CORRIGE DE LA SERIE DE TD N^{O} 2

EXERCICE 1

Valeur exacte de l'intégrale (intégration par partie)

$$I = \int_2^4 ln(x)dx = [xln(x) - x]_2^4 = 6ln(2) - 2 \approx 2.1589$$

Valeur approchée de l'intégrale en utilisant la méthode des rectangles composite

$$I_R = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

- ***Pour*** $\boldsymbol{n = 4}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$

$x_0 = 2$; $x_1 = 2.5$; $x_2 = 3$; $x_3 = 3.5$

$I_R = h\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) = 0.5\big(ln(2) + ln(2.5) + ln(3) + ln(3.5)\big) \approx 1.9804$
$E_a = 0.1785$; $E_r \approx 8.27$ %

- ***Pour*** $\boldsymbol{n = 8}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = 0.25$

$x_0 = 2$; $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.5$; $x_3 = 2.75$; $x_4 = 3$; $x_5 = 3.25$; $x_6 = 3.5$; $x_7 = 3.75$

$I_R = 0.25\sum_{i=0}^{7} ln(x_i) \approx 2.0709$; $E_a = 0.088$; $E_r \approx 4.08$ %

EXERCICE 2

Valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e - 1 \approx 1.7183$

Valeur approchée de l'intégrale

1. *Méthode des trapèzes simple*

$$I_1 = \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big) \quad avec\ \ a = 0\,;\ b = 1\,;\ f(x) = e^x$$

$$I_1 = \frac{(1-0)}{2}\big(f(0) + f(1)\big) = \frac{1}{2}(1 + e) \approx 1.8591$$

$E_a = 0.1408$; $E_r \approx 8.19$ %

Méthode des trapèzes composite 5 intervalles

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Pour $n = 5$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.4$; $x_3 = 0.6$; $x_4 = 0.8$

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big)\right)$$

$$I_T = 0.2\left(\frac{1}{2}(e-1) + (1 + e^{0.2} + e^{0.4} + e^{0.6} + e^{0.8})\right) \approx 1.7240$$

$E_a = 0.0057$; $E_r \approx 0.33$ %

2. ***Méthode de Simpson simple***

$$I_2 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1-0}{6}\big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\big) = \frac{1}{6}(1 + 4e^{0.5} + e)$$
$$\approx 1.7189$$

$E_a = 0.0006$; $E_r \approx 0.03\ \%$

Méthode de Simpson composite

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

Pour $\boldsymbol{n = 4}$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.25$; $x_2 = 0.5$; $x_3 = 0.75$; $x_4 = 1$

$\frac{x_0 + x_1}{2} = 0.125$; $\frac{x_1 + x_2}{2} = 0.375$; $\frac{x_2 + x_3}{2} = 0.625$; $\frac{x_3 + x_4}{2} = 0.875$

$$I_s = \frac{h}{6}\Bigg[f(b) - f(a) + 2\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + 4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right)\Bigg]$$

$$I_s = \frac{0.25}{6}[e - 1 + 2(1 + e^{0.25} + e^{0.5} + e^{0.75}) + 4(e^{0.125} + e^{0.375} + e^{0.625} + e^{0.875})] \approx 1.7183$$

EXERCICE 3

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0.5	0.2	0.1	0.0588

1. ***Valeur approchée de*** $\int_0^4 f(x)dx$ ***par les méthodes composites***

Pour obtenir la valeur approchée la plus précise en utilisant les méthodes composites, on doit choisir le nombre maximum de sous-intervalles possible.

Méthode des trapèzes composite, on doit choisir $n = 4$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)\right)$$

$$I_T = \frac{0.0588 - 1}{2} + (1 + 0.5 + 0.2 + 0.1) \approx 1.3294$$

Méthode de Simpson composite, on ne peut pas choisir plus que 2 intervalles, qui sont [0,2] et [2,4].
En effet, pour pouvoir appliquer cette méthode on aura besoin des valeurs de f au milieu de ces intervalles, c'est-à-dire en 1 et 3, qui sont disponibles dans le tableau. Ceci ne serait pas possible si on avait choisi n = 4.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{2} = 2$$

$$x_0 = 0\ ;\ x_1 = 2\ ;\ x_2 = 4\ ;\ \frac{x_0 + x_1}{2} = 1\ ;\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 3\ ;$$

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + 4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)\right]$$

$$I_s = \frac{2}{6}[0.0588 - 1 + 2(1 + 0.2) + 4(0.5 + 0.1)] \approx 1.2863$$

2. ***Comparaison avec la valeur exacte de l'intégrale en sachant que*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

$$I = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = [arctg(x)]_0^4 = arctg(4) - arctg(0) = arctg(4) \approx 1.3258$$

$$|I - I_T| = |1.3258 - 1.3294| = 0.0036\ ;\ E_r = 0.27\ \%\ ;$$

$$|I - I_s| = |1.3258 - 1.2863| = 0.0395\ ;\ E_r = 2.98\ \%\ ;$$

La méthode des trapèzes composite avec 4 intervalles a donné un meilleur résultat par rapport à la méthode de Simpson composite avec 2 intervalles.

