

NOM :

Prénom :

# Examen de Traitement du Signal (TDS)

Classe : **3<sup>ème</sup> année ESTACA**

18 Janvier 2006

Enseignants : **J.L. Dion – G. Hiet**

Durée de l'épreuve : **2h00**

Calculatrice ESTACA (TI 30 X) autorisée  
Aucun document autorisé

Le barème est donné à titre indicatif

## Notation :

- \* : produit de convolution
- . : multiplication « scalaire »
- $\delta(t)$  : impulsion de Dirac
- $\text{II}_{T_e}(t)$  : peigne de Dirac
- $\text{II}_{\tau}(t)$  : signal « porte » d'amplitude 1 et de largeur  $\tau$

Pour chaque question répondre dans le cadre prévu. Sauf mention contraire : **réponse juste et complète 1pt, incomplète ½ pt, fausse ou absence de réponse 0pt.**

Le barème total est sur **25pt**, il n'est donc pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir 20.

**Ne pas dégrafer le sujet**

## Question de cours (QCM) : 5pt

**Question 1 :** Qu'est-ce qu'un modèle ARMA ?

- . modèle FLID (filtre numérique) générique
- . FT en z en fraction rationnelle  $H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}}$  ou EDF associée, ou schéma de réalisation
- . MA -> « Moving Average » = moyenne mobile = moyenne pondérée des entrées retardées
- . AR -> partie Auto-Regressive = rebouclage des sorties retardées

**Question 2 :** Quelle est la condition de stabilité d'un filtre numérique ?

- . stabilité EBSB  $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |h[n]| \leq +\infty$
- . FT : cercle  $|z|=1$  inclus dans le domaine de convergence soit pour les systèmes causaux tous les pôles de la FT à l'intérieur du cercle unité (module strictement inférieur à 1)

**Question 3 :** Quel est l'objectif commun des techniques d'analyse spectrale et d'analyse synchrone ? Dans quel cas utilisera-t-on l'une ou l'autre de ces deux techniques ?

- . mettre en évidence la partie déterministe d'un signal (ou système) en pondérant très fortement la partie aléatoire
- . signal non synchrone -> analyse spectrale, signal synchrone -> analyse spectrale possible mais analyse synchrone donne de meilleurs résultats

**Question 4 :** Lors de l'analyse d'un signal issu d'une chaîne de mesure, quels sont les différents types d'erreurs qui peuvent perturber l'observation ? Quelles peuvent être les causes de ces différents types d'erreurs (donner un exemple pour chaque type d'erreur) ? De quel type d'erreur la technique de moyenne spectrale permet-elle de limiter les effets ?

- . erreur systématique (biais) / erreur statistique
- . erreur systématique : biais de résolution, erreur d'apodisation...
- . erreur statistique : bruit corrélé avec la sortie (bruit blanc...)
- . La moyenne spectrale permet de limiter l'erreur statistique du signal

NOM :

Prénom :

**Question 5 :** Que permet de calculer l'algorithme FFT (algorithme de Cooley-Tukey) ? Sans entrer dans les détails mathématiques, donner brièvement le principe du calcul. Pourquoi choisit-on d'utiliser cet algorithme plutôt que le calcul direct itératif ?

- . FFT = algorithme de calcul de la TFD
- . Exploitation de la décomposition binaire, algorithme récursif : pour chaque étape, expression de la TFD d'ordre  $N$  en fonction des TFD d'ordre  $N/2$  (implique  $N=2^q$ )
- . algorithme beaucoup moins coûteux en ressource car nécessitant moins d'opérations (multiplication) donc plus rapide que l'algorithme itératif « intuitif »

## Exercice 1 : 5pt

On considère un signal numérique  $x[n]$  produisant périodiquement les échantillons suivants :

$$x[0] = 0, x[1] = 1, x[2] = 2, x[3] = 0, x[4] = 1, x[5] = 2, x[6] = 0 \dots$$

**Question 1 (2pt):** Déterminer  $E(z)$ , la transformée en  $z$  de ce signal.

On rappelle que pour une suite géométrique  $a_n = q^n$  de raison  $q$  on peut établir la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

De plus, si  $|q| < 1$ , la série converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

·  
·  
·  
·  
·  
·

$$E(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^3 - 1}$$

NOM :

Prénom :

**Question 2 (1pt):** On considère maintenant un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle  $h[n]$  est définie par :

$$h[0] = 0 ; h[1] = 0,5 ; h[2] = 0,8 ; h[3] = 0,5 ; h[4] = 0,2 \text{ et } \forall n > 4, h[n] = 0$$

Quelle est la nature de ce filtre ? Est-il réalisable en temps réel ? Pourquoi ?

