SERIE DE TD N^{O} 2
(INTEGRATION NUMERIQUE)

N.B. ***Utiliser 4 chiffres après la virgule, arrondir le 4ème, pour toute la série.***

EXERCICE 1

En comparant avec la valeur exacte, évaluer numériquement l'intégrale $I = \int_2^4 ln(x)dx$ en utilisant la méthode des rectangles composite avec 4 puis 8 intervalles.

EXERCICE 2

En comparant avec la valeur exacte, évaluer numériquement l'intégrale $I = \int_0^1 e^x dx$ en utilisant :

1. La méthode des trapèzes simple et composite avec 5 intervalles.
2. La méthode de Simpson simple et composite avec 4 intervalles.

EXERCICE 3

Soit la fonction f donnée par le tableau suivant

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0.5	0.2	0.1	0.0588

1. Calculer une valeur approchée de $\int_0^4 f(x)dx$ en utilisant les méthodes des trapèzes et Simpson composites (prendre le nombre maximum d'intervalles possible).
2. Comparer avec la valeur exacte de l'intégrale en sachant que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

EXERCICE 4 (Mettre la calculatrice sur les RADIANS)

En évaluant numériquement l'intégrale $I = \int_0^1 \left(cos(x)\right)^2 dx$, comparer entre la méthode des trapèzes composite 4 intervalles et la méthode de Simpson composite 2 intervalles.

Indication : $\left(cos(x)\right)^2 = \frac{1+cos(2x)}{2}$

EXERCICE 5

1. Evaluer par la méthode des rectangles composite avec 8 intervalles l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$.
2. Donner une borne supérieure de l'erreur absolue $E_a = |I - I_R|$.
3. Pour quelle valeur de *n* (nombre d'intervalles) l'erreur absolue $E_a \leq 0.1$? Calculer I_R dans ce cas.
   Estimer la valeur exacte de l'intégrale ainsi que l'erreur relative.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE 6

On considère l'intégrale $I = \int_0^2 f(x)dx$.

Déterminer $f(1)$ en sachant que la valeur approchée de I par la méthode des trapèzes simple est $I_1 = 4$, et par la méthode de Simpson simple est $I_2 = 2$.

EXERCICE 7

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. On suppose que $f(0.25) = f(0.75) = \alpha$.

Déterminer α sachant que la valeur approchée de I par la méthode des trapèzes composite 2 intervalles est $I_{T2} = 2$ et 4 intervalles est $I_{T4} = 1.75$.

EXERCICE 8

1. Evaluer numériquement l'intégrale $I = \int_1^{1.5} x^2 ln(x)dx$ par la méthode des trapèzes simple.
2. Donner une borne supérieure de l'erreur absolue.
3. Déterminer le nombre d'intervalles n qu'il faut utiliser dans la méthode des trapèzes composite pour avoir une erreur absolue $E_a = |I - I_T| \leq 10^{-3}$. Calculer I_T dans ce cas.

EXERCICE 9

On considère l'intégrale suivante $I = \int_0^3 \frac{1}{1+x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I.
2. Calculer une valeur approchée de I en utilisant les méthodes suivantes :
   a) Rectangles composite 5 intervalles.
   b) Trapèzes composite 4 intervalles.
   c) Simpson composite 3 intervalles.
3. Calculer les erreurs absolue et relative pour chaque méthode.

EXERCICE 10

On considère l'intégrale suivante $I = \int_1^4 xln(x)dx$.

1. Calculer la valeur exacte de cette intégrale.
2. Evaluer numériquement cette intégrale en utilisant :
   a) La méthode des trapèzes composite avec 5 intervalles.
   b) La méthode de Simpson composite avec 3 intervalles.
3. On veut évaluer cette intégrale par la méthode des rectangles composite à n intervalles.
   a) Pour $n = 4$, et sans calculer I_R, évaluer la borne supérieure de l'erreur absolue.
   b) Calculer I_R dans ce cas ainsi que l'erreur absolue. Comparer avec la question 3.a et conclure.
   c) Pour quelle valeur de n l'erreur relative est inférieure à 10%.