Polycopié du cours : Codage et Théorie de l'information,

3ième Licence, Télécom, ST

Chapitre III : Canal de transmission

Cours 1 et 2 :

Préparé par : Mr Abdenour Hacine Gharbi, enseignant à l'université de Bordj Bou Arréridj

CONTENU DES COURS 1 ET 2:

Définition d'un canal de transmission, modèles, canal discret, canal causal, canal discret sans mémoire, matrice de transition, exemples de canaux, canal binaire symétrique, canal à effacement.

Chapitre III : Canal de transmission

1. INTRODUCTION

La théorie de l'information a été élaborée par C.C Shannon en 1948, pour évaluer principalement les performances limites des systèmes de communications en présence du bruit. Selon le paradigme de Shannon illustré sur la figure (III.1), un système de communication se compose principalement de cinq parties, à savoir: la source, l'émetteur, le canal de transmission, le récepteur et le destinataire.

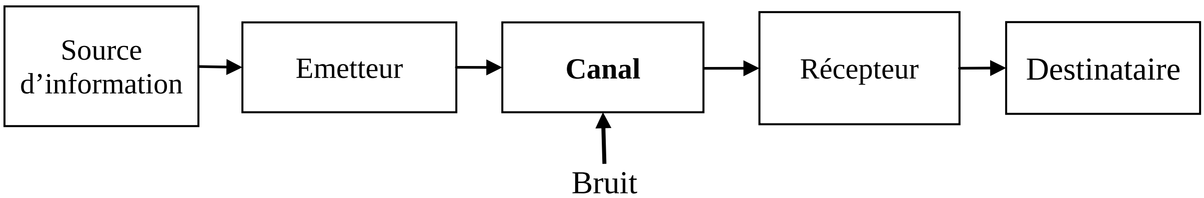

Figure. III.1 : Schéma général d'un système de communication : Paradigme de Shannon

La source d'information génère un message ou une séquence de symboles à transmettre au destinataire à travers le canal de communication qui constitue le lien entre l'émetteur et le récepteur. L'émetteur a pour objectif de produire et d'émettre un signal adapté au canal de transmission, alors que le récepteur permet de capter et de reconstruire le signal transmis. Cependant, la présence du bruit sur un canal de transmission a pour effet de créer une différence entre le message émis et celui reçu, et d'engendrer ainsi des erreurs de transmission. Egalement, cette présence du bruit a pour effet de limiter le débit d'informations que le canal peut supporter. Le débit maximal d'information supporté est appelé la capacité du canal.

En théorie d'information, C.C Shannon a montré qu'il existe toujours un codage permettant de transmettre le message de la source sur le canal de transmission avec une probabilité d'erreur de transmission faible, si la capacité du canal est supérieure à l'entropie de la source (mais sans donner la méthode de construction du code). Cette condition exige de réduire le débit binaire de la source en utilisant un codage de source et de corriger les erreurs de transmission en utilisant un codage de canal. La description du codage de canal est l'objectif du chapitre 4.

Ce chapitre a pour but de définir et de décrire mathématiquement un canal de transmission ainsi que sa caractérisation en théorie de l'information.

2. DEFINITIONS

Un canal de transmission appelé également canal de communication est un support ou milieu de transmission permettant la transition d'un message depuis l'émetteur vers le récepteur. Ce support peut s'agir des lignes filaires, ondes hertziennes ou des câbles de fibre optique. Il permet d'assurer ainsi la liaison entre l'émetteur et le récepteur d'un système de communication.

2.1. CANAL DE TRANSMISSION DISCRET

Un canal de communication a un comportement aléatoire puisque en général il n'est pas possible de connaitre avec certitude quelle sera la séquence de sortie du canal étant donné sa séquence d'entrée. Ainsi, en théorie d'information, un canal est décrit mathématiquement par un modèle probabiliste. Plus particulièrement, un canal discret est un système stochastique en temps discret qui reçoit à son entrée une séquence de symboles définie sur un alphabet fini $\mathcal{L}X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et émet à sa sortie une séquence de symboles définie sur un alphabet fini $\mathcal{L}Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Ainsi, ce système peut être un modèle probabiliste permettant de relier la séquence de sortie et celle de d'entrée par des lois de probabilités conditionnelles :

$$P\left(\mathrm{sy}_1, \mathrm{sy}_2, \dots, \mathrm{sy}_J \setminus \mathrm{sx}_1, \mathrm{sx}_2, \dots, \mathrm{sx}_I\right) \qquad \forall I, J = 1.2, \dots \qquad (III.1)$$