. RIF (MA) Filtre stable et causal -> réalisable en temps réel

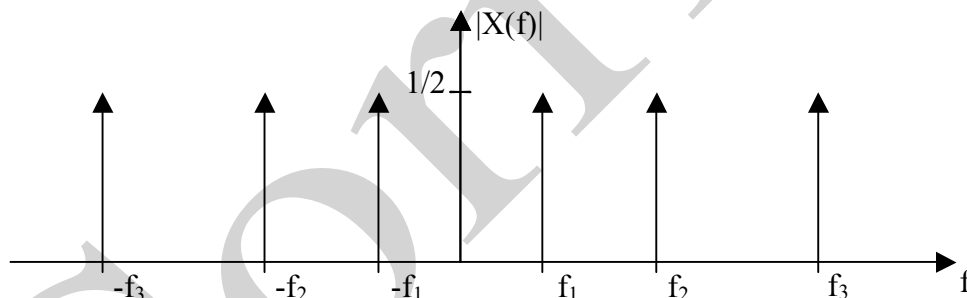
**Question 3 (2pt):** On applique le signal  $x[n]$  de la question 1 à l'entrée du filtre. Déterminer les cinq premières valeurs de la sortie  $y[n]$  du filtre.

|      |   |   |     |     |     |
|------|---|---|-----|-----|-----|
| n    | 0 | 1 | 2   | 3   | 4   |
| y[n] | 0 | 0 | 0,5 | 1,8 | 2,1 |

## Exercice 2 : 5pt

Soit le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)$

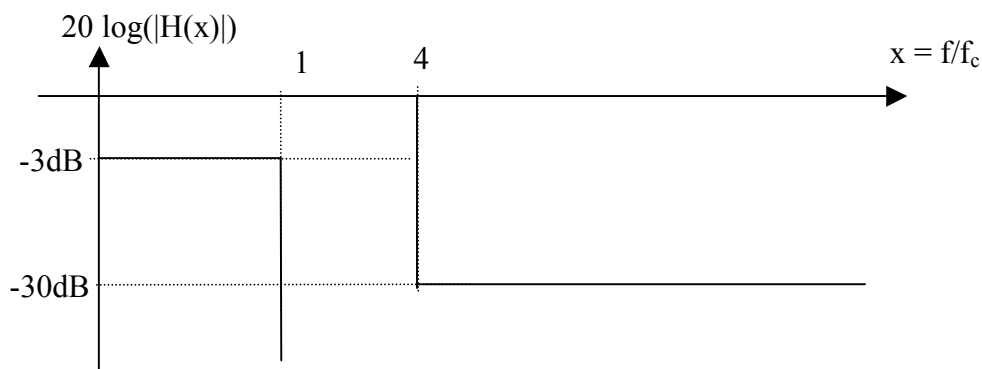
**Question 1 :** Donner l'allure du spectre de  $x(t)$  (en module)



**Question 2 :** On souhaite se débarrasser des deux raies hautes fréquences de ce signal. Pour cela, on envisage d'utiliser un filtre de Butterworth. Le cahier des charges est le suivant :

- atténuation de -3dB à la fréquence de coupure ( $f_c$ )
- largeur de la bande de transition :  $B_t = 3.f_c$
- atténuation de -30dB en bande coupée

Tracer le gabarit correspondant à ce cahier des charges.



