TP4 – TRANSFORMEE DE FOURIER
(Directe/inverse – Continue/Discrète)

OBJECTIFS DU TP

Présenter les commandes MATLAB permettant de calculer la Transformée de Fourier directe et inverse pour les signaux continus (définis par leurs expressions analytiques) et discrets (ou échantillonnés).

1- TRANSFORMEE DE FOURIER DES SIGNAUX CONTINUS
(Ou calcul symbolique de la TF)

Transformée de Fourier directe

Soit x un signal continu dont on connait l'expression fonction t.
La commande ***fourier*** (x) donne l'expression de la TF de x en fonction de la pulsation ω. On rappelle que

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Exemple 1 :

$$x(t) = e^{-t}.u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

>> **syms t;** % Définit t comme variable symbolique
>> **x=exp(-t)*heaviside(t);** % Expression du signal
>> **X=fourier(x)**
 X = 1/(i*w + 1) % Expression de la TF de x

Exemple 2 :

$$TF\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

>> **syms t;**
>> **x=exp(-3*abs(t));**
>> **X=fourier(x)**
 X = 6/(w^2 + 9)

Transformée de Fourier inverse

La commande ***ifourier*** (X) donne l'expression de la TF inverse de X. X doit être exprimée en fonction de la pulsation ω. Pour que le résultat, c'est-à-dire l'expression du signal dans le domaine temporel, soit donné en fonction de t il suffit d'écrire ***ifourier*** (X,t) où t doit être déclaré comme variable symbolique. On rappelle que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Exemple 3 :

$$TF^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right] = e^{-t}.u(t)$$

>> syms w t;
>> X=1/(1+j*w);
>> x=ifourier(X,t)
x = heaviside(t)/exp(t)

2- TRANSFORMEE DE FOURIER DES SIGNAUX DISCRETS

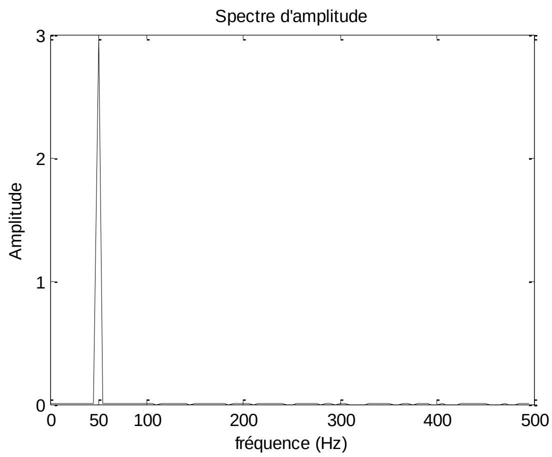
Soit *x* un signal discret ou échantillonné défini par un ensemble de valeurs sur un intervalle de temps fini. La commande ***fft*** (*x*) calcul les valeurs de la TF discrète du signal *x*.

Exemple 4 : Spectre d'un signal sinusoïdal simple

On considère le signal $x(t) = 3sin(2\pi f_o t)$, avec $f_o = 50\ Hz \quad (T_o = 0.02\ s)$, qui sera échantillonné à une fréquence $f_e = 1000\ Hz \quad (T_e = 0.001\ s)$.
Le signal échantillonné sera considéré sur une durée $d = 0.2\ s \quad (10 \times T_o)$.
Le programme suivant calcule la TF discrète de ce signal et représente son spectre d'amplitude.

Programme

```
f0=50;T0=1/f0;   %Définir la fréquence (période) du signal
d=10*T0;         %Durée d'observation du signal
fe=1000;         %Fréquence d'échantillonnage
Te=1/fe;         %Période d'échantillonnage
t=0:Te:d-Te;
x=3*sin(2*pi*f0*t);   %Génération du signal
X=abs(fft(x));        %Spectre d'amplitude (module de la TF)
N=length(X)/2;        %Il suffit de considérer la moitié de X
X=X(1:N)/N;           %Mise à l'échelle de X
f=(0:N-1)/N*fe/2;     %Génération du vecteur fréquence correspondant
plot(f,X,'k')
xlabel('fréquence (Hz)')
ylabel('Amplitude')
title('Spectre d''amplitude')
```



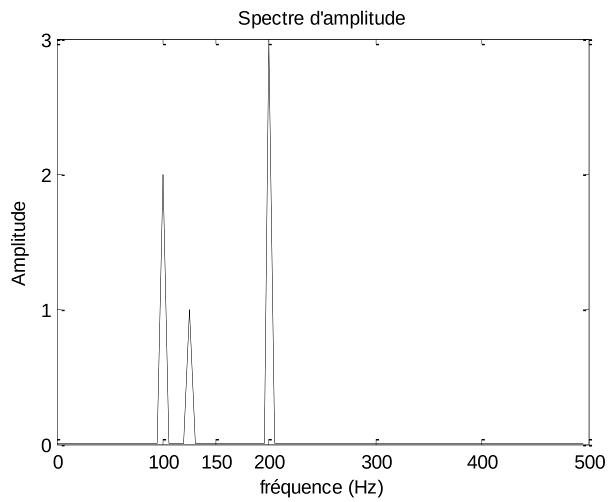
On Remarque bien le pic d'amplitude 3 autour de la fréquence 50 Hz ce qui traduit effectivement l'information fréquentielle contenue dans le signal étudié.

Exemple 5 : Spectre d'un signal sinusoïdal composite

$x(t) = 2sin(2\pi 100t) + sin(2\pi 125t) + 3sin(2\pi 200t)$
Fréquence d'échantillonnage $f_e = 1000\ Hz \quad (T_e = 0.001\ s)$.
Durée d'observation du signal $d = 0.2\ s$.

Programme

```
d=0.2;
fe=1000;
Te=1/fe;
t=0:Te:d-Te;
x=2*sin(2*pi*100*t)+sin(2*pi*125*t)+3*sin(2*pi*200*t);
X=abs(fft(x));
N=length(X)/2;
X=X(1:N)/N;
f=(0:N-1)/N*fe/2;
plot(f,X,'k')
xlabel('fréquence (Hz)')
ylabel('Amplitude')
title('Spectre d''amplitude')
```



Le spectre d'amplitude traduit effectivement le contenu fréquentiel du signal étudié.
Il est possible d'obtenir un meilleur résultat (réduire la largeur des pics) en augmentant la durée d'observation du signal ce qui permet de s'approcher du signal réel qui a une durée infinie.
Ci-dessous le résultat obtenu pour une durée $d = 2\ s$.