

Chapitre 1

**GENERAITES ET PARAMETRES
CARACTERISTIQUES DES ANTENNES**

RAPPELS MATHÉMATIQUES

1. Système de coordonnées sphériques

En électromagnétisme, on utilise volontiers les coordonnées sphériques pour représenter un vecteur. Le système est défini par le repère mobile $(o, \hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_\varphi)$ dans la **Figure 1**.

- $\hat{\mathbf{u}}_r$ est parallèle au vecteur \overline{OM} et de même sens que celui-ci.
- $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ est perpendiculaire à $\hat{\mathbf{u}}_r$ dans le plan (MOZ) et son sens est celui de l'angle θ .
- $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$ est perpendiculaire à $\hat{\mathbf{u}}_r$ dans le plan (XOY) et son sens est celui de l'angle φ .
- Le repère mobile est orthonormé.

Les vecteurs éléments de longueur sont :

$$d\mathbf{l}_r = \hat{\mathbf{u}}_r dr \quad d\mathbf{l}_\theta = \hat{\mathbf{u}}_\theta r d\theta \quad d\mathbf{l}_\varphi = \hat{\mathbf{u}}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$

Les vecteurs éléments de surface sont :

$$dS_r = \hat{\mathbf{u}}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad dS_\theta = \hat{\mathbf{u}}_\theta r \sin\theta dr d\varphi \quad dS_\varphi = \hat{\mathbf{u}}_\varphi r dr d\theta$$

L'élément de volume est : $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

2. Transformations vectorielles

Dans ce paragraphe, nous présentons les transformations vectorielles du système rectangulaire (cartésien) vers le cylindrique (et vice-versa), du cylindrique au sphérique (et vice-versa) et du rectangulaire au sphérique (et vice-versa).

2. 1. Passage cartésien \Rightarrow cylindrique

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \hat{\mathbf{x}} \cos\varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin\varphi \\ \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin\varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos\varphi \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

2. 2. Passage cylindrique \Rightarrow cartésien

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi \\ \hat{y} = \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

2. 3. Passage cylindrique \Rightarrow sphérique

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \hat{\rho} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{u}_\theta = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta \\ \hat{u}_\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

2. 4. Passage sphérique \Rightarrow cylindrique

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \hat{u}_r \sin \theta + \hat{u}_\theta \cos \theta \\ \hat{\phi} = \hat{u}_\varphi \\ \hat{z} = \hat{u}_r \cos \theta - \hat{u}_\theta \sin \theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix}$$

2. 5. Passage cartésien \Rightarrow sphérique

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{u}_\theta = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta \\ \hat{u}_\varphi = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

2. 6. Passage sphérique \Rightarrow cartésien

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \hat{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \hat{u}_\varphi \sin \varphi \\ \hat{y} = \hat{u}_r \sin \theta \sin \varphi + \hat{u}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \hat{u}_\varphi \cos \varphi \\ \hat{z} = \hat{u}_r \cos \theta - \hat{u}_\theta \sin \theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix}$$

3. Identités vectorielles

\mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont des fonctions vectorielles, f et g sont des fonctions scalaires

3.1. Addition et multiplication

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|^2$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

3.2. Différentiation

$$\nabla (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla (fg) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$\nabla (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \text{Si } \mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \quad \text{alors :}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x + \hat{y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y + \hat{z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right)$$

3.3. Intégration

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Théorème de divergence (théorème d'Ostrogradsky)

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Théorème de Stokes

4. Opérateurs différentiels

4.1. Coordonnées cartésiennes

Soit f une fonction scalaire des variables spatiales x, y, z : $f = f(x, y, z)$, \mathbf{A} une fonction vectorielle dont les composantes sont fonction des variables spatiales x, y, z ;
 $\mathbf{A} = \hat{x}A_x(x, y, z) + \hat{y}A_y(x, y, z) + \hat{z}A_z(x, y, z)$

Gradient

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Laplacien

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z$$

4. 2. Coordonnées cylindriques

Soit f une fonction scalaire des variables spatiales ρ, φ, z : $f = f(\rho, \varphi, z)$, \mathbf{A} une fonction vectorielle dont les composantes sont fonction des variables spatiales ρ, φ, z ;
 $\mathbf{A} = \hat{\rho} A_\rho(\rho, \varphi, z) + \hat{\phi} A_\varphi(\rho, \varphi, z) + \hat{z} A_z(\rho, \varphi, z)$