Où $(\mathrm{sy}_1, \mathrm{sy}_2, \dots, \mathrm{sy}_J)$ est la séquence de J symboles de la sortie du canal et $(\mathrm{sx}_1, \mathrm{sx}_2, \dots, \mathrm{sx}_I)$ est la séquence de I symboles de l'entrée du canal. Les symboles sx appartiennent à l'alphabet $\mathcal{L}X$ et les symboles sy appartiennent à l'alphabet $\mathcal{L}Y$.

2.1.1. Canal discret causal

Un canal discret est dit causal si la sortie à tout instant J est conditionnellement indépendante des entrées futures, étant donné les entrées présentes et passées $(i \leq J)$:

$$P\left(\mathrm{sy}_J \setminus \mathrm{sx}_1, \mathrm{sx}_2, \dots, \mathrm{sx}_I\right) = P\left(\mathrm{sy}_J \setminus \mathrm{sx}_1, \mathrm{sx}_2, \dots, \mathrm{sx}_J\right) \qquad \forall J \leq I \qquad (III.2)$$

Un canal discret causal est dit à mémoire finie si la sortie ne dépend que d'un nombre fini de symboles d'entrées passées.

De plus, un canal discret causal est stationnaire si la probabilité conditionnelle de la relation (III.2) reste invariante malgré un décalage dans le temps.

2.1.2. Canal discret sans mémoire

Un canal discret est dit sans mémoire si la sortie à un instant *i* ne dépend qu'à l'entrée à cet instant :

$$P(\mathrm{sy}_i \setminus \mathrm{sx}_1, \mathrm{sx}_2, \dots, \mathrm{sx}_i, \mathrm{sy}_1, \mathrm{sy}_2, \dots, \mathrm{sy}_{i-1}) = P(\mathrm{sy}_i \setminus \mathrm{sx}_i) \qquad \forall i \geq 2 \qquad (III.3)$$

Ce canal est dit stationnaire si la probabilité conditionnelle de la relation (III.3) est invariante avec le temps :

$$P(\mathrm{sy}_k = y \setminus \mathrm{sx}_k = x) = P(\mathrm{sy}_l = y \setminus \mathrm{sx}_l = x) = P(y \setminus x) \qquad \forall k, l = 1.2 \dots \qquad (III.4)$$

Où x et y appartiennent respectivement aux alphabets $\mathcal{L}X$ et $\mathcal{L}Y$.

La probabilité conditionnelle $P\left(y_j \setminus x_i\right)$ est la probabilité conditionnelle d'obtenir y_j en sortie du canal sachant que le symbole x_i est transmis à l'entrée du canal. Cette probabilité est appelée probabilité de transition du canal

L'entrée et la sortie du canal peuvent être modélisées respectivement par les variables X et Y.

Un Canal Discret Sans Mémoire stationnaire CDSM d'une variable aléatoire d'entrée X d'un alphabet de m symboles et d'une variable de sortie Y d'un alphabet de n symboles est décrit par le schéma de la figure (III.2). Les probabilités à priori des symboles d'entrée $P(x_i)$ sont supposées connues.

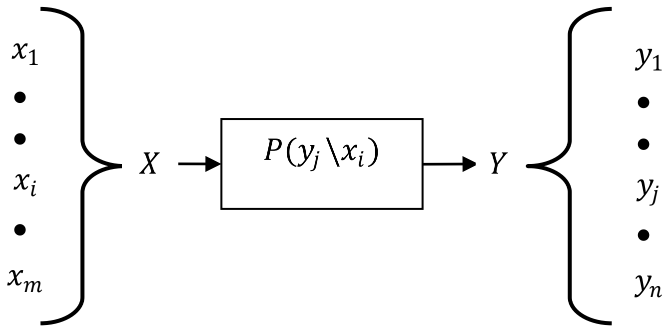

Figure. III.2 : Canal discret sans mémoire

3. Matrice de transition d'un canal de transmission

Un canal CDSM peut être défini complètement par la matrice des probabilités de transition $P(y_j \backslash x_i)$. Cette matrice appelée matrice du canal est donnée comme suit :

