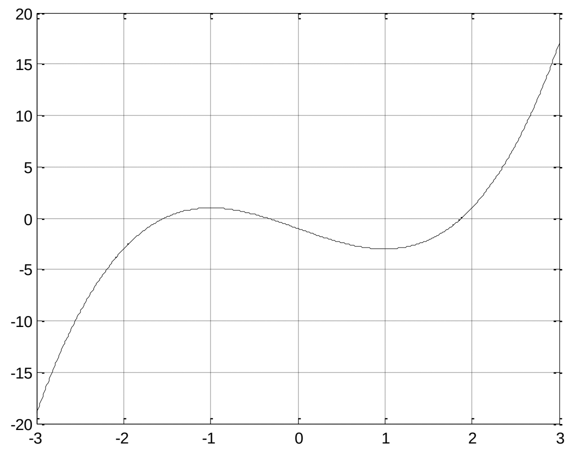
CORRIGE DE LA SERIE DE TD N[O] 1

EXERCICE 1

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 - 3x - 1$, à résoudre

1. Séparation des racines



$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = -3$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$

Le graphe de f possède 3 points d'intersection avec l'axe x, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 3 racines $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [-1,0]$, $\alpha_3 \in [1,2]$

2. 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [1,2]

I	a	b	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	Δx
1	1	2	1.5	- 3	1	- 2.125	0.5
2	1.5	2	1.75	- 2.125	1	- 0.891	0.25
3	1.75	2	1.875	- 0.891	1	- 0.033	0.125
4	1.875	2	1.9375	- 0.033	1	0.461	0.0625

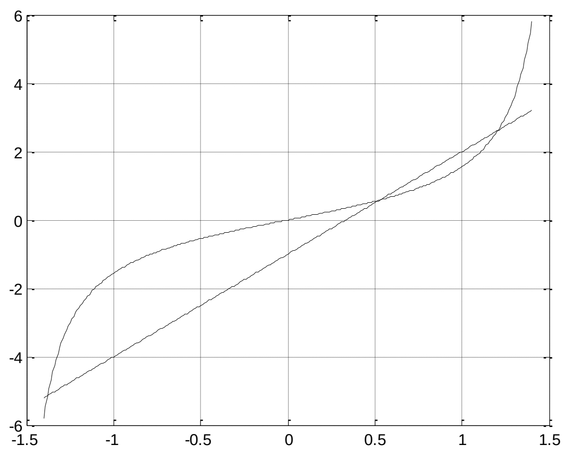
3. Estimation de la racine après 4 itérations

$\alpha = 1.9375 \pm 0.0625$

4. Nombre d'itérations pour avoir $\Delta x \leq 10^{-5}$

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)} = \frac{ln\left(\frac{1}{10^{-5}}\right)}{ln(2)} = 5\frac{ln(10)}{ln(2)} \approx 16.61 \Rightarrow \boldsymbol{n = 17}$$

EXERCICE 2



$f(x) = tg(x) - 3x + 1$

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow tg(x) - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow tg(x) = 3x - 1$

$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$

Avec $f_1(x) = tg(x)$ et $f_2(x) = 3x - 1$

2. Les graphes de f_1 et f_2 possèdent 3 points d'intersection sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Donc, l'équation $f(x) = 0$ possède 3 racines sur cet intervalle : $\alpha_1 \in \left]-\frac{\pi}{2},-1\right]$, $\alpha_2 \in [0,1]$, $\alpha_3 \in \left]1,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. <u>Application de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [1,1.5] jusqu'à avoir $\Delta x \leq \mathbf{0.05}$</u>

N° itr.	*A*	*b*	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	Δx
1	1	1.5	1.25	- 0.4426	10.6014	0.2596	0.25
2	1	1.25	1.125	- 0.4426	0.2596	- 0.2824	0.125
3	1.125	1.25	1.1875	- 0.2824	0.2596	- 0.0826	0.0625
4	1.1875	1.25	1.21875	- 0.0826	0.2569	0.0660	**0.03125** $\leq \mathbf{0.05}$

4. <u>Estimation de l'erreur après 18 itérations</u>

$$\Delta x \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \Delta x \leq \frac{1.5-1}{2^{18}} \Rightarrow \Delta x \leq 1.91 \times 10^{-6}$$

<u>EXERCICE 3</u>

$$f(x) = \frac{1}{x} - 5$$

1. <u>Racine exacte α de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$</u>

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{5} = 0.2}$$

2. <u>Formule de Newton correspondante</u>

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - 5}{\left(\frac{-1}{x_k^2}\right)} = 2x_k - 5x_k^2 = x_k(2 - 5x_k)$$

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k(2 - 5x_k)}$$

3. <u>4 itérations de cette méthode en posant $\boldsymbol{x_0 = 0.1}$</u>

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{\Delta x = \lvert\alpha - x_k\rvert}$	$\boldsymbol{\lvert x_k - x_{k-1}\rvert}$
1	0.1500	0.0500	0.0500
2	0.1875	0.0125	0.0375
3	0.1992	0.0008	0.0117
4	0.2000	0.0000	0.0008

À chaque itération on constate que $\Delta x = |\alpha - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}|$

On conclu que, dans l'algorithme de Newton, pour garantir que $\Delta x \leq \varepsilon$, qui ne peut pas être vérifié généralement car α n'est pas connue, il suffit de vérifier que $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$.

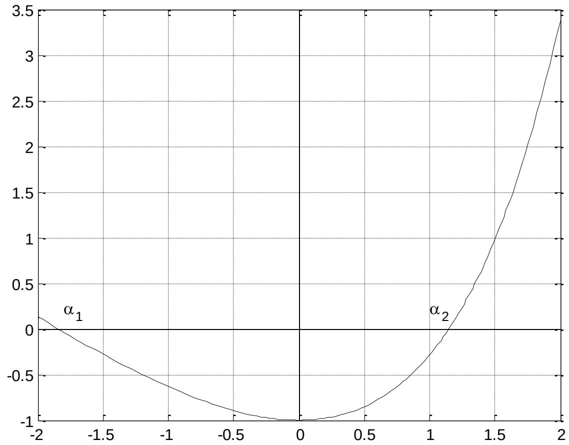
EXERCICE 4

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^x - x - 2$

1. *Séparation des racines*

$f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1 ↗ $+\infty$



$f(-1) \approx -0.63$, $f(-2) \approx 0.14$,

$f(1) \approx -0.28$, $f(2) \approx 3.39$

Le graphe de f possède 2 points d'intersection avec l'axe x, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$

2. *Vérification de l'applicabilité de la méthode de Newton sur l'intervalle* $[1,2]$

N1 : f est continue sur l'intervalle [1,2]

N2 : $f(1) \times f(2) = (-0.28)(3.39) < 0$

N3 : f est strictement croissante sur l'intervalle [1,2]

N4 : f est dérivable sur l'intervalle [1,2] et $f'(x) = e^x - 1 \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$

$(f'(x) = 0 \; pour \; x = 0 \notin [1,2])$

N5 : f est deux fois dérivable sur l'intervalle [1,2] et $f''(x) = e^x$

N1, N2, N3, N4 et N5 impliquent que la méthode de Newton est applicable sur l'intervalle [1,2].

3. *Approche de la racine à 10^{-3} près par la méthode de Newton avec* $x_0 = 1$

Algorithme de Newton $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1.1640 \qquad |x_1 - x_0| = |1.1640 - 1| = 0.1640$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1640 - \frac{f(1.1640)}{f'(1.1640)} = 1.1464 \qquad |x_2 - x_1| = |1.1464 - 1.1640| = 0.0176$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.1464 - \frac{f(1.1464)}{f'(1.1464)} = 1.1462 \quad |x_3 - x_2| = |1.1462 - 1.1464| = 0.0002 \leq 10^{-3}$$

Estimation de la racine $\alpha = 1.1462 \pm 0.0002$

***4. a) Nombre d'itérations n à faire par la méthode de Newton pour avoir* $\Delta x \leq 10^{-8}$**

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{ln(c\varepsilon)}{ln(c(b-a))}\right)}{ln(2)} \quad avec \;\; c = \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$$

Détermination de *c* :

$f(x) = e^x - x - 2$

$f'(x) = e^x - 1$

$f''(x) = e^x$

On pose

$$g(x) = \frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{e^x}{2(e^x - 1)} = \frac{1}{2(1 - e^{-x})}$$

On peut vérifier que

$$c = \max_{x\in[1,2]} |g(x)| = g(1) = \frac{1}{2(1 - e^{-1})} \approx 0.7910$$

Donc

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{ln(0.7910 \times 10^{-8})}{ln(0.7910(2-1))}\right)}{ln(2)} \approx 4.74 \Rightarrow \boldsymbol{n = 5}$$

b) <u>Vérification du résultat par calcul direct en utilisant 10 chiffres après la virgule</u>

$x_0 = 1$

$x_1 = \underline{\mathbf{1.1}}639534137$

$x_2 = \underline{\mathbf{1.146}}4211850$

$x_3 = \underline{\mathbf{1.1461932}}587$

$x_4 = \underline{\mathbf{1.1461932206}}$

$x_5 = \underline{\mathbf{1.1461932206}}$

On remarque qu'*en moins* 8 chiffres après la virgule, dans l'approximation de la racine, se sont fixés à partir de la 5ème itération.

c) <u>Nombre d'itérations par la méthode de Dichotomie pour avoir la même précision</u>

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)} = \frac{ln\left(\frac{1}{10^{-8}}\right)}{ln(2)} = 8\,\frac{ln(10)}{ln(2)} \approx 26.58 \Rightarrow \boldsymbol{n = 27}$$

<u>Comparaison des deux méthodes</u>

Pour atteindre une précision de 10^{-8} il faudrait faire 27 itérations de la méthode de dichotomie alors que la méthode de Newton ne nécessite que 5 itérations. On conclut que la méthode de Newton converge beaucoup plus rapidement (ordre de convergence quadratique) que la méthode de dichotomie (ordre de convergence linéaire).