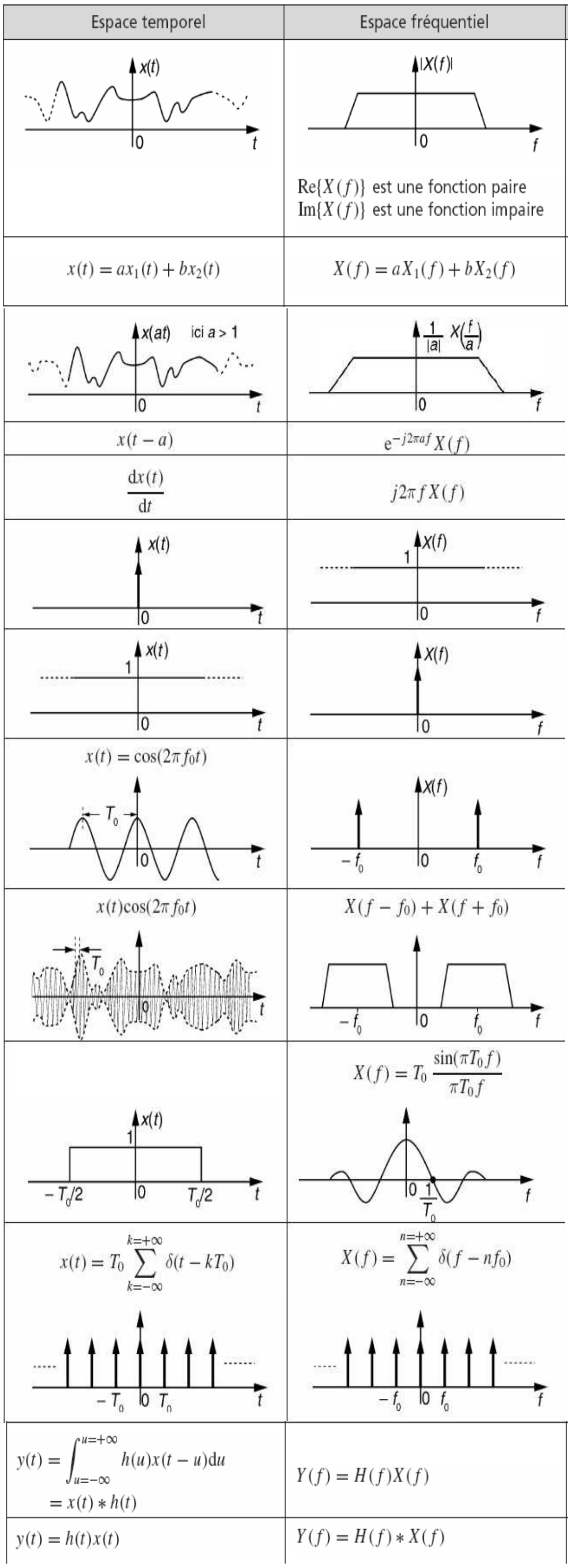
Chapitre 0 : Rappels TF

La transformée de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal:



$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j f t}dt \qquad x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2\pi j f t}df$$

- Linéarité : $ax_1(t)+bx_2(t) \xrightarrow{TF} aX_1(f)+bX_2(f)$
- Décalage temporel : $x(t-t_0) \xrightarrow{TF} X(f)e^{-2\pi j f t0}$
- Décalage fréquentiel : $x(t)e^{2\pi j f 0\, t} \xrightarrow{TF} X(f-f_0)$ (MA)
- Dualité temps-fréq : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \Rightarrow X(t) \xrightarrow{TF} x(-f)$
- Changement d'échelle : $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|}X(f/a)$
- Dérivation : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi\, j\, f)^n X(f)$
- Inversion et conjugaison : $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$; $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$
- Convolution : $x(t)*h(t) \xrightarrow{TF} X(f).H(f)$

<u>TF au sens des distributions</u> Pour les signaux à puissance moyenne finie (Dirac, Echellon, signaux périodiques, etc.),

- Dirac : $\delta(t-t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f t_0} \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \xrightarrow{TF} 1$
- Echelon et signe: $U(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi jf} + \frac{1}{2}\delta(f) \qquad Sgn(f) = \frac{1}{\pi jf}$
- Périodiques : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2\pi j n f_0 t) \xrightarrow{TF} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f-nf_0)$
- Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \xrightarrow{TF} X(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0)$
- $\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0) \qquad \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$

Pour les signaux à énergie finie, $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df$