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} P(y_1\backslash x_1) & P(y_2\backslash x_1) & \cdots & P(y_n \backslash x_1) \\ P(y_1\backslash x_2) & P(y_2\backslash x_2) & \cdots & P(y_n \backslash x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y_1\backslash x_m) & P(y_2\backslash x_m) & \cdots & P(y_n \backslash x_m) \end{bmatrix} \qquad (III.5)$$

Cette matrice est de dimension $m \times n$. La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est égale à 1 :

$$\sum_{j=1}^{n} P(y_j \backslash x_i) = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, m \qquad (III.6)$$

L'ensemble des probabilités d'entrée peut être représenté par une matrice ligne suivante :

$$[P(X)] = [P(x_1)\ P(x_2) \dots P(x_m)] \qquad (III.7)$$

L'ensemble des probabilités de sortie peut être représenté par la matrice ligne donnée par :

$$[P(Y)] = [P(y_1)\ P(y_2) \dots P(y_n)] \qquad (III.8)$$

Alors, la matrice de sortie peut être obtenue par la relation matricielle suivante:

$$[P(Y)] = [P(X)]\ [P(Y\backslash X)] \qquad (III.9)$$

Si on représente l'ensemble des probabilités d'entrée sous une forme de matrice diagonale :

$$[P(X)]_d = \begin{bmatrix} P(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(x_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(x_m) \end{bmatrix} \qquad (III.10)$$

Alors, la matrice des probabilités conjointes $P(x_i, y_i)$ peut être obtenue par la relation matricielle suivante :

$$[P(X,Y)] = [P(X)]_d \; [P(Y\backslash X)] \qquad (III.11)$$

La probabilité conjointe $P\left(x_i, y_j\right)$ est la probabilité de transmettre le symbole x_i et de recevoir le symbole y_j.

La structure de la matrice de transition permet de caractériser certains types de canaux de transmission particuliers tels que les types: sans perte, déterministe, sans bruit, binaire.

3.1. CANAL DE TRANSMISSION SANS PERTE

Un canal sans perte se caractérise par une matrice de transition dont un seul élément est non nul par colonne.

Exemple (III.1) :

Soit un canal de communication dont la matrice des probabilités de transition est donnée par :

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Supposons que les symboles d'entrée sont équiprobables.

1. Déterminer la matrice des probabilités de sortie $[P(Y)]$.
2. Déterminer la matrice des probabilités conjointes $[P(X,Y)]$.

Solution :

1. L'alphabet d'entrée est constitué de trois symboles équiprobables. Donc, la probabilité d'émission de chaque symbole d'entrée est égale à :

$$P(x_i) = \frac{1}{3} \qquad i = 1, 2, 3$$

Ainsi, la matrice des probabilités d'entrée est donnée par :

$$[P(X)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice des probabilités de sortie est obtenue comme suit :

$$[P(Y)] = [P(X)] \; [P(Y\backslash X)]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2. La matrice des probabilités conjointes est déterminée en utilisant la relation (III.11) :

$$[P(X,Y)] = [P(X)]_d \; [P(Y\backslash X)]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ce canal est de type sans perte.

3.2. CANAL DE TRANSMISSION BINAIRE

Un canal est dit canal binaire si l'alphabet d'entrée et celui de sortie sont constitués chacun de deux symboles.

Exemple (III.2) :

Soit le schéma d'un canal de transmission binaire illustré sur la figure (III.3) :

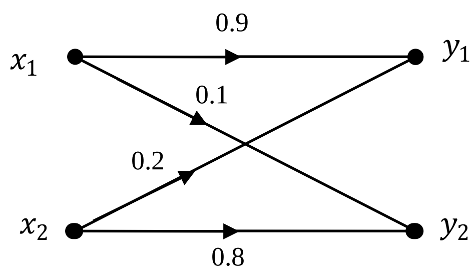

Figure. III.3 : Schéma d'un canal de communication binaire

Où les valeurs 0.9, 0.1, 0.2 et 0.8 représentent respectivement les probabilités de transition $P(y_1 \backslash x_1)$, $P(y_2 \backslash x_1)$, $P(y_1 \backslash x_2)$ et $P(y_2 \backslash x_2)$.