NOM :

Prénom :

**Question 3 :** On rappelle que les filtres de Butterworth d'ordre  $n$  sont caractérisés par la propriété suivante :

$$|H(j.\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Trouver le plus petit ordre  $n$  tel que le gain du filtre de Butterworth d'ordre  $n$  s'inscrive dans le gabarit de la question 2.

$$n \geq \frac{\log(10^{\frac{30}{10}} - 1)}{2 \cdot \log(4)} \rightarrow n = 3$$

**Question 4 :** Déterminer  $f_c$ , la fréquence de coupure du filtre telle que la fréquence de la deuxième raie du spectre de  $x(t)$  (la première des deux raies que l'on souhaite éliminer) se situe à la limite (basse fréquence) de la bande coupée du filtre.

$$4.f_c = f_2 \rightarrow f_c = f_2/4$$

**Question 5 :** A l'aide la table des polynômes de Butterworth donnée en annexe, déterminer la fonction de transfert  $H(p)$  du filtre dans le cas où  $f_1 = 2\text{Hz}$ ,  $f_2 = 30\text{Hz}$  et  $f_3 = 40\text{Hz}$ .

$$H(p) \approx \frac{104646}{(1 + 47p)(p^2 + 47p + 2220)}$$

## Problème : TFD 13pt

Soit le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ . On échantillonne ce signal à l'aide d'un dispositif permettant de prélever  $N$  échantillons à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . On note  $x_{we}(t)$  le signal échantillonné en sortie du dispositif.

**Question 1 :** En négligeant l'influence des opérations de blocage et de quantification, donner l'expression mathématique de  $x_{we}(t)$  en fonction de  $x(t)$ .

$$x_{we}(t) = x(t) \cdot \prod_{\tau} (t) \cdot \prod_{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

On considère les transformées de Fourier des signaux  $x$  et  $x_{we}$  :  $X = TF(x)$  et  $X_{we} = TF(x_{we})$ .

**Question 2 :** Exprimer  $X_{we}(f)$  en fonction de  $X(f)$ .

$$X_{we}(f) = X(f) \cdot \frac{1}{T_e} \cdot \prod_{f_e} (f) \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot e^{-j \pi f \tau}$$

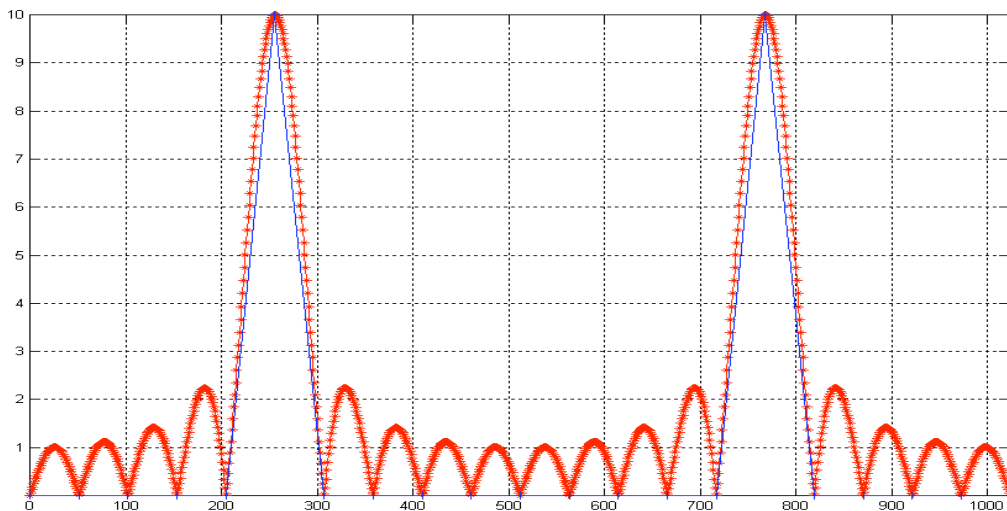
**Question 3 :** Donner l'expression de  $X(f)$ . En déduire  $X_{we}(f)$ .

$$X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \Rightarrow$$

$$X_{we}(f) = N \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin(\pi \tau (f - f_0 - k f_e))}{2 \pi \tau (f - f_0 - k f_e)} \cdot e^{-j \pi (f - f_0 - k f_e) \tau} + \frac{\sin(\pi \tau (f + f_0 - k f_e))}{2 \pi \tau (f + f_0 - k f_e)} \cdot e^{-j \pi (f + f_0 - k f_e) \tau} \right]$$

**Question 4 :** Application numérique

On donne :  $f_e = 20\text{Hz}$ ,  $N = 20$ ,  $f_0 = 5\text{Hz}$  Tracer l'allure de  $|X_{we}(f)|$ .



