TP3 – CALCUL NUMERIQUE DE GRANDEURS CARACTERISTIQUES DES SIGNAUX

OBJECTIFS DU TP

Utilisation de l'intégration numérique pour le calcul de certaines grandeurs caractéristiques des signaux comme l'énergie, la valeur moyenne, les coefficients de Fourier …

DEVELOPPEMENT THEORIQUE

INTEGRATION NUMERIQUE

L'objectif de l'intégration numérique est de déterminer, en utilisant le calcul numérique, une valeur approchée d'une intégrale définie $I = \int_a^b f(x)\,dx$, lorsque cette dernière ne peut être évaluée analytiquement. Ceci est le cas, par exemple lorsque l'expression de *f* est un peu compliquée ou que *f* est imparfaitement connue (connue uniquement en un ensemble fini de points).

Ce dernier cas est souvent rencontré en traitement des signaux physiques dont l'expression peut être inconnue, on ne dispose que d'un ensemble de mesures du signal.

Dans ce cas, le recours à l'intégration numérique devient indispensable pour calculer certaines caractéristiques du signal (valeur moyenne, énergie, coefficients de Fourier…) ou effectuer certains traitements sur les signaux (corrélation, convolution,…).

Deux méthodes pour l'intégration numérique sont présentées ci-dessous.

1- Méthode des rectangles

Principe

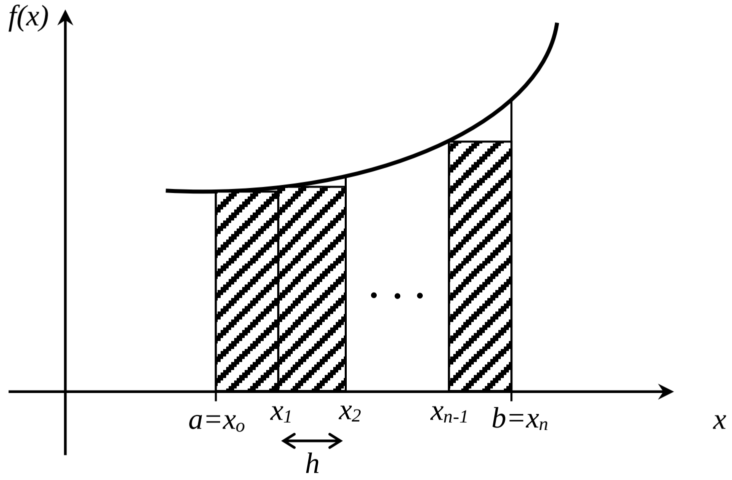
1- Décomposer l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en *n* sous-intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ (*h* est appelé pas d'intégration).
2- Dans chaque sous-intervalle remplacer la fonction *f* par une constante égale à la valeur de cette fonction à l'une des extrémités du sous-intervalle.
3- Calculer une valeur approchée de l'intégrale qui n'est rien d'autre que la somme des surfaces des *n* rectangles obtenus de même largeur *h* et de hauteur variable suivant la valeur de la fonction.

Formule

La valeur approchée, notée I_R, de l'intégrale est donnée par la formule suivante :

$$I_R = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i.h$, *n* représente le nombre de sous-intervalles.



2- Méthode des trapèzes

Principe

Même principe que la méthode des rectangles sauf que la fonction f est remplacée dans chaque sous-intervalle par une droite reliant les 2 points de la fonction se trouvant aux extrémités du sous-intervalle (les rectangles hachurés deviennent des trapèzes).

Formule

La valeur approchée, notée I_T, de l'intégrale est donnée par la formule suivante :

$$I_T = h\left[\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i.h$, n représente le nombre de sous-intervalles.

TRAVAIL DEMANDE

1- On considère le signal $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$

a)- Calculer analytiquement l'énergie de ce signal.

b)- Ecrire un programme MATLAB permettant de calculer numériquement cette énergie en utilisant les méthodes des rectangles et trapèzes pour différentes valeur du pas d'intégration h = 0.2, 0.1, 0.01 s.

c)- Comparer les résultats obtenus numériquement avec la valeur exacte de l'énergie. Conclure.