Gradient

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

Laplacien

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

4. 3. Coordonnées sphériques

Soit f une fonction scalaire des variables spatiales r, θ, φ : $f = f(r, \theta, \varphi)$, \mathbf{A} une fonction vectorielles dont les composantes sont fonction des variables spatiales r, θ, φ ;
 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{u}}_r A_r(r, \theta, \varphi) + \hat{\mathbf{u}}_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) + \hat{\mathbf{u}}_\varphi A_\varphi(r, \theta, \varphi)$

Gradient

$$\nabla f = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotationnel

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Laplacien

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -J_x \quad (1.a)$$

$$\nabla^2 A_y + \beta^2 A_y = -J_y \quad (1.b)$$

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -J_z \quad (1.c)$$

Où $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ est la constante de propagation.

Les équations précédentes sont identiques dans leurs formes, donc il suffit de résoudre une pour trouver la solution des deux autres. Leur forme est la suivante :

$$\nabla^2 \psi' + \beta^2 \psi' = -J \quad (2)$$

On va d'abord essayer de trouver la solution pour une source ponctuelle de courant, c'est la réponse impulsionnelle unité. Ensuite, la solution générale sera la somme des réponses impulsionnelles des sources ponctuelles pondérées par la distribution des courants \mathbf{J} .

$$\nabla^2 \psi' + \beta^2 \psi' = -\delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (3)$$

δ étant l'impulsion de Dirac.

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{pour } x \neq x_0 \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (6)$$

Pour tout point de l'espace excepté l'origine on a :

$$\nabla^2 \psi' + \beta^2 \psi' = 0 \quad (7)$$

C'est une équation différentielle homogène appelée équation de Helmholtz. A cause de la symétrie sphérique de la source ponctuelle le potentiel ψ' a une symétrie sphérique aussi. Alors on exprime le Laplacien en coordonnées sphérique :

$$\nabla^2 \psi' = \Delta \psi' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \varphi^2} \quad (8)$$

Puisque $\frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} = 0$ on a alors :
 Et l'équation d'onde s'écrit alors :

$$\frac{d^2 \psi'}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi'}{dr} + \beta^2 \psi' = 0 \quad (9)$$

Si on pose $\Phi = r\psi'$ alors :

$$\psi' = \frac{\Phi}{r} \quad (10)$$

$$\frac{d\psi'}{dr} = \frac{r \frac{d\Phi}{dr} - \Phi}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Phi}{r^2} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \psi'}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \left[-\frac{2}{r^3} \Phi + \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} \right] = \frac{2}{r^3} \Phi - \frac{2}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \quad (12)$$

En substituant (10)-(12) dans l'équation d'onde (9), on trouve :

$$\left[\frac{2}{r^3} \Phi - \frac{2}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \right] + \frac{2}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Phi}{r^2} \right] + \beta^2 \frac{\Phi}{r} = 0$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\cancel{\frac{2}{r^3} \Phi} - \cancel{\frac{2}{r^2} \frac{d\Phi}{dr}} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \cancel{\frac{2}{r^2} \frac{d\Phi}{dr}} - \cancel{\frac{2}{r^3} \Phi} + \beta^2 \frac{\Phi}{r} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \beta^2 \frac{\Phi}{r} = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \beta^2 \Phi = 0 \quad (13)$$

La solution de cette dernière équation est très connue :

$$\Phi = c_1 e^{-j\beta r} + c_2 e^{j\beta r} \quad \text{et} \quad \psi' = \frac{\Phi}{r} = c_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} + c_2 \frac{e^{j\beta r}}{r} \quad (14)$$