NOM :

Prénom :

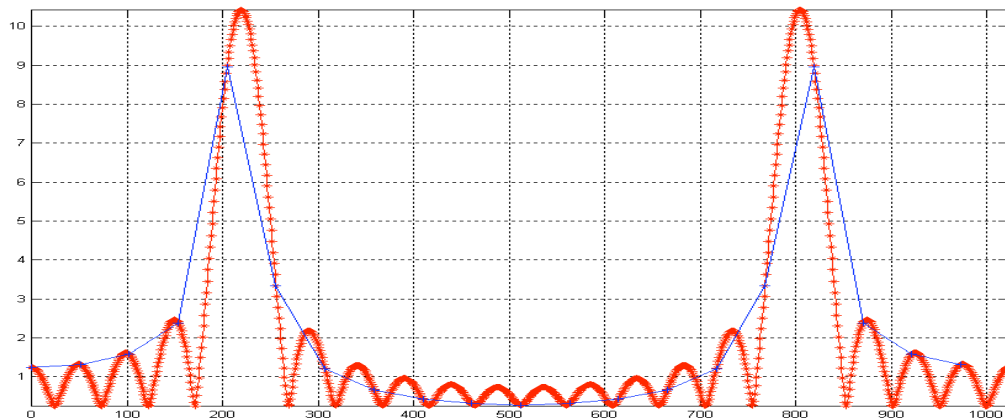
**Question 5 :** On décide de calculer numériquement le spectre du signal  $x(t)$ . Pour cela, on place un processeur de traitement de signal (DSP) en sortie du dispositif d'échantillonnage et on programme un algorithme de Transformée de Fourier Discrète. On obtient ainsi en sortie un signal numérique  $X_N[k]$  qui correspond aux  $N$  échantillons de calcul de la TFD de  $x_{we}(t)$ .

Donner l'expression de  $X_N[k]$  en fonction de  $X_{we}(f)$ . Placer les valeurs des échantillons  $X_N[k]$  de la TFD sur le graphique de la question 4.

$$X_N[k] = X_{we}\left(k \cdot \frac{f_e}{N}\right)$$

**Question 6 :** On considère maintenant le cas :  $f_0 = 4,3\text{Hz}$

Reprendre les questions 4 et 5 pour ce nouveau signal. Les résultats de la TFD sont-ils satisfaisants ? Pourquoi ? Quelle condition doit être respectée pour l'analyse d'un spectre de raies par TFD si aucun traitement supplémentaire n'est appliqué au signal ?



. Résultats bruts non satisfaisant. Non respect de la condition  $f_0 = k \cdot f_e / N \Rightarrow$  fuite spectrale, erreur sur l'estimation de la fréquence des raies.

**Question 7 :** On considère toujours le cas  $f_0 = 4,3\text{Hz}$ . On suppose que le dispositif d'acquisition est tel qu'il n'est pas possible d'acquérir plus de  $N = 20$  échantillons et que la fréquence d'échantillonnage est fixée ( $f_e = 20\text{Hz}$ ). On suppose par contre que le DSP dispose de suffisamment de ressource pour pouvoir traiter des tableaux (buffer) de 1024 échantillons.

Quelle technique peut-on utiliser pour augmenter la résolution du calcul de la TFD et obtenir ainsi un résultat satisfaisant ? Expliquer brièvement le principe.

. utilisation de la technique de « zero-padding ». Calcul de la TFD sur plus de  $N$  points en conservant  $N$  échantillons temporels (même fréquence d'échantillonnage, même fenêtre temporelle  $\Rightarrow$  même signal échantillonné). Utilisation d'un buffer de 1024 échantillons dont les  $N$  premières valeurs sont les valeurs échantillonnées, les autres étant égale à zéro. Calcul de la TFD sur ce buffer.