La densité spectrale d'énergie (DSE) est la TF de l'autocorrélation $S_x(f) = |X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-2\pi j f \tau}d\tau$

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit une densité spectrale de puissance (DSP):

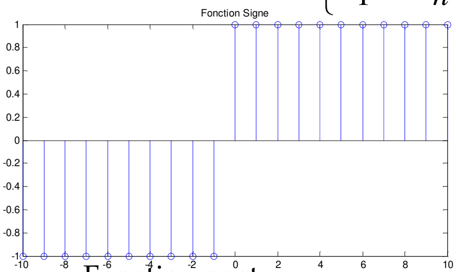
$$P_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X(f)|^2}{T}$$

Chapitre I : Notions de convolution et corrélation

Signaux déterministes à temps discret usuels

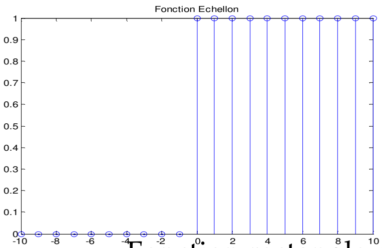
- Fonction signe

$$\mathrm{sgn}(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ -1 & n<0\end{cases}$$



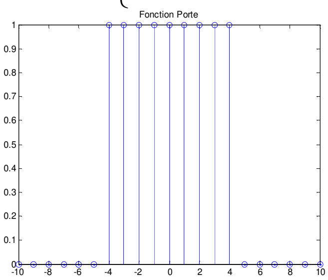
- Fonction échelon (unité)

$$U(n)=\Gamma(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



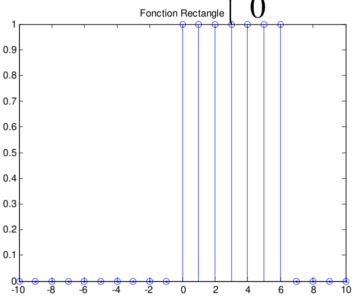
- Fonction porte

$$\underset{N+1}{\Pi}(n)=\begin{cases}1 & -N/2\leq n\leq N/2\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$



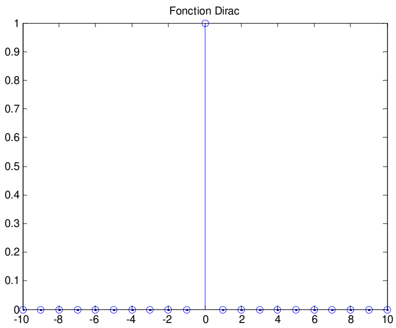
- Fonction réctangle causal

$$rect(n/N)=\begin{cases}1 & 0\leq n\leq N-1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$



- Fonction Dirac (impulsion unité)

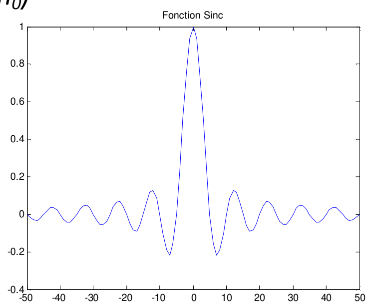
$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}\qquad =U(n)-U(n-1)$$



- $x(n).\,\delta(n-n_0)=x(n_0)\,.\delta(n-n_0)$
- $x(n)*\,\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$

- Fonction sinus cardinal

$$\sin c(\theta n)=\frac{\sin(\pi\theta n)}{\pi\theta n}$$

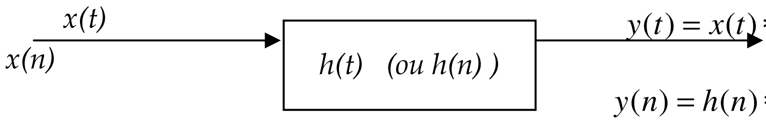


Théorie des systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT) discrets et continus

Linéarité $x_1(t)+\alpha x_2(t)$ ou $x_1(n)+\alpha x_2(n)$ $\longrightarrow$ *Système* $\longrightarrow$ $y_1(t)+\alpha y_2(t)$ ou $y_1(n)+\alpha y_2(n)$

Invariance $x(t-\tau)$ $x(n-m)$ $\longrightarrow$ *Système* $\longrightarrow$ $y(t-\tau)$ $y(n-m)$

Si le système est linéarité et invariant, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle h(t) (*ou* $h(n)$).



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0, alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence f_0. On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.
Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par :

- soit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants: $\sum_{i=0}^{M} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$

- soit par une équation aux différences, pour le cas discret: $\sum_{i=0}^{M} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$,

Stabilité et causalité

Causalité : *h(t) = 0 pour t<0* (*ou h(n) = 0 pour n<0*).