EXERCICE 4

$$I = \int_0^1 \big(cos(x)\big)^2 dx$$

Valeur exacte de I

$$I = \int_0^1 \big(cos(x)\big)^2 dx = \int_0^1 \frac{1 + cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{sin(2x)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{sin(2)}{2}\right) \approx 0.7273$$

Valeur approchée de I

Méthode des trapèzes composite avec 4 intervalles

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$n = 4\ ;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$x_0 = 0\ ;\ x_1 = 0.25\ ;\ x_2 = 0.5\ ;\ x_3 = 0.75$$

$$I_T = h\left(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)\right)$$
$$I_T = 0.25\left(\frac{cos^2(1)-1}{2} + \left(1+cos^2(0.25)+cos^2(0.5)+cos^2(0.75)\right)\right)$$
$$I_T = 0.25\left(-0.3540 + (1+0.9388+0.7702+0.5354)\right) \approx 0.7226$$

<u>Méthode de Simpson composite avec 2 intervalles</u>

$$I_S = \frac{h}{6}\left[f(b)-f(a)+2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

$$n = 2\ ;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$x_0 = 0\ ;\ x_1 = 0.5\ ;\ x_2 = 1;\ \frac{x_0+x_1}{2} = 0.25\ ;\ \frac{x_1+x_2}{2} = 0.75$$

$$I_S = \frac{h}{6}\left[f(b)-f(a)+2\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+4\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\right]$$
$$I_S = \frac{0.5}{6}\left(cos^2(1)-1+2\left(1+cos^2(0.5)\right)+4\left(cos^2(0.25)+cos^2(0.75)\right)\right)$$
$$I_S = \frac{0.5}{6}\left(-0.7081+2(1+0.7702)+4(0.9388+0.5354)\right) \approx 0.7274$$

<u>Calcul des erreurs</u>

$|I - I_T| = |0.7273 - 0.7226| = 0.0047$; $E_r = 0.65\ \%$;

$|I - I_s| = |0.7273 - 0.7274| = 0.0001$; $E_r = 0.01\ \%$;

La méthode de Simpson composite avec 2 intervalles a donné un meilleur résultat par rapport à la méthode des trapèzes composite avec 4 intervalles.

EXERCICE 5

$$I = \int_0^2 e^{-x^2}dx$$

1. ***<u>Valeur approchée de I en utilisant la méthode des rectangles composite 8 intervalles</u>***

$$I_R = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Pour $n = 8$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_0 = 0\ ;\ x_1 = 0.25\ ;\ x_2 = 0.5\ ;\ x_3 = 0.75;\ x_4 = 1\ ;\ x_5 = 1.25\ ;\ x_6 = 1.5;\ x_7 = 1.75$

$$I_R = 0.25\left(1+e^{-0.25^2}+e^{-0.5^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1}+e^{-1.25^2}+e^{-1.5^2}+e^{-1.75^2}\right) \approx 1.0044$$

2. ***<u>Borne supérieure de l'erreur absolue</u>***

$$E_a = |I - I_R| \le \frac{(b-a)^2}{2n}.\max_{[a,b]}|f'(x)|$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs on aura

$E_a = |I - I_R| \leq \frac{2}{n}.\max_{[0,2]}|f'(x)|$

$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2}$

Pour $x \in [0,2]$: $|f'(x)| = 2xe^{-x^2}$

On doit trouver $m = \max_{[0,2]}|f'(x)|$. Pour cela, on pose $g(x) = |f'(x)| = 2xe^{-x^2}$

Il faudra étudier les variations de $g(x)$ pour pouvoir déterminer son maximum sur l'intervalle [0,2].

$g'(x) = 2(1 - 2x^2)e^{-x^2}$

Le signe de $g'(x)$ est le signe de $1 - 2x^2 = 2\left(\frac{1}{2} - x^2\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x\right)$ qui est lui-même le signe de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)$ car l'étude est restreinte à l'intervalle [0,2]. On aura donc :

$g'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad g\ est\ croissante$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$ $\quad g\ admet\ un\ maximum$

$g'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - x < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad g\ est\ décroissante$

De cette étude on déduit que

$m = \max_{[0,2]}|f'(x)| = \max_{[0,2]} g(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^{-0.5} \approx 0.8578$

Finalement, on peut donner une majoration de l'erreur absolue

$E_a = |I - I_R| \leq \frac{2}{n}.m = \frac{2}{8} \times 0.8578 = 0.2145$

Et comme estimation de la valeur de l'intégrale, on peut écrire

$I = I_R \pm E_a = 1.0044 \pm 0.2145$

Ce qui revient aussi à dire que $0.7899 \leq I \leq 1.2189$

3. *Valeur de n (nombre d'intervalles) pour avoir $E_a \leq 0.1$*

$E_a \leq \frac{2}{n}.m \leq 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{2.m}{0.1} = \frac{2 \times 0.8578}{0.1} = 17.1560 \Rightarrow n = 18$

Valeur de I_R pour $n = 18$

$I_R = 0.9365$

Estimation de la valeur exacte de l'intégrale

$I = I_R \pm E_a = 0.9365 \pm 0.1$ $\quad (0.8365 \leq I \leq 1.0635)$

Estimation de l'erreur relative

L'erreur relative maximale est obtenue pour la valeur minimale de I

$E_r = \frac{E_a}{I_R - E_a} = \frac{0.1}{0.8365} = 0.1195 = 11.95\ \%$