NOM :

Prénom :

**Question 8 :** On considère maintenant le signal suivant :

$$y(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$$

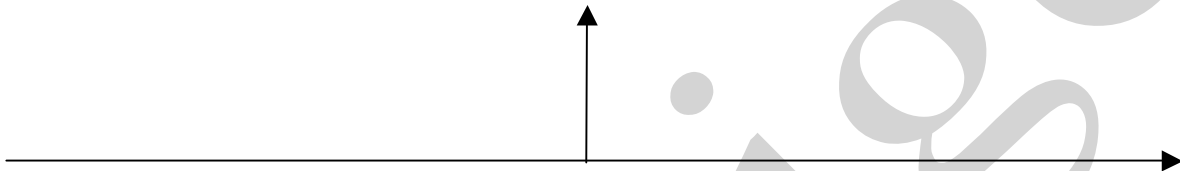
avec :

$$A = 1, B = 0,01$$

$$f_1 = 2\text{Hz}, f_2 = 7\text{Hz}$$

Donner l'expression de  $Y(f) = TF[y(t)]$ . Tracer l'allure du spectre de  $y(t)$  (module uniquement).

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A[\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] + B[\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)]}{2} \\ &= \frac{[\delta(f - 2) + \delta(f + 2)] + 0,01[\delta(f - 7) + \delta(f + 7)]}{2} \end{aligned}$$



**Question 9 :** On applique maintenant au signal  $y(t)$  le traitement décrit dans les questions précédentes (échantillonnage, prélèvement de  $N = 20$  échantillons, calcul de TFD avec la technique de la question 8).

On obtient les échantillons  $Y_N[k]$  par calcul de TFD. Le module de ces échantillons est représenté sur la courbe de la figure1 de l'annexeB (l'échelle des amplitudes est logarithmique).

Commenter l'allure de ce graphique en vous aidant des questions précédentes.

A quelle fréquence correspondent les échantillons  $k=0$  ?  $k=1023$  ?  $k=102$  ?

Pourquoi ne peut-on discerner la raie correspondant à  $f_2$  ?

. Allure en sinus cardinal (provient du fenêtrage) et répétition du spectre (échantillonnage).  
Fréquence  $f = 0 \leftrightarrow k = 0$ ,  $k = 1023 \leftrightarrow f = (1023/1024).f_e$ ,  $k=102 \leftrightarrow f=102*20/1024=2\text{Hz}$ .  
La fenêtre rectangulaire ne possède pas un bon pouvoir de résolution en amplitude à cause de la remontée des lobes secondaires qui masque le lobe principal de la seconde raie.

**Question 10 :** On décide de multiplier les échantillons issus du signal échantillonné par une fenêtre de Blackman avant calcul de la TFD.

Donner le principe d'une opération de fenêtrage. Quel est l'objectif recherché ici lors de l'utilisation de cette fenêtre de Blackman ?

. Principe de fenêtrage : multiplier le signal par une fonction, fenêtre, avant calcul de la TFD afin d'améliorer le pouvoir de détection ou de résolution en amplitude. Blackman  $\rightarrow$  très bon pouvoir de détection : on veut atténuer fortement les lobes secondaires pour pouvoir observer la seconde raie



NOM :

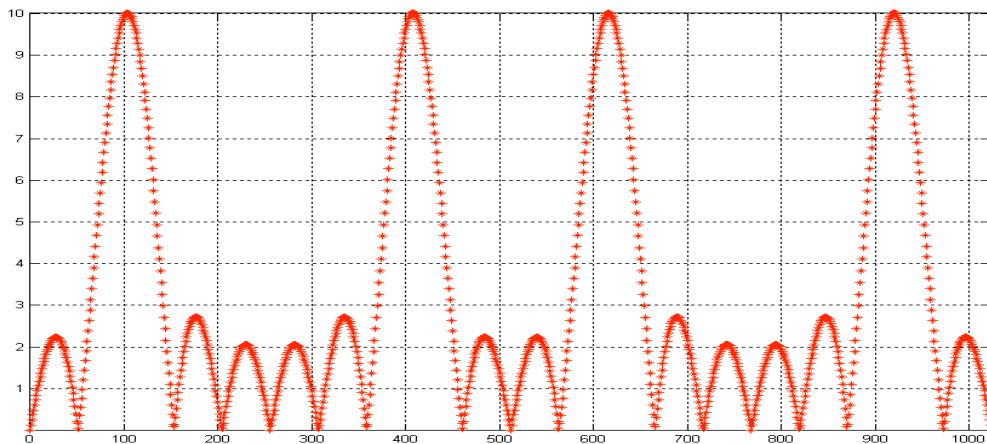
Prénom :