1. Déterminer la matrice de transition du canal.
2. Déterminer la matrice des probabilités de sortie, sachant que $P(x_1)$=0.6.
3. Déterminer la matrice des probabilités conjointes.
4. Calculer la probabilité d'erreur de transmission

Solution :

1. A partir du schéma du canal, la matrice de transition est donnée par :

$$[P(Y \backslash X)] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

2. La matrice des probabilités de sortie est calculée comme suit :

$$[P(Y)] = [P(X)]\,[P(Y \backslash X)]$$

La matrice des probabilités d'entrée est exprimée comme suit :

$$[P(X)] = [P(x_1) \;\; P(x_2)\,]$$

La somme des probabilités $P(x_i)$ est égale à 1 :

$$P(x_1) + P(x_2) = 1$$

Donc, $P(x_2)$ peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} P(x_2) &= 1 - P(x_1) \\ &= 1 - 0.6 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $[P(X)]$ est donnée par :

$$[P(X)] = [0.6\ 0.4]$$

Donc, la matrice $[P(Y)]$ est obtenue par :

$$\begin{aligned} [P(Y)] &= [0.6\ 0.4] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.62\ \ 0.38] \end{aligned}$$

3. La matrice des probabilités conjointes est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} [P(X,Y)] &= [P(X)]_d\ [P(Y\backslash X)] \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.54 & 0.06 \\ 0.08 & 0.32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. La probabilité d'erreur de transmission correspond à l'événement d'envoyer le symbole x_1 et de recevoir le symbole y_2, ou d'envoyer le symbole x_2 et de recevoir le symbole y_1.

   Ainsi la probabilité d'erreur de transmission P_e est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned} P_e &= P(x_1, y_2) + P(x_2, y_1) \\ &= 0.06 + 0.08 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité d'erreur est égale à 0.14.

Il existe plusieurs types de canaux binaires tels que le canal binaire symétrique et le canal binaire à effacement. Ces deux types seront détaillés respectivement dans les sections (III.4) et (III.5).

3.3. CANAL DETERMINISTE

Un canal déterministe possède une matrice dont un seul élément est non nul par ligne.

Exemple (III.3) :

Considérons un canal de transmission dont la matrice des probabilités de transition est donnée par :

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que les 4 symboles de l'alphabet d'entrée sont équiprobables.

1. Quel est le type de ce canal?
2. Déterminer la matrice des probabilités de sortie $[P(Y)]$.

Solution :

1. Ce canal se caractérise par une matrice dont un seul élément est non nul par colonne. Donc, ce canal est un canal déterministe.
2. La matrice des probabilités de sortie est calculée comme suit :

$$[P(Y)] = [P(X)]\ [P(Y\backslash X)]$$

Les symboles de l'alphabet d'entrée sont équiprobables, donc

$$[P(X)] = [0.25\ 0.25\ 0.25\ 0.25]$$

Ainsi, la matrice $[P(Y)]$ est donnée par

$$[P(Y)] = [0.25\ 0.25\ 0.25\ 0.25] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0.25\ 0.5\ 0.25]$$

3.4. CANAL SANS BRUIT

Un canal sans bruit est défini par une matrice carrée dont un seul élément est non nul par ligne et par colonne. La figure (III.4) représente un schéma d'un canal de transmission sans bruit.

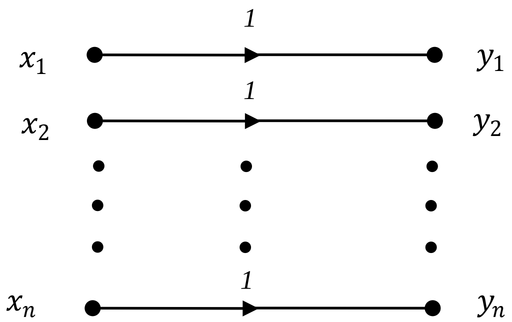

Figure. III.4 : Schéma d'un canal de transmission sans bruit

4. CANAL BINAIRE SYMETRIQUE

Un canal est dit symétrique si la matrice de transition est une matrice carrée égale à sa matrice transposée :

$$P(y_j \backslash x_i) = P(y_i \backslash x_j) \qquad i = 1, \dots, n.\ \ j = 1, \dots, n \qquad (III.12)$$