Stabilité : une entrée bornée $\Rightarrow$ la sortie reste bornée $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < M$ (ou $\sum_n |h(n)| < \infty$)

Energie et puissance

Soit un signal x(n) à temps discret à énergie finie $E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ $\Rightarrow$ Puissance nulle

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2.N} \sum_{-N}^{N-1} |x(n)|^2$$ $\Rightarrow$ énergie infinie

Pour un signal périodique $P_x = \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2$ ou $P_x = \frac{1}{2.N} \sum_{-N}^{N-1} |x(n)|^2$

Corrélation et auto-corrélation

La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage.

Signaux à énergie finie $R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-k)$ et périodiques $R_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\, y^*(n-k)$

Auto-corrélation des signaux à EF $R_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n-k)$ et périodiques: $R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\, x^*(n-k)$

Propriétés :

- Pour k= 0, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en k=0

- Si x(n) est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.

- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille 2*N-1

Applications fondamentales des fonctions de corrélation

Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique.

Le rapport signal/bruit SNR_{db}=20 Log(P_S/P_B)

Chapitre II : Rappels sur les variables et vecteurs aléatoires

Variables aléatoires et probabilités

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs *p(x)* ou *prob(x_i)*

$p(A) \overset{déf.}{=} \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{n_A}{N}$ Où *A* un *résultat possible* d'une expérience aléatoire, *N* le *nombre de réalisation* de l'expérience et n_A le *nombre de fois que le résultat A* est apparu

$p(A,B) \overset{déf.}{=} \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$ Où A et B deux événements distincts avec n_{AB} = *nombre de fois que A <u>et</u> B sont apparus*

$$p(A,B) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right) \overset{déf}{=} p(B/A) \cdot p(A)$$

Où *(B/A)* une probabilité conditionnelle c'est la probabilité que *B* ait lieu *sachant que A a eu déjà lieu*.
Si *A* et *B* sont indépendants *p(A/B)=p(A)* de même *p(B/A)=p(B)* d'où *p(A,B)=p(A). p(B)*

VA discrète

– $\sum_i prob(x_i) = 1$

- Fonction de répartition $F_X(x_i) = \text{Prob}(X \le x_i)$

$$F_X(x_i) = \sum_{j=\inf}^{i} \text{Prob}(x_j)$$

VA continue

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

- Fonction de répartition $F(X) = \int_{-\infty}^{X} p(x)dx$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Moments statistiques

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

- VA discrète:

$$moy = \mu_x = E\{x\} = \sum_i^N x_i p(x_i)$$

$$Var = \sigma_x^{\ 2} = E\{(x-\mu_x)^2\} = \sum_i^N (x_i - \mu_x)^2\, p(x_i)$$

$$Var = \sum_i^N x_i^{\ 2} p(x_i) - \mu_x^{\ 2}$$

- VA continue x ∊ [a,b]

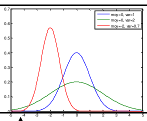
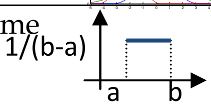
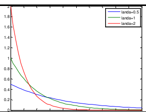
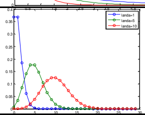
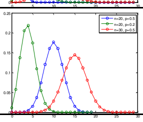
$$moy = \mu_x == E\{x\} = \int_a^b x.p(x)dx$$

$$Var = \sigma_x^{\ 2} = E\{(x-\mu_x)^2\} = \int_a^b (x-\mu_x)^2\, p(x)dx$$

$$Var = \int_a^b x^2 p(x) - \mu_x^{\ 2}$$

Propriétés de l'espérance E{X+Y}=E{X}+E{Y} E{aX}=aE{X} ∀a ∊ R E{a}=a ∀a ∊ R

Lois de probabilité usuelles

Loi Gaussienne 	$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^{\ 2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^{\ 2}}\right)$	μ_x	σ_x^2
Loi uniforme 	$p_X(x) = \frac{1}{b-a}$ *pour* $a \le x \le b$	$\mu_x = \frac{a+b}{2}$	$\sigma_x^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$
Loi exponentielle 	$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$	$\mu_x = 1/\lambda$	$\sigma_x^2 = 1/\lambda^2$
Loi de poisson 	$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\mu_x = \lambda$	$\sigma_x^2 = \lambda$
Loi Binomiale 	$p_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{(n-x)}$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\mu_x = np$	$\sigma_x^2 = np(1-p)$

Théorème central limite et approximations : Chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires, il suit une loi de distribution normale (Gaussienne).

<u>*Vecteurs Aléatoires*</u>

Une variable aléatoire est caractérisée par :

- fonction de répartition conjointe : $F_{X1,X2,\ldots,Xn}(x1, x2, \ldots, xn) = P(X1<x1, X2<x2, \ldots, Xn<xn)$

-densité de probabiltié conjointe : $p_{X1,X2,\ldots,Xn}(x1, x2, \ldots, xn)$ liée par:

$$F_{X1,X2,\ldots,Xn}(x1, x2, \ldots, xn) = \int_{-\infty}^{x1} \ldots \int_{-\infty}^{xn} p_{X1,X2,\ldots,Xn}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

Loi de distribution marginale

$$p_{X1,X2,\ldots,Xm}(x1, x2, \ldots, xm) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X1,X2,\ldots,Xn}(u_1, \ldots u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)\, du_{m+1} \ldots du_n$$

Changements de variables : Soit X une VA continue caractérisée par sa densité de probabilité $p_X(x)$ alors la VA continue Y=f(X) a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y) = |J| \left[p_X(x) \right]_{x=f^{-1}(y)} = \left| \frac{\partial X}{\partial Y} \right| \left[p_X(x) \right]_{x=f^{-1}(y)}$$

Généralisation pour n VA: Soit (X1,X2,…,Xn) un vecteur de VA continue caractérisée par sa densité de probabilité $p_{X1X2\ldots Xn}(x1,x2,\ldots xn)$, alors le vecteur de VA continue(Y1,Y2,…,Yn)=f(X1,X2,…,Xn) a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y1, \ldots, yn) = |J| \left[p_{X1\ldots Xn}(x1, \ldots, xn) \right]_{x1\ldots xn = f^{-1}(y1, \ldots, yn)}$$

avec

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial X1}{\partial Y1} & . & . & \frac{\partial X1}{\partial Yn} \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ \frac{\partial Xn}{\partial Y1} & . & . & \frac{\partial Xn}{\partial Yn} \end{bmatrix}$$

Covariance et coefficient de corrélation $\rho_{x1x2} = C_{x1x2} / (\sigma_{x1}\sigma_{x2})$

$$C_{x1x2} = \sigma_{x1x2} = E\left\{ (x_1 - \mu_{x1})(x_2 - \mu_{x2})^* \right\} = E\left\{ x_1 . x_2^* \right\} - \mu_{x1}\mu_{x2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x1} . \mu_{x2}^*$$

Si X1 et X2 sont indépendants⇒$C_{x1x2}=0$. On dit que les variables sont décorrélées.

Le coefficient de corrélation mesure le degré de dépendance linéaire entre X1 et X2. Pour un vecteur aléatoire

$$C_X = E\left\{ \underline{X}_C . \underline{X}_C^T \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & . & . & C_{1n} \\ C_{21} & \sigma_2^2 & . & . & C_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Cas d'un vecteur aléatoire Gaussien :</u> Un vecteur aléatoire réel de dimension n (X1,…..,Xn) est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de X1,…..,Xn est une variable aléatoire gaussienne réelle

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{\mu}x)^T C_X^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}x)}$$

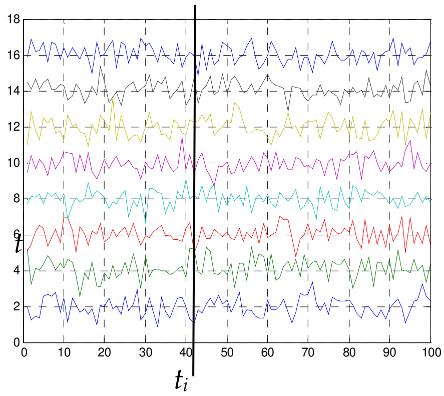
La variable aléatoire : Y $= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k = \alpha^T \underline{X}$ est une variable aléatoire réelle Gaussienne.de moyenne et sa variance qui ont pour expressions respectives :

$$E\{y\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E\{X_k\} = \alpha^T \underline{\mu}_X$$

$$\sigma_y = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \operatorname{cov}\{X_j, X_k\} = \alpha^T C_x \alpha$$

Chapitre III : Processus aléatoires

Un processus aléatoire ne possède pas de représentations temporelles analytiques. Chaque signal aléatoire observé représente une réalisation particulière de ce processus.



- Chaque tracé fournit un signal aléatoire

- à l'instant t_i , le processus se réduit à une v.a x_i dont la densité est $p(x;t_i) = p(x_i)$

- Deux instants t_i et t_j permettent de définir deux variables aléatoires x_i et x_j on peut définir des $p(x;t_i,t_j) = p(x_i,x_j)$

<u>Statistiques de 1^{er} ordre</u>

- *moyenne statistique*: $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x,t_i)dx$

- *variance*: $\sigma_x^2(t_i) = E\{\ x_i - \mu_x(t_i)^2\} = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$ où $E\{x_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x,t_i)dx$ valeur quadratique moyenne

<u>Statistiques de 2^{ème} ordre:</u> 2 instants t_1 et t_2 donc probabilité conjointe.

- Fonction *d'autocorrélation statistique* : $C_x(t_1,t_2) = E\{\ [\ x(t_1) - \mu_x(t_1)] \cdot [\ x(t_2) - \mu_x(t_2)]\ \} = R_x(t_1,t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)$

- Fonction *d'autocovariance statistique* : $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1) \cdot x^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot x_2{}^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2{}^* \cdot p(x_1,x_2;t_1,t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$

Si processus *centrés* ($\mu_x(t)=0$): $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

- Fonction *d'intercorrélation statistique:* $R_{xy}(t_1,t_2) = E\{\ x(t_1) \cdot y^*(t_2)\ \} = E\{\ x_1 \cdot y^*{}_2\ \}$

- Fonction *d'intercovariance statistique* : $C_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_1,t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y{}^*(t_2)$

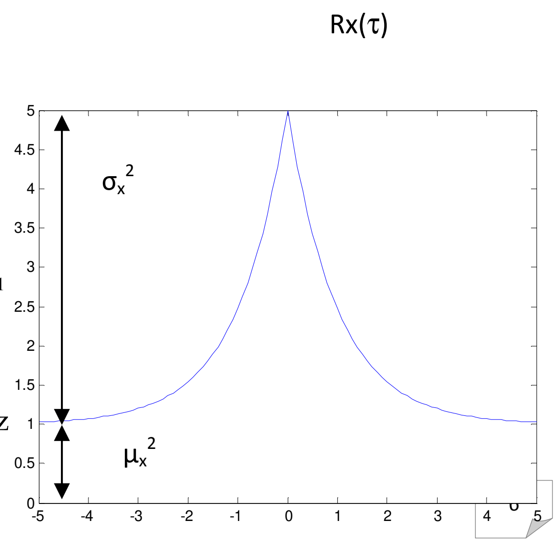
- Le *coefficient de corrélation* est définie par : $\rho_{xy}(t_1,t_2) = \dfrac{C_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$ $\qquad -1 \le \rho_{xy}(t_1,t_2) \le 1$

Processus stationnaires :. Un processus aléatoire est dit stationnaire au *sens strict* lorsque toutes ces caractéristiques statistiques c'est à dire tous ses moments *à tout ordre* sont indépendants de l'origine du temps. $\Leftrightarrow p(x,t_i) = p(x);$ $\mu_x(t_i) = \mu_x$ $R_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$

- Un processus stationnaire est stationnaire d'ordre 1 $\mu_x(t) = \mu_x = cste$ et $\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$

- Un processus stationnaire est stationnaire d'ordre 2 $R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$

<u>Propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL</u>



- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$ et $R_x(0) \ge |R_x(\tau)|$

- $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x{}^2 + \sigma_x{}^2$ $\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)x(t+\tau)\} = \mu_x{}^2$

<u>Cas discret :</u>

$\mu_x(n) = \mu_x = cste \quad et \quad R_x(n_1,n_2) = R_x(k)$ avec $\quad k = n_2 - n_1$

$$R_x(n_1,n_2) = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \ldots\ldots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \ldots\ldots & R_x(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \ldots\ldots & R_x(0) \end{bmatrix}.$$ Matrice de Toeplitz

Bruit blanc : $R_x(\tau)=\sigma_x^2\delta(\tau)$ décorrélé et μ_x=0 $S_x(f)=\sigma_x^2$

Discret : $R_x(k)=\sigma_x^2\delta(k) \quad \Rightarrow R_x(k)=0 \quad pour \quad k\neq 0$ et $\mu_x(k)=0$

Puissance et DSP : $P_X = E(x(t)^2) = R_x(0)=\mu_x{}^2+\sigma_x{}^2 \quad E_X = \int P_X\,dt = \int E(x(t)^2)dt$

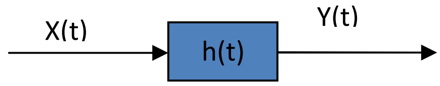
$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi j f\tau}d\tau \qquad P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = R_x(0)$$

Processus ergodiques :Assimiler les résultats obtenus sur une réalisation à ceux obtenus pour un instant donné t_i pour différentes réalisations. Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* lorsque *les valeurs moyennes statistiques et temporelles* sont identiques.

$$\mu_x=\bar{x};\quad R_x(\tau)=\varphi_x(\tau)\cdots \qquad P_x=\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(f)\,df=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_i(t)^2\,dt \quad S_x(f)=TF\{R_x(\tau)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$$

Chapitre IV : Filtrage et modélisation linéaire des signaux aléatoires

Si x(t) est un signal aléatoire SSL, le signal en sortie y(t) est forcément un signal aléatoire SSL avec :



avec $\mu_y(t)=\mu_x H(0) \qquad (f=0)$

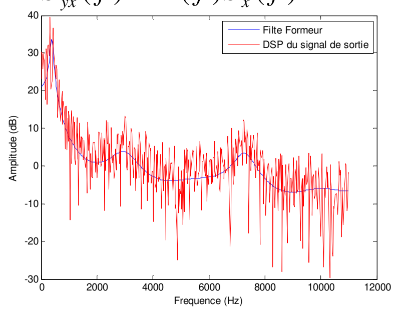
$$S_y(f)=TF(R_y(\tau))=|H(f)|^2 S_x(f)$$

La puissance moyenne du signal de sortie est : $E\{y(t)^2\}=R_y(0)=\int |H(f)|^2 S_x(f)df$

Formule des interférences

$$S_{y1y2}(f)=H_1(f)S_{x1x2}(f)H_2^*(f) \qquad S_{xy}(f)=S_x(f)H^*(f) \quad \text{et} \quad R_{yx}(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)\Rightarrow S_{yx}(f)=H(f)S_x(f)$$

Si le signal en entrée est un bruit blanc b(t) alors $S_y(f)$ = constante $|H(f)|^2$



Filtrage adapté et filtrage optimal

But : Rehausser le signal utile x(t) noyé dans le bruit b(t) SSL : s(t) = x(t)+b(t)

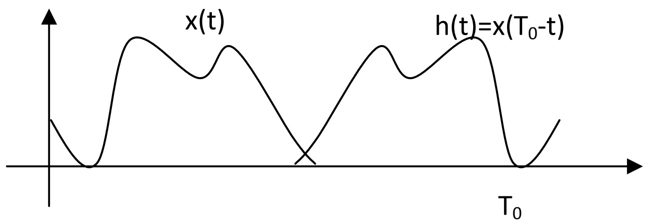
Recherche d'un filtre H(f) qui maximise le SNR à un instant T_0.

$$H(f)_{optimal}=k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0}/S_b(f) \qquad SNR(T_0)_{\max}=\int\frac{|X(f)|^2}{S_b(f)}df$$

Si le bruit b(n) est blanc, filtre adapté:

$$H(f)_{adaptél}=k/\sigma_b{}^2X^*(f)e^{-2\pi jfT0}\Rightarrow \quad h(t)_{adaptél}=k/\sigma_b{}^2x^*(T_0-t)$$

$$SNR(T_0)_{\max}=E_x/\sigma_b^2$$



Application : x(t) signal émis signal reçu *y(t)* bruité atténué (de *a*) et retardé de T_{AR} $y(t) = a.x(t-T_{AR})+b(t)$. $h(t) = x^*(T_0-t)$ alors : $R_{yx}(t-T_0) = a.R_{xx}(t-T_0-T_{AR})+R_{bx}(t-T_0)$ maximum en T_0+T_{AR}

Modèle auto-régressif (AR)

Signaux obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récursif : $H(z) = 1 \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right)$

où x(n) est un bruit blanc $R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$ $\quad y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$

L'obtention des paramètres a_i et σ^2 par la résolution de ces équations :

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \ldots\ldots & R_{yy}(N) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-1) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{yy}(N) & R_{yy}(N-1) & \ldots\ldots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

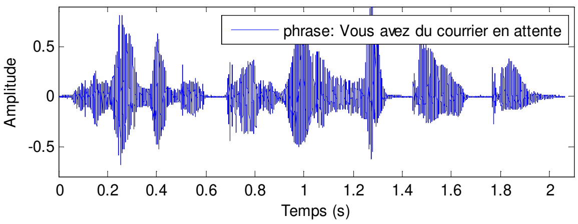
Modèle à moyenne ajustée (MA)

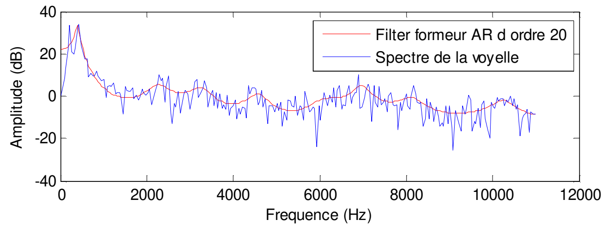
Les signaux à moyenne mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement transverse. $H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$ $\quad y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)$ $\quad \Rightarrow R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

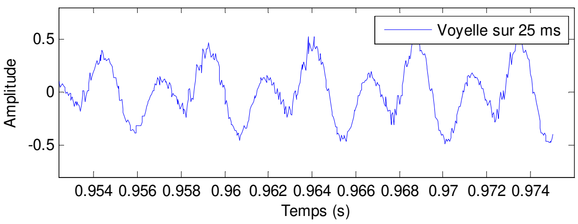
Remarques :

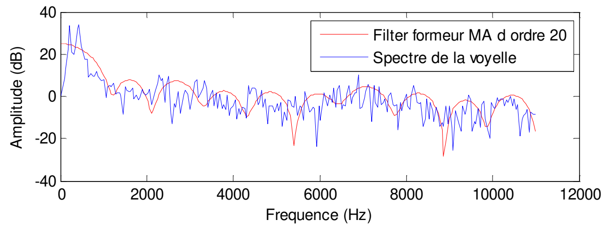
-Equations non linéaires.

- Tout modèle MA peut être identifié à un modèle AR d'ordre infini: $\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$









Modèle ARMA

Ces signaux sont une combinaison des signaux AR et MA $\quad$ Soit $y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \Bigg/ \left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right) \qquad R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$$

Applications: Modélisation, prédiction de série temporelle, estimation du spectre d'un signal aléatoire, etc.

Chapitre V :Notions d'Estimation

L'estimateur $\hat{x}$ a pour biais $b = E\{\hat{x} - x\}$ et pour variance: $\sigma^2 = E\{(\hat{x} - E\{\hat{x}\})^2\} = E\{\hat{x}^2\} - E\{\hat{x}\}^2$

Le biais est la moyenne de l'écart et la variance est la puissance de l'écart (mesure les fluctuations de l'estimateur autour de la valeur souhaité).

Un estimateur est *consistant si* $\lim\limits_{N \to +\infty} b_N = \lim\limits_{N \to +\infty} \sigma_N = 0$

<u>Estimateurs des moyennes statistiques</u>

Soit N échantillons (x_0, x_1, …..,x_n) indépendants et identiquement distribuées (même loi avec même paramètre) d'un signal aléatoire stationnaire

- *Estimation de Moyenne* $\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k$
- *Estimateurs de variance* : $\hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)^2 \qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - \hat{m})^2$

Estimateurs de la corrélation

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k} \qquad \hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k}$$

- *Estimateurs de la densité spectrale*

- périodogramme $\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N}\left|Y(f)\right|^2 \quad$ *avec* $\quad Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi jfk}$

- corrélogramme $\hat{S}_{xx}(k) = TF\left[\hat{R}_{xx}(k)\right]$

- périodogramme moyenné : Séparer le signal en K tranches (de longueur N/K), à calculer le périodogramme sur chaque tranche et à faire la moyenne.

FONCTIONS SIMPLES	DERIVEES	FONCTIONS DE FONCTION	DERIVEES	FONCTIONS DE FONCTION	DERIVEES
$y = x$	$y' = 1$	$y = u$	$y' = u'$	$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
$y = ax$	$y' = a$	$y = a \cdot u$	$y' = a \cdot u'$	$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = ax^m$	$y' = m \cdot ax^{m-1}$	$y = a \cdot u^m$	$y' = m \cdot au^{m-1} \cdot u'$	$y = Log\, x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$y = Log\, ax$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$	$y = \frac{a}{u}$	$y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$	$y = a\, Log\, x$	$y' = \frac{a}{x}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$y = Log\, u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = a\sqrt{x}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$	$y = a \cdot \sqrt{u}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = (\cos u)u'$	$y = a^x$	$y' = a^x Log\, a$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = (-\sin u)u'$	$y = u^x$	$y' = u^x\left(Log\, u + \frac{xu'}{u}\right)$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$y = \mathrm{tg}\, u$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = 1 + \mathrm{tg}^2 u \cdot u'$	$y = \sin^3 x$	$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$
				$y = a\sin^4 bx$	$y' = 4a\sin^3 bx \cdot \cos bx \cdot b$
$y = Arc\sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = Arc\sin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$y = u\cos x$	$y' = u' \cdot \cos x - u\sin x$
$y = Arc\cos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = Arc\cos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$y = a\,\mathrm{tg}^3 x^5$	$y' = a\mathrm{tg}^2 x^5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^5} \cdot 5x^4$
$y = Arc\,\mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = Arc\,\mathrm{tg}\, u$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$y = \log x$	$y' = \frac{1}{x\log 10} = \frac{M}{x}$ $(M = 0{,}43429)$

I) Angles associés :

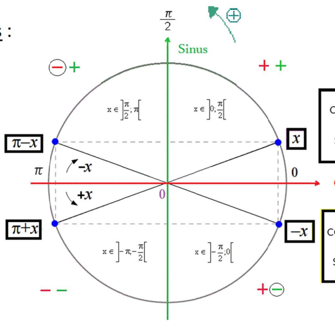
1) Avec π

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ ($\pi - x$)

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ ($\pi + x$)

$\cos(x) = \cos(x)$; $\sin(x) = \sin(x)$ (x)

$\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$ ($-x$)



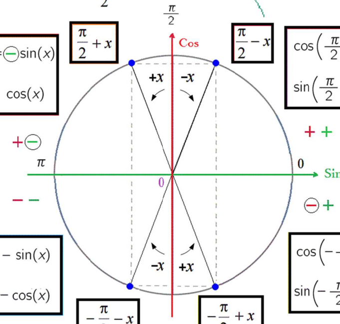
2) Avec $\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ ($\frac{\pi}{2} + x$)

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ ($\frac{\pi}{2} - x$)

$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$ ($-\frac{\pi}{2} - x$)

$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x)$ ($-\frac{\pi}{2} + x$)



II) Formules de base :

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$

$\text{Cosinus} = \frac{\text{côté Adjacent}}{\text{Hypothénuse}}$ → *"cosadjip"*

$\text{Sinus} = \frac{\text{côté Opposé}}{\text{Hypothénuse}}$ → *"sinopip"*

$\text{Tangente} = \frac{\text{côté Opposé}}{\text{côté Adjacent}}$ → *"tanopadj"*

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

III) Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
coco-sisi

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
sico+cosi

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ ♫ Tin Tin

$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ T'1 TinTin ♫

IV) Formules de sommes en produits :

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$

$\tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$

V) Formules de produits en sommes :

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
"coco demi co+co"

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
"sisi demi co-co"

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

VI) Formules de linéarisation :

[cos(a)cos(a)] → $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

[sin(a)sin(a)] → $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

VII) Formules de duplication :

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

VIII) Dérivées : (Cos → - Sin)

$(\cos(x))' = -\sin(x)$; $(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$; $(\sin(u))' = u'\cos(u)$

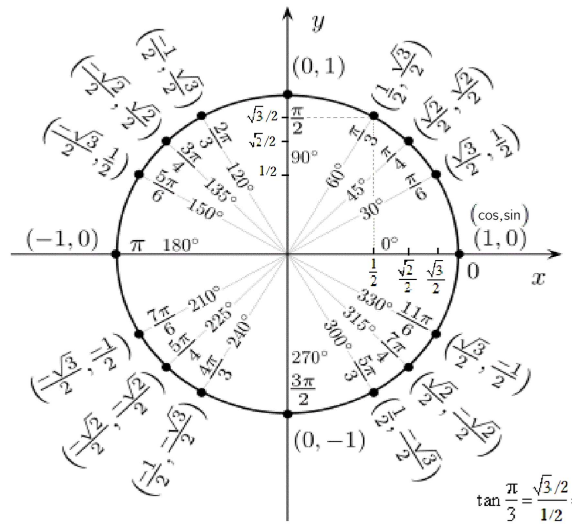
IX) Primitives : (Sin → - Cos)

$\int(\cos(x))dx = \sin(x)$; $\int(\sin(x))dx = -\cos(x)$

$\int(\cos(nx))dx = \frac{\sin(nx)}{n}$; $\int(\sin(nx))dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$

X) Tableau Trigonométrique :

Angle en Degré	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$ *	Non définie	0	0



$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ *