SERIE DE TD N^{O} 4
(INTERPOLATION POLYNOMIALE)

EXERCICE 1

Soit la fonction f donnée par le tableau suivant

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	36	252

1. Déterminer le polynôme de Lagrange passant par les 3 premiers points.
2. Déterminer le polynôme Lagrange passant par 4 points. Est-ce possible d'utiliser les calculs faits en 1 ?
3. Donner une valeur approchée de $f(1.5)$ en utilisant les deux polynômes. Comparer et conclure.
4. Donner l'expression du polynôme Lagrange passant par les points $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,-1)$.

EXERCICE 2

Considérons les points de l'exercice précédent.

1. Déterminer le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.
2. Déterminer le polynôme Newton passant par 4 points. Est-ce possible d'utiliser les calculs faits en 1 ?

EXERCICE 3

Soit la fonction f donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	2	- 3

1. Donner la table des différences divisées de la fonction f à partir de ce tableau.
2. a)- Déterminer par deux méthodes (Lagrange et Newton) le polynôme d'interpolation de degré 1 passant par les 2 premiers points.
   b)- Donner une valeur approchée de $f(1.5)$.
   c)- Quelle méthode nécessite moins de calcul pour déterminer la valeur approchée de $f(1.5)$?
3. Obtenir le polynôme de Newton passant par les 3 derniers points. Donner une valeur approchée de $f(2.5)$.

EXERCICE 4

Soit la fonction f donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4
$f(x)$	7	- 4	- 3	5

1. Déterminer par la méthode de Lagrange le polynôme *P* passant par les 3 premiers points.
2. a)- Construire la table des différences divisées de la fonction f à partir du tableau précédent.

   b)- Déterminer par la méthode de Newton le polynôme *Q* passant par les 3 derniers points.

   c)- Déterminer le polynôme *R* de Newton passant par les 4 points. Donner une majoration de l'erreur absolue $|f(2.5) - R(2.5)|$ en supposant que $\max_{x\in[1,4]}\left|f^{(4)}(x)\right| = 4$ ($f^{(4)}$ dérivée d'ordre 4 de f)
3. Donner une valeur approchée de $f(2.5)$ en utilisant les polynômes *P* et *Q*. Quelle méthode nécessite moins de calcul pour l'évaluation de cette valeur ? Justifier.

EXERCICE 5

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité du polynôme d'interpolation de degré inférieur où égale *n* d'une fonction *f* aux points d'abscisses $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$?
2. Etablir la relation entre $f[x_0, x_1, x_2]$, $f[x_1, x_2, x_0]$ et $f[x_2, x_0, x_1]$
3. Quel est le plus grand ordre des différences divisées qu'on peut avoir en utilisant 5 points ?
4. Obtenir l'expression des premières, deuxièmes et troisièmes différences divisées dans le cas où les points d'interpolations sont également distants, c'est-à-dire $x_{i+1} - x_i = h$. Donner un aperçu de ce que pourraient être les autres différences divisées.