2- On considère le train d'impulsions rectangulaires

$$y(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < 0.5 \\ 0 & si \quad 0.5 \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{Périodique de période } T_o = 1\ s.$$

a)- Ecrire un programme permettant de calculer numériquement les coefficients trigonométriques de Fourier du signal jusqu'à $n = 10$. Utiliser la méthode des trapèzes avec un pas h = 0.01 s.

b)- Comparer les résultats obtenus avec les valeurs exactes en sachant que

$$a_o = 0.5 \quad ; \quad a_n = 0 \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi n}[1 - cos(\pi n)]$$

REPONSES

1- $\boldsymbol{x(t) = \begin{cases} e^{-t} & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \quad sinon \end{cases}}$

a)- <u>Energie de ce signal</u>

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^1 e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2} \approx 0.4323$$

b)- <u>Programme</u>

```
x=inline('exp(-t)');
a=0;
b=1;
h=0.2;
n=(b-a)/h;
s=0;
for i=0:n-1
    s=s+x(a+i*h)^2;
end
Ir=h*s;
It=h*((x(b)-x(a))/2+s);
```

c)- <u>Résultats, comparaison et conclusion</u>

	Méthode des rectangles		Méthode des trapèzes	
	I_R	$e_r = \frac{\lvert E_x - I_R \rvert}{E_x}$ %	I_T	$e_r = \frac{\lvert E_x - I_T \rvert}{E_x}$ %
h = 0.2	0.5245	21.33 %	0.4613	6.71 %
h = 0.1	0.4770	10.34 %	0.4454	3.03 %
h = 0.01	0.4367	1.02 %	**0.4335**	**0.28 %**

Les résultats obtenus montrent que :
- La méthode des trapèzes et meilleur que la méthode des rectangles.
- En diminuant le pas d'intégration on se rapproche de la valeur exacte.
- Ce calcul peut être aussi effectué lorsque le signal est défini par un ensemble de valeurs (mesures) à des instants donnés.

2- $\boldsymbol{y(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < 0.5 \\ 0 & si \quad 0.5 \leq t < 1 \end{cases}}$ **de période $\boldsymbol{T_o = 1\ s}$**

$$a_o = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)cos\left(\frac{2\pi n}{T_o}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin\left(\frac{2\pi n}{T_o}t\right)dt$$

a)- <u>Programme</u>

```
T0=1;
h=0.01;
t=0:h:T0-h;
x=0.5*square(2*pi/T0*t)+0.5;
a=0;
b=T0;
N=(b-a)/h;
s=0;
for i=1:N
    s=s+x(i);
end
a0=h*((x(N)-x(1))/2+s)/T0;
for n=1:10
    sa=0;
    sb=0;
    for i=1:N
        sa=sa+x(i)*cos(2*pi*n*t(i)/T0);
        sb=sb+x(i)*sin(2*pi*n*t(i)/T0);
    end
    a(n)=2*h*((x(N)*cos(2*pi*n*t(N)/T0)-x(1)*cos(2*pi*n*t(1)/T0))/2+sa)/T0;
    b(n)=2*h*((x(N)*sin(2*pi*n*t(N)/T0)-x(1)*sin(2*pi*n*t(1)/T0))/2+sb)/T0;
end
disp('Coefficient a0');disp(a0)
disp('Coefficients an');disp(a)
disp('Coefficients bn');disp(b)
```

<u>Résultat d'exécution</u>

Coefficient a0

0.4950

Coefficients an (n = 1:10)

0.0100 -0.0100 0.0100 -0.0100 0.0100 -0.0100 0.0100 -0.0100 0.0100 -0.0100

Coefficients bn (n = 1:10)

0.6364 -0.0000 0.2116 -0.0000 0.1263 0.0000 0.0895 -0.0000 0.0688 -0.0000

b)- <u>Comparaison</u>

<u>Valeurs exactes</u>

$a_o = 0.5$

$a_n = 0$

$b_n =$ 0.6366 0 0.2122 0 0.1273 0 0.0909 0 0.0707 0

<u>Valeurs approchées obtenues pour h = 0.001</u>

Coefficient a0

0.4995

Coefficients an

0.0010 -0.0010 0.0010 -0.0010 0.0010 -0.0010 0.0010 -0.0010 0.0010 -0.0010

Coefficients bn

0.6366 0.0000 0.2122 -0.0000 0.1273 0.0000 0.0909 -0.0000 0.0707 0.0000