Un canal binaire symétrique noté par (CBS) est un canal binaire dont la matrice de transition satisfait à la condition (III.12). Le schéma d'un canal CBS est illustré sur la figure suivante :

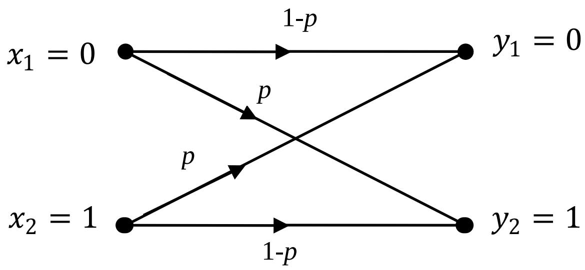

Figure. III.5 : Schéma d'un canal de transmission binaire symétrique

p est appelée probabilité d'erreur du canal ou probabilité de transition.

La matrice d'un canal CBS est donnée comme suit :

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \qquad (III.13)$$

Un canal CBS se caractérise par la probabilité de transition p appelée également probabilité d'erreur du canal.

Exemple (III.4) :

Considérons un canal binaire symétrique dont la matrice des probabilités de transition est donnée par:

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 0.8 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs de a, b et c.
2. Donner la matrice de transition ainsi que le schéma du canal de transmission.
3. Déterminer la matrice des probabilités de sortie, sachant que $P(x_1)$=0.4.
4. Déterminer la probabilité d'erreur de transmission.

Solution:

1. Ce canal est un canal binaire symétrique, donc sa matrice de transition peut s'écrire sous la forme de (III.13):

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.8 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

Ainsi, les valeurs de a, b et c peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{cases} 1-p = 0.8 \\ p = a \\ p = b \\ 1-p = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0.2 \\ a = 0.2 \\ b = 0.2 \\ c = 0.8 \end{cases}$$

Donc, a, b et c prennent respectivement les valeurs 0.2, 0.2 et 0.8.

2. La matrice de transition est donnée comme suit :

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Le schéma du canal est illustré sur la figure (III.6) :

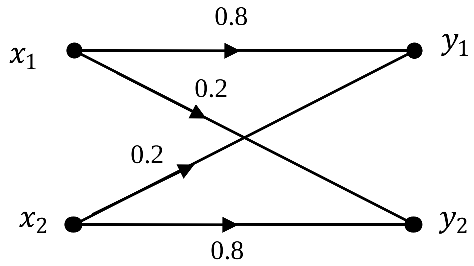

Figure. III.6 : Schéma du canal (CBS)

3. $\mathrm{p}(\mathrm{x}_1) = 0.4$, donc $\mathrm{p}(\mathrm{x}_2) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{x}_1) = 0.6$.

La matrice des probabilités d'entrée est donnée ainsi par :

$$[P(X)] = [0.4\ 0.6]$$

La matrice des probabilités de sortie est calculée en utilisant la relation (III.9) :

$$\begin{aligned}[P(Y)] &= [P(X)]\ [P(Y\backslash X)] \\ &= [0.4\ 0.6] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.44\ 0.56]\end{aligned}$$

4. La probabilité d'erreur de transmission $\mathrm{P_e}$ est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned}P_e &= P(x_1, y_2) + P(x_2, y_1) \\ &= P(x_1)\ P(y_2\backslash x_1) + P(x_2)\ P(y_1\backslash x_2) \\ &= P(x_1)\ p + P(x_2)\ p \\ &= [P(x_1) + P(x_2)]\ p \\ &= p \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Donc, la probabilité d'erreur de transmission d'un canal CBS est égale à p quelque soit la distribution de probabilité de la variable d'entrée X.

5. CANAL BINAIRE A EFFACEMENT

Un canal CBS est un type de canaux à erreur puisque chaque symbole est soit reçu parfaitement, ou soit changé par l'autre symbole de l'alphabet binaire. Dans un canal à erreur, le destinataire ne sait pas les positions d'erreur dans une séquence de symboles reçue (sans codage et décodage du canal).

Un autre type de canaux binaires est appelé le canal à effacement. Dans ce canal, chaque symbole est soit reçu parfaitement ou soit effacé et remplacé par un symbole spécial noté ε par exemple. Le destinataire sait les positions d'effacement dans une séquence de symboles reçue mais ne sait pas les symboles qui correspondent à ces positions.

Le schéma d'un canal à effacement est illustré sur la figure (III.7).

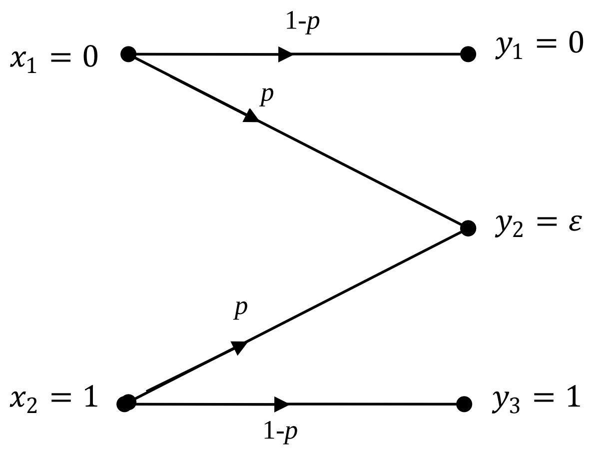

Figure. III.7 : Schéma d'un canal de transmission binaire à effacement

La matrice d'un canal à effacement est donnée comme suit:

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \qquad (III.14)$$

Exemple (III.5) :

Considérons un canal binaire à effacement dont la matrice de transition est donnée par:

$$[P(Y\backslash X)] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Supposons que les symboles d'entrée sont équiprobables.

- Déterminer la matrice des probabilités de sortie,

Solution:

- La matrice des probabilités de transition est calculée comme suit :

$$[P(Y)] = [P(X)]\ [P(Y\backslash X)]$$

$$= [0.5\ 0.5] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [0.45\ \ 0.1\ \ 0.45]$$

Exercices de TD3 :

Exercice N°:1

On considère un canal de transmission binaire représenté sur la figure (III.T1).

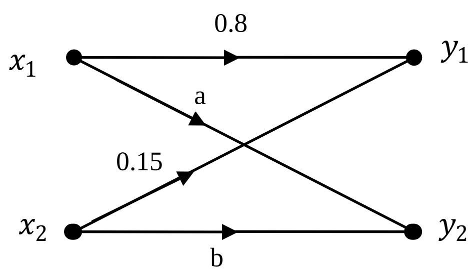

Figure III.T1 : Schéma d'un canal de transmission binaire

1. Déterminer les valeurs de a et b et déduire la matrice de transition de ce canal [P(Y\\X)].
2. Sachant que $p(x_1) = 0.4$.
   - Déterminer la matrice des probabilités de sortie.
   - Déterminer la matrice des probabilités conjointes.
   - Calculer la probabilité d'erreur de transmission.

Exercice N°:2

Considérons deux canaux de transmission binaires connectés en cascade, comme l'illustre la figure suivante:

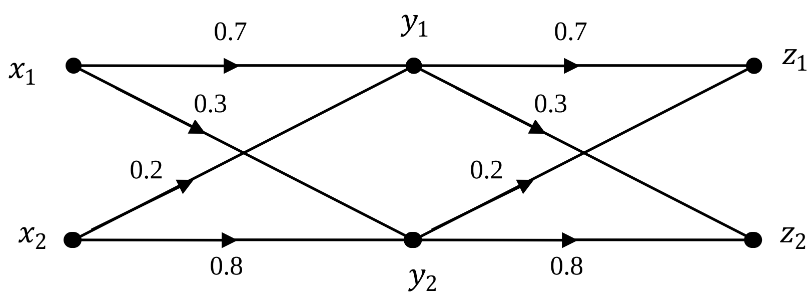

Figure III.T2 : Schéma de deux canaux de transmission connectés en cascade

1. Calculer la matrice de transition [P(Z\\X) du canal de transmission résultant.
2. Tracer le schéma de ce canal.
3. Calculer les probabilités de sorties $p(z_1)$ et $p(z_2)$ lorsque $p(x_1) = p(x_2)$.

Exercice N°:3

Considérons la matrice des probabilités de transition d'un canal de transmission binaire, donnée par :

$$[P(Y \setminus X)] = \begin{bmatrix} 0.9 & a \\ 0.1 & b \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Quel est le type de ce canal?

3. Si $p(x_1) = 0.6$, calculer les probabilités de sortie $p(y_1)$ et $p(y_2)$.
4. Calculer la probabilité d'erreur de transmission.