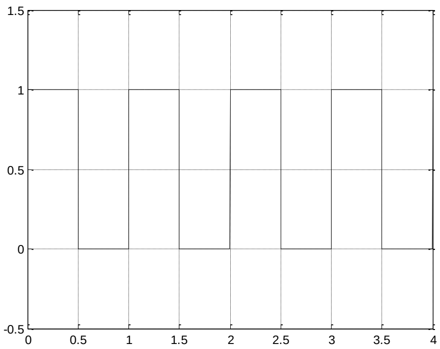
TP2 – SERIE DE FOURIIER
RECONSTRUCTION D'UN SIGNAL PERIODIQUE A PARTIR DE SES COMPOSANTES FREQUENTIELLES

OBJECTIFS DU TP

1- Construire un signal périodique à partir des fonctions sinusoïdales de son développement en série de Fourier trigonométrique en utilisant la programmation MATLAB.
2- Représentation du spectre d'un signal périodique.

DEVELOPPEMENT THEORIQUE



On considère le train d'impulsions rectangulaires

$$x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 0.5 \\ 0 & si \quad 0.5 \le t < 1 \end{cases} \quad \text{Périodique de période } T_o = 1\ s.$$

Son développement en série de Fourier trigonométrique est donné par

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_o} t\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_o} t\right) \right]$$

Avec

$$a_o = 0.5 \quad ; \quad a_n = 0 \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi n}[1 - cos(\pi n)]$$

En remplaçant les coefficients de Fourier par leurs valeurs dans le développement précédent on obtient

$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi n}[1 - cos(\pi n)] sin(2\pi n t)$$

On considère maintenant le signal $x_m(t)$ obtenu en arrêtant la somme précédente au terme correspondant à $n = m$ (somme partielle de la série de Fourier)

$$x_m(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\pi n}[1 - cos(\pi n)] sin(2\pi n t)$$

Le premier objectif est de construire le signal carré $x(t)$ à partir de la somme de ces fonctions sinusoïdales et vérifier que lorsque m (nombre de termes dans la somme) augmente, $x_m(t)$ tends et s'approche du signal carré $x(t)$.

Le deuxième objectif est de faire la représentation spectrale (amplitude et phase) du signal $x(t)$ pour n donné en utilisant la commande **stem**.

Spectre d'amplitude

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{\pi n}[1 - cos(\pi n)] = \begin{cases} 0 & si \ \ n \ \ est\ pair \\ \dfrac{2}{\pi n} & si \ \ n\ est\ impair \end{cases} \qquad ; \quad A_o = a_o = 0.5$$

Spectre de phase

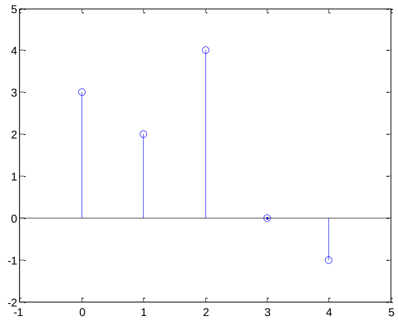
$$\varphi_n = arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} 0 & si \ \ n \ \ est\ pair \\ \dfrac{\pi}{2} & si \ \ n\ est\ impair \end{cases} \qquad ; \quad \varphi_o = 0$$

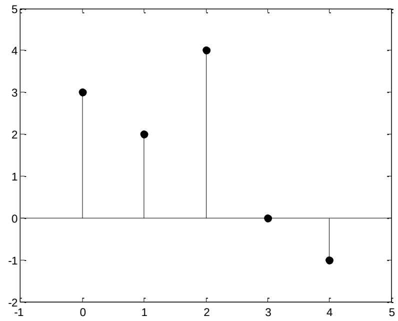
***Présentation de la commande* stem**

Utilisée pour représenter les signaux discrets, **stem(x,y)** permet de représenter **y** en fonction de **x** sous forme de raies.

Exemple :

```
>> x=[0 1 2 3 4];
>> y=[3 2 4 0 -1];
>> stem(x,y) ; axis([-1 5 -2 5])
>> figure
>> stem(x,y,'fill','k');axis([-1 5 -2 5])
```





TRAVAIL DEMANDÉ

1- Ecrire un programme MATLAB permettant de :

a)- Générer les signaux $x_2(t)$; $x_8(t)$; $x_{30}(t)$; $x_{100}(t)$, correspondants à $m = 2$, 8 , 30 , 100 respectivement, sur l'intervalle [0,2[avec un pas de 0.001 s.

b)- Générer le signal $x(t)$ sur le même intervalle et avec le même pas.

c)- Faire une représentation graphique des signaux précédents. Proposer 2 solutions :

Solution 1 : sur la même figure mais sur des axes différents, permettant de comparer chacun des signaux $x_m(t)$ $(m = 2{,}8{,}30{,}100)$ avec le signal $x(t)$.

Solution 2 : sur la même figure et sur les mêmes axes avec une légende pour le graphe.

2- En faisant une comparaison graphique, que peut-on remarquer ?

3- Quel est le comportement des signaux $x_m(t)$ aux voisinages des discontinuités ? Qu'appelle-t-on ce phénomène ? Peut-on l'interpréter ?

4- En utilisant la commande **stem**, écrire un programme permettant de représenter le spectre (amplitude et phase) du signal $x(t)$ jusqu'à $n = 10$.

EXERCICES

EXERCICE 1

On considère le signal périodique, de période T_o = 2 s, défini par : $x(t) = t \quad si \quad 0 \leq t < 2$.

1- Déterminer les coefficients trigonométriques de Fourier du signal $x(t)$.

2- Ecrire un programme MATLAB permettant de :

- Générer les signaux $x_3(t)$, $x_{10}(t)$ et $x_{30}(t)$ résultats de la somme des 3, 10, 30 premiers termes respectivement de la série de Fourier, sur l'intervalle $[0, 6[$ avec un pas de 10^{-2}.
- Générer le signal $x(t)$ sur l'intervalle $[0, 6[$ avec un pas de 10^{-2}. Proposer 2 méthodes,

  Méthode 1 : en utilisant les fonctions disponibles sur MATLAB.

  Méthode 2 : sans utiliser les fonctions disponibles sur MATLAB.
- Représenter graphiquement les signaux précédents. Proposer 2 solutions,

  Solution 1 : sur la même figure et sur les mêmes axes avec une légende pour le graphe.

  Solution 2 : sur la même figure mais sur des axes différents (matrice 3×1), permettant de comparer le signal $x(t)$ avec chacun des 3 signaux précédents.

EXERCICE 2

Le spectre d'un signal périodique de période $T_o = 2\ s$ est donné par le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence f	f_o	$2f_o$	$3f_o$	$4f_o$	$5f_o$	$6f_o$	$7f_o$	$8f_o$	$9f_o$	$10f_o$
Amplitude A_n	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{7}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{8}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1}{10}\left(\frac{2}{\pi}\right)$
Phase φ_n	$\frac{3\pi}{2}$									

Avec $A_o = 1$

Ecrire un programme qui permet de :

1- Représenter le spectre du signal (amplitude et phase).

2- Reconstruire puis représenter ce signal sur les 3 premières périodes positives avec un pas de 0.01 s.

REPONSES AU TRAVAIL DEMANDÉ

1- *Programme*

```
t=0:0.001:1.999;
xm=0.5;
for n=1:100
    xm=xm+(1-cos(pi*n))*sin(2*pi*n*t)/(pi*n);
    if n==2
        x2=xm;
    end
    if n==8
        x8=xm;
    end
    if n==30
        x30=xm;
    end
end
x100=xm;
x=0.5*square(2*pi*t,50)+0.5;
subplot(221);plot(t,x,'k',t,x2);title('n=2')
subplot(222);plot(t,x,'k',t,x8);title('n=8')
subplot(223);plot(t,x,'k',t,x30);title('n=30')
subplot(224);plot(t,x,'k',t,x100);title('n=100')
figure;plot(t,x,'k',t,x2,t,x8,t,x30,t,x100);grid
legend('x(t)','x2(t)','x8(t)','x30(t)','x100(t)')
title('reconstruction d''un signal périodique')
xlabel('t(s)');ylabel('amplitude du signal')
```

2- Il est possible de reconstruire le signal à partir de son développement en série de Fourier. Plus on augmente le nombre de termes dans la somme de la série, on se rapproche du signal original.

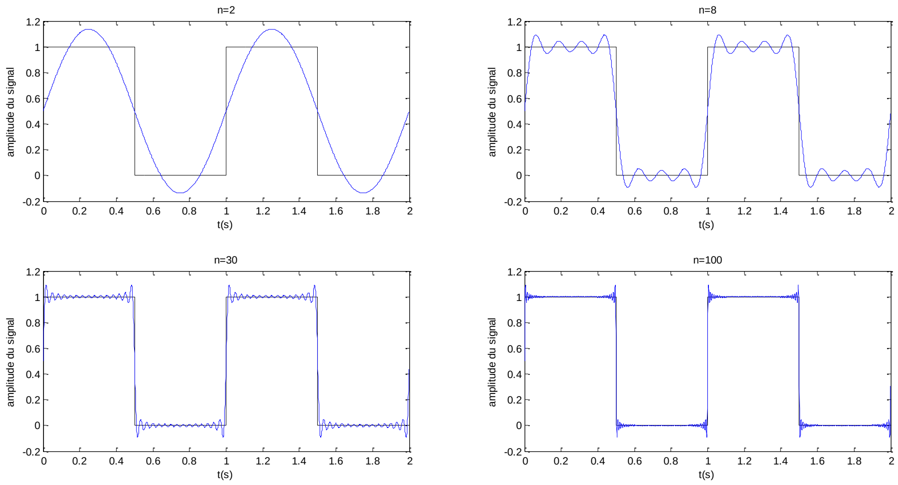
3- Aux voisinages des discontinuités on observe des oscillations permanentes dont l'amplitude maximale tend à se fixer et la durée diminue avec l'augmentation de n. Ce phénomène est appelé phénomène de Gibbs. Il peut être interprété par le fait qu'une discontinuité (celle que présente le signal $x(t)$) ne peut être approchée par des fonctions continues (les fonctions sinusoïdales de son développement en série Fourier).

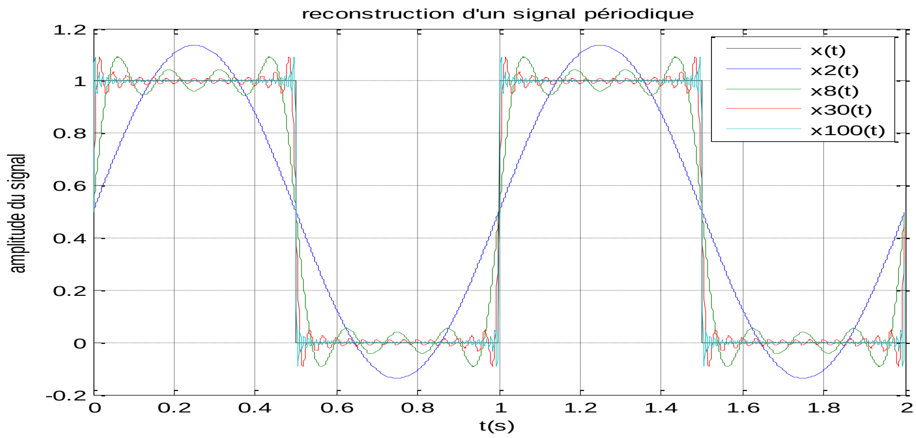
4- <u>*Représentation spectrale du signal*</u>

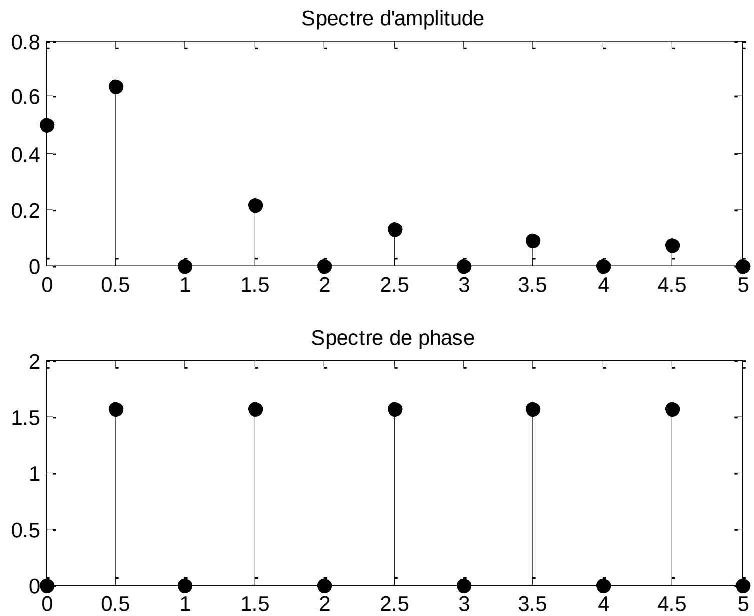
Programme

```
f0=0.5;
f=0:f0:10*f0;
A0=0.5;phi0=0;
for n=1:10
    if rem(n,2)==0
        A(n)=0;
```

```
            phi(n)=0;
        else
            A(n)=2/(pi*n);
            phi(n)=pi/2;
        end
    end
    A=[A0 A];
    phi=[phi0 phi];
    subplot(211);stem(f,A,'fill','k');title('Spectre d''amplitude')
    subplot(212);stem(f,phi,'fill','k');title('Spectre de phase')
```







SOLUTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

1- ***Coefficients trigonométriques de Fourier du signal $s(t)$***

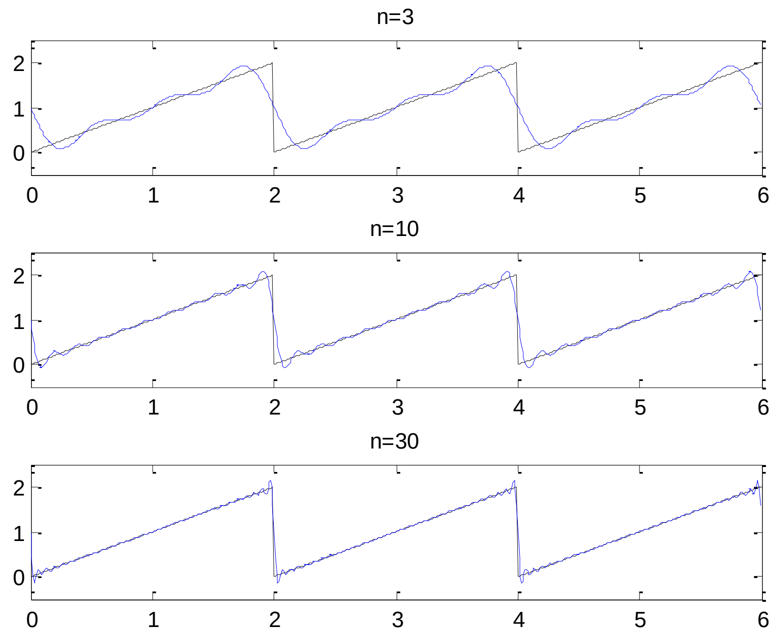
$$a_0 = 1\ ,\ a_n = 0\ ,\ b_n = \frac{-2}{\pi n}$$