La solution est composée de deux ondes, une onde $\frac{e^{j\beta r}}{r}$ qui se propage dans une direction qui converge vers la source, elle ne correspond pas au rayonnement de la source, donc cette solution est rejetée. Une deuxième onde $\frac{e^{-j\beta r}}{r}$ qui se propage selon une direction qui diverge à partir de la source. Cette solution correspond à une réalité physique. Alors la solution retenue de (14) est :

$$\psi' = c \frac{e^{-j\beta r}}{r} \quad (15)$$

En évaluant la constante d'intégration c , on trouve :

$$c = \frac{1}{4\pi} \quad (16)$$

$$\psi' = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (17)$$

Si la source se situe en un point arbitraire, alors on doit calculer la distance R entre la source et le point d'observation P. En modifiant la notation

$$\psi' = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \quad (18)$$

Si on considère la source de courant comme la somme de sources ponctuelles pondérées par la distribution J_z , la réponse A_z est donc la somme (l'intégrale) des réponses aux sources ponctuelles.

$$A_z = \iiint_V J_z \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dv' \quad (19)$$

Des équations similaires sont obtenues pour les composantes x et y du potentiel. La solution globale est :

$$\mathbf{A} = \iiint_V \mathbf{J} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dv' \quad (20)$$

C'est la solution de l'équation d'onde de \mathbf{A} ;

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \quad (21)$$

Le champ électromagnétique est déterminé alors par :

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (22)$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) & \text{si on est dans la région du source} \\ \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} & \text{si on est loin de la région du source} \end{cases} \quad (23)$$

Note sur l'appellation « Potentiel retardé »

En physique, on utilise parfois la notion de potentiel, c'est-à-dire un champ scalaire ou vectoriel pour décrire les effets d'une quantité physique, comme par exemple le champ électrique. Cependant, les effets d'un tel objet ne sont pas immédiats : si on peut négliger la propagation dans de nombreuses applications, on doit, dans d'autres, introduire la notion de **potentiels retardés**. Par exemple, le potentiel vecteur dont découle le champ magnétique est, dans l'approximation magnétostatique, calculé par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (24)$$

Si on prend en compte l'effet de la propagation des champs, à la vitesse de la lumière C , on a l'expression suivante :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\exp(j\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/C))}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (25)$$

C'est l'équation (20) en ajoutant le terme de la variation temporelle harmonique $\exp(j\omega t)$ et en

remplaçant $\beta = \frac{\omega}{C}$ et $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Ces potentiels retardés sont importants, notamment lorsqu'on modélise des systèmes par des dipôles électriques ou magnétiques, dont la radiation (rayonnement) crée des ondes électromagnétiques : on ne peut légitimement plus négliger le temps de propagation des champs à distance.

I.1.2. Condition de Lorentz

I.1.4. Rayonnement du dipôle électrique (doublet électrique)

Définition

Le doublet électrique est un conducteur de longueur l beaucoup plus petite que la longueur d'onde λ ($l \ll \lambda$) correspondant au courant I qui le parcourt.

Considérons un élément de courant infinitésimal de longueur $l = \Delta z$ le long de l'axe z centré à l'origine. Cet élément a une amplitude I constante (car $\lambda \gg \Delta z$)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{z}} I \delta(x') \delta(y') \text{rect}_{\Delta z}(z') \quad (26)$$

Où rect et U sont, respectivement la fonction rectangulaire définie par :

$$\text{rect}_{\Delta z}(z') = \begin{cases} 1 & \text{si } |z'| \leq \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & \text{si } |z'| > \frac{\Delta z}{2} \end{cases} \quad (27)$$

Calculons le vecteur potentiel \mathbf{A} .

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = \iiint_V \hat{\mathbf{z}} I \delta(x') \delta(y') \text{rect}_{\Delta z}(z') \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \\
&= \hat{\mathbf{z}} I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') dy' \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\Delta z}(z') dz' = \hat{\mathbf{z}} I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} [1][1] \left[\int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} dz' \right] = \hat{\mathbf{z}} I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{z}} I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z = A_z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{avec} \quad A_z = I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z
\end{aligned} \tag{28}$$

Calcul de H

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A_z \hat{\mathbf{z}})$$

Selon l'identité vectorielle $\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$, on écrit :

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A_z \hat{\mathbf{z}}) = (\nabla A_z) \times \hat{\mathbf{z}} + A_z (\nabla \times \hat{\mathbf{z}}) = (\nabla A_z) \times \hat{\mathbf{z}} \quad \text{car} \quad \nabla \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H} = (\nabla A_z) \times \hat{\mathbf{z}} \tag{29}$$

Calculons le gradient ∇A_z en coordonnées sphériques.

$$\nabla A_z = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad \text