SERIE DE TD Nº 1
(RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES)

EXERCICE 1

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 - 3x - 1$

1. Séparer les racines de cette équation.
2. Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $[1,2]$.
3. Donner une estimation de la racine après 4 itérations.
4. Déterminer le nombre d'itérations *n* à faire pour avoir $\Delta x \leq 10^{-5}$.

EXERCICE 2 (Mettre la calculatrice sur les RADIANS)

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = tg(x) - 3x + 1$

1. Ecrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$ avec $f_1(x) = tg(x)$.
2. Tracer les graphes de f_1 et f_2 sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Que peut-on dire concernant les racines de l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle ?
3. Approcher la racine se trouvant dans l'intervalle $[1,1.5]$ à 0.05 près par la méthode de dichotomie.
4. Donner une estimation de l'erreur après 18 itérations.

EXERCICE 3

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = \frac{1}{x} - 5$

1. Calculer la racine exacte de cette équation.
2. Donner la formule de Newton correspondante la plus simplifiée possible.
3. Faire 4 itérations de cette méthode en posant $x_0 = 0.1$. Calculer à chaque itération l'erreur absolue ainsi que $|x_k - x_{k-1}|$. Comparer et conclure (utiliser 4 chiffres après la virgule, arrondir le 4ème).

EXERCICE 4

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = e^x - x - 2$, à résoudre.

1. Montrer que cette équation possède deux racines.
2. Vérifier que la méthode de Newton est applicable sur l'intervalle $[1,2]$.
3. Approcher la racine à 10^{-3} près par la méthode de Newton en prenant $x_0 = 1$.

   Donner une estimation de la racine à la fin des itérations (utiliser 4 chiffres après la virgule).
4. a) Déterminer le nombre d'itérations *n* à faire par la méthode de Newton pour avoir $\Delta x \leq 10^{-8}$.

   b) Vérifier ce résultat par calcul direct en utilisant 10 chiffres après la virgule.

   c) Combien d'itérations il faudrait faire en utilisant la méthode de Dichotomie pour avoir la même précision ? Comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE 5

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = ln(x) - \frac{x^2}{2} + 1$

1- Séparer les racines de cette équation.

2- Faire 5 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $[1,2]$.

3- Donner une estimation de la racine.

EXERCICE 6

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = sin(x) - 2x + 1$

1- Ecrire cette équation sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$ avec $f_1(x) = sin(x)$.

2- Montrer graphiquement qu'elle admet une racine unique dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3- Approcher la racine à 10^{-1} près par la méthode de dichotomie à partir de cet intervalle.

4- Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de la racine à 10^{-4} près en utilisant la méthode de dichotomie.

EXERCICE 7

On considère l'équation suivante : $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

1- Montrer que cette équation possède une seule racine positive.

2- Vérifier que la méthode de Newton est applicable sur l'intervalle $\left[\frac{7}{4}, 2\right]$.

3- Faire 3 itérations de cette méthode en posant $x_0 = 2$. Donner une estimation de la racine. (Utiliser 4 chiffres après la virgule)

EXERCICE 8

Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie pour les fonctions suivantes et à partir des intervalles indiqués :

1- $f(x) = cos(x) + 2x$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

2- $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$ dans l'intervalle $[0,1]$

3- $f(x) = x^6 - x - 1$ dans l'intervalle $[1,1.5]$

EXERCICE 9

Approcher la racine à 10^{-3} prés en utilisant la méthode de Newton pour les fonctions l'exercice 8 et en prenant comme valeur initiale le milieu des intervalles indiqués.

EXERCICE 10

Evaluer la quantité : $s = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \cdots}}}$