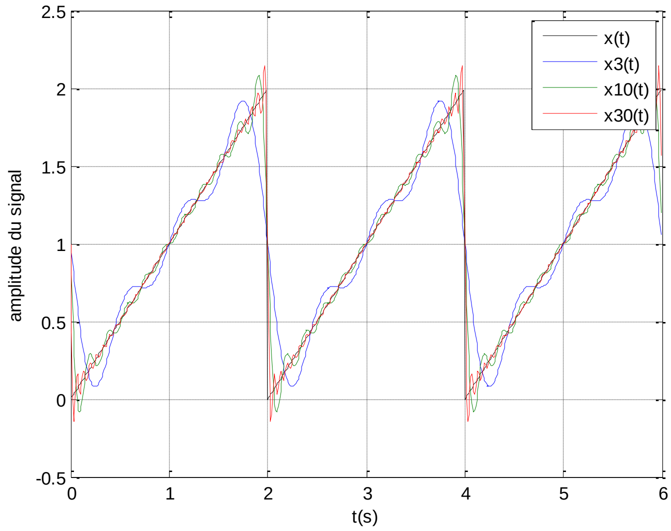
2- ***Programme***

```
t=0:0.01:5.99;
xm=1;
for n=1:30
    xm=xm-2*sin(pi*n*t)/(pi*n);
    if n==3
        x3=xm;
    end
    if n==10
        x10=xm;
    end
end
x30=xm;
x=sawtooth(pi*t)+1;
subplot(311);plot(t,x,'k',t,x3);ylim([0 2]);title('n=3')
subplot(312);plot(t,x,'k',t,x10);ylim([0 2]);title('n=10')
subplot(313);plot(t,x,'k',t,x30);ylim([0 2]);title('n=30')
figure;plot(t,x,'k',t,x3,t,x10,t,x30);grid
legend('x(t)','x3(t)','x10(t)','x30(t)')
xlabel('t(s)');ylabel('amplitude du signal')
```

<u>Génération de x(t) sans utiliser les fonctions disponibles sur MATLAB</u>

```
t1=0:0.01:1.99;
y=t1;
x=[];
for i=1:3
    x=[x y];
end
```



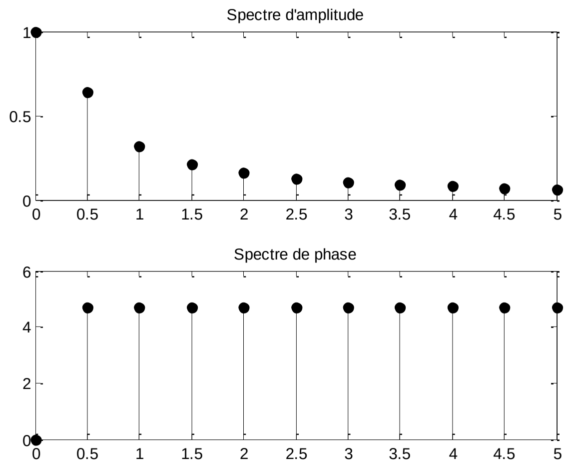


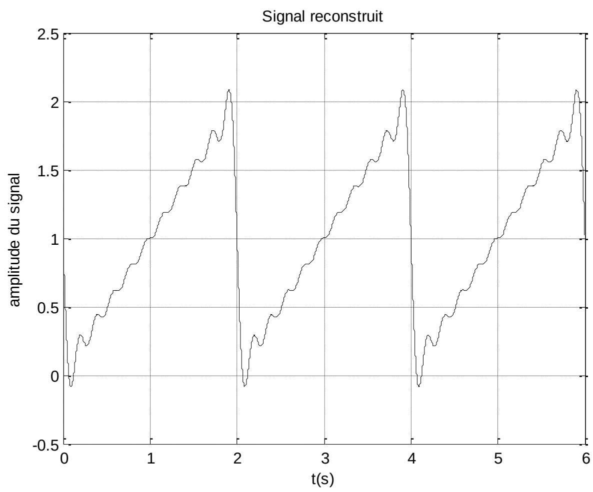
EXERCICE 2

Programme :

```
%Représentation du spectre d'amplitude du signal
clear
T0=2;
f0=1/T0;
f=0:f0:10*f0;
for n=1:10
    A(n)=2/(n*pi);
    phi(n)=3*pi/2;
end
A0=1;phi0=0;
A=[A0 A];phi=[phi0 phi]
subplot(211);stem(f,A,'fill','k');title('Spectre d''amplitude')
subplot(212);stem(f,phi,'fill','k');title('Spectre de phase')

%Reconstruction et représentation du signal
t=0:0.001:5.999;
x=1;
for n=1:10
    x=x+2*cos(pi*n*t-3*pi/2)/(n*pi);
end
figure;plot(t,x,'k');grid
xlabel('t(s)');ylabel('amplitude du signal');title('Signal reconstruit')
```





D'après le graphe, on constate que le signal reconstitué est un signal triangulaire en dents de scie de période 2s et d'amplitude 2.