**Question 11 :** La figure 2 représente le module des échantillons  $Y_N[k]$  issu du calcul de la TFD avec fenêtrage. Commenter l'allure du graphique en la comparant à celle du graphique de la figure 1. Quel est l'effet du fenêtrage ?

. On observe 4 lobes (lobes secondaires peu visibles) : ils correspondent bien aux 2 raies spectrales attendues mais largeur de lobe importante due à la fenêtre de Blackman.

**Question 12 :** On considère maintenant le signal  $y(t)$  de la question 8 avec  $f_2 = 12\text{Hz}$  et  $B=1$ . On échantillonne ce signal à travers le même dispositif ( $N = 20$  échantillons,  $f_e = 20\text{Hz}$ ) sans l'opération de fenêtrage.

En vous inspirant des questions précédentes, donner l'allure du spectre du signal échantillonné  $y(t)$ . En observant ce graphique, quelle erreur d'interprétation est-on amené à commettre sur la caractérisation du spectre du signal d'entrée  $y(t)$  ? Pourra-t-on reconstituer correctement le signal  $y(t)$  à partir des échantillons numériques ? Quel phénomène est la cause de ce problème ?



. Repliement spectral car Shannon n'est pas vérifié d'où une erreur d'interprétation : apparition d'une raie en  $f = 8\text{Hz}$ . On pourrait penser que  $x$  est constitué de la somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquence  $f=2\text{Hz}$  et  $f=8\text{Hz}$ . Il est donc impossible de reconstituer correctement le signal.

**Question 13 :** Dans quel dispositif faudrait-il faire passer le signal  $y(t)$  pour éviter le phénomène de la question 12. Donner brièvement les caractéristiques de ce dispositif. Quelle serait alors la conséquence sur le spectre du signal échantillonné ? Donner l'expression du signal que l'on pourrait reconstituer à partir des échantillons numériques.

. Pour respecter Shannon, il faudrait borner le spectre en  $f_c < f_e/2$  à l'aide d'un filtre anti-repliement qui est un filtre passe-bas analogique. L'inconvénient est que l'on perd une partie du signal d'origine (la deuxième raie spectrale). Le signal reconstitué correspond au signal de départ filtré donc  $x_f = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$

NOM :

Prénom :

## Annexe A : Tableau des polynômes de Butterworth

Un filtre de Butterworth est défini par une fonction de transfert de la forme :

$$h(s) = \frac{1}{P(s)} \text{ avec } s = j \cdot \frac{\omega}{\omega_c} \text{ et } \omega_c \text{ pulsation de coupure}$$

P(s) est le polynôme de Butterworth donné par la table suivante en fonction de l'ordre  $n$  du filtre :

| $n$ | $P(s)$  |
|-----|---|
| 1   | $(1 + s)$   |
| 2   | $(1 + 1.414 \cdot s + s^2)$   |
| 3   | $(1 + s) \cdot (1 + 1.000 \cdot s + s^2)$   |
| 4   | $(1 + 1.848 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.765 \cdot s + s^2)$   |
| 5   | $(1 + s) \cdot (1 + 1.618 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.618 \cdot s + s^2)$   |
| 6   | $(1 + 1.932 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.414 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.518 \cdot s + s^2)$   |
| 7   | $(1 + s) \cdot (1 + 1.802 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.247 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.445 \cdot s + s^2)$   |
| 8   | $(1 + 1.962 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.663 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.111 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.390 \cdot s + s^2)$                                 |
| 9   | $(1 + s) \cdot (1 + 1.879 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.532 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.000 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.347 \cdot s + s^2)$                   |
| 10  | $(1 + 1.975 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.782 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 1.414 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.908 \cdot s + s^2) \cdot (1 + 0.313 \cdot s + s^2)$ |

NOM :

Prénom :

## Annexe B : Calcul de TFD

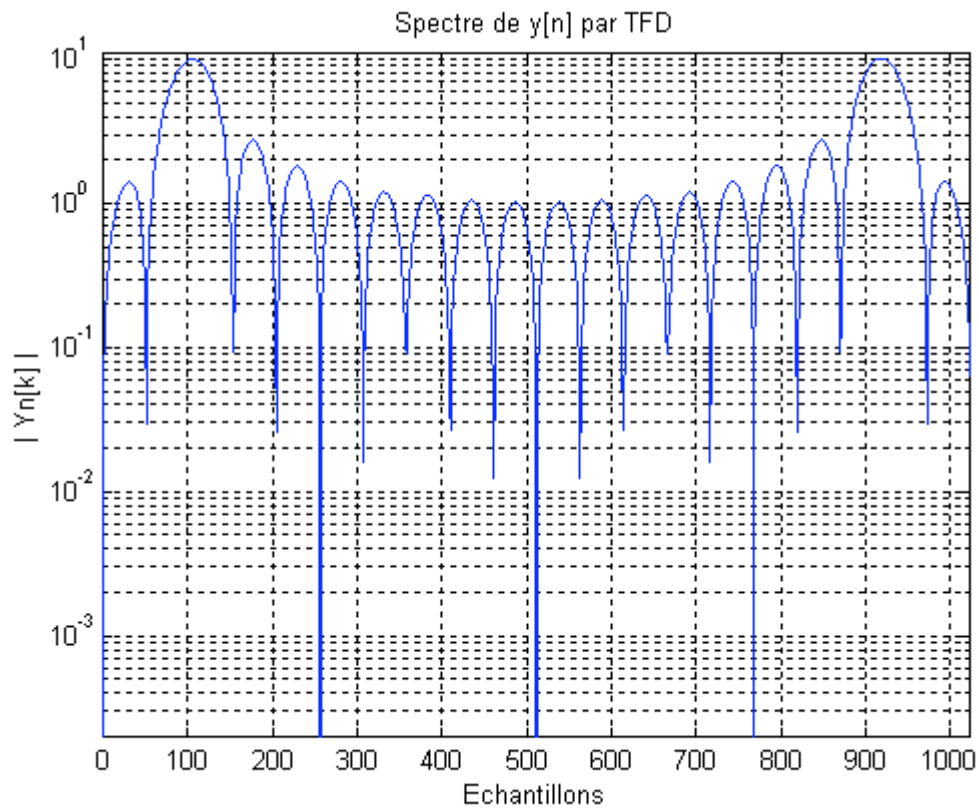


Figure 1

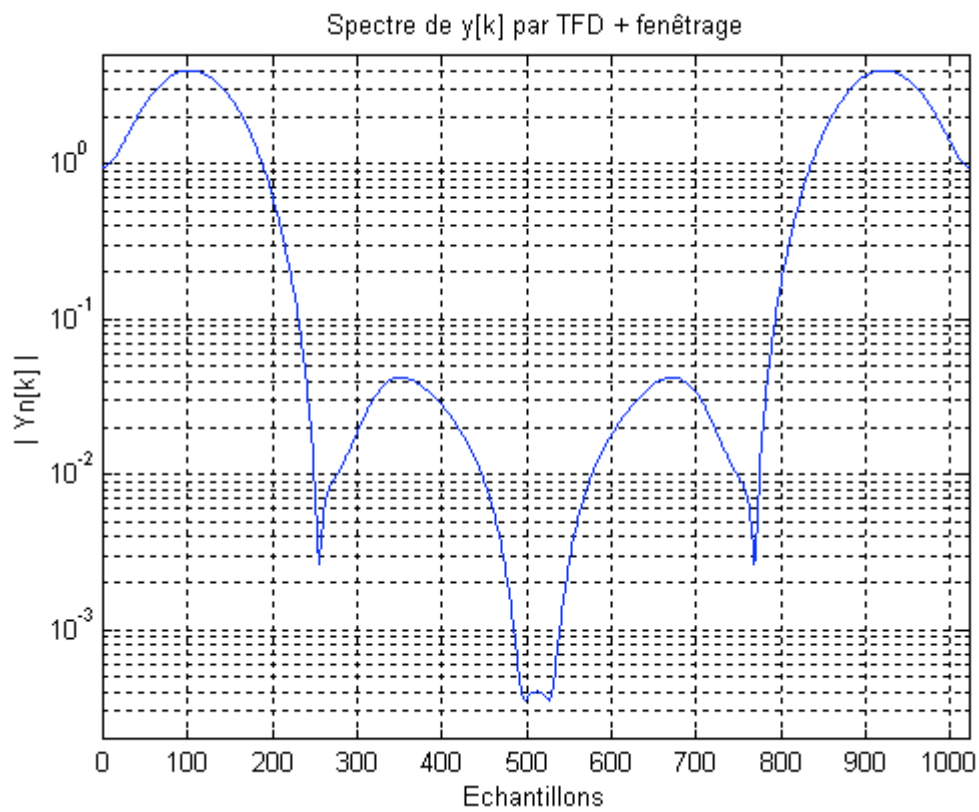


Figure 2

## Annexe B : Formulaire

### I Transformée de Fourier

#### Définition :

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi j \cdot f \cdot t} dt \quad \text{et} \quad x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{2\pi j \cdot f \cdot t} df$$

#### Propriétés :

$$\text{Linéarité : } \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \xleftrightarrow{TF} \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

$$\text{Translation : } x(t - \tau) \xleftrightarrow{TF} e^{-2\pi \cdot j \cdot f \cdot \tau} \cdot X(f)$$

$$\text{Dérivation : } \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \cdot j \cdot f \cdot X(f)$$

$$\text{Intégration : } \int x(t) \cdot dt \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi \cdot j \cdot f} \cdot X(f)$$

$$\text{Dilatation : } x(\lambda \cdot t) \xleftrightarrow{TF} |\lambda|^{-1} \cdot X\left(\frac{f}{\lambda}\right)$$

$$\text{Conjugaison complexe : } \overline{x(t)} \xleftrightarrow{TF} \overline{X(-f)}$$

$$\text{Signaux réels : } X(f) = \overline{X(-f)}$$

### II Echantillonnage et TFD:

Echantillonnage sur une durée finie (période d'échantillonnage  $T_e$ , durée  $\tau$ ) :

$$x_{we}(t) = x(t) \cdot \prod_{T_e}(t) \cdot \prod_{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\text{Calcul de la TFD : } X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k \cdot n}{N}}$$

$$\text{On démontre que : } X_N[k] = X_{we}\left(k \cdot \frac{f_e}{N}\right) \quad \text{avec} \quad f_e = \frac{1}{T_e} \quad \text{et} \quad X_{we}(f) = TF[x_{we}(t)]$$

NOM :

Prénom :

### **III Transformée en z :**

**Définition :**

$$X(z) = TZ(x[k]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].z^{-n} \quad \text{pour } r_1 < |z| < r_2$$

**Transformation inverse :**

$$x[k] = \frac{1}{2.j.\pi} \oint_C X(z).z^{k-1} dz$$

**Théorème des résidus :**

$$x[k] = \sum_i \text{Res}(X(z).z^{k-1}; p_i) \quad \text{avec } p_i, \text{ pôle de } X(z) \text{ à l'intérieur de } C$$

**Propriétés :**

**Linéarité :**  $\alpha.x[k] + \beta.y[k] \xrightarrow{TZ} \alpha.X(z) + \beta.Y(z)$

**Translation :**  $x[k - k_0] \xrightarrow{TZ} z^{-k_0}.X(z)$

**Différentiation :**  $k^p.x[k] \xrightarrow{TZ} \left(-z \frac{d}{dz}\right)^p X(z)$

**Conjugaison complexe :**  $\overline{x[k]} \xrightarrow{TZ} \overline{X(z)}$

**Valeur initiale :**  $x[0] = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$

**Convolution :**  $(x * y)[k] \xrightarrow{TZ} A(z).B(z)$