthodes numériques pour l'ingénieur : Utilisation de l'outil MATLAB, cours, exercices et problèmes de synthèse corrigés***, Ellipses, 2010, 517.9/RAD.

[2] FELLAH M., ***Exercices corrigés en analyse numérique élémentaire***, OPU, 2005, 519.6/FEL.

[3] LAKRIB M., ***Cours d'analyse numérique***, OPU, 2008, 519.6/LAK.

[4] NOUGIER J.P., ***Méthodes de calcul numérique***, Masson, 1985.

[5] QUARTERONI A., SACCO R. et SALERI F., ***Méthodes numériques pour le calcul scientifique, Programmes en MATLAB***, Springer, 2006.

[6] MERRIE J.-L., ***Analyse numérique avec MATLAB***, Dunod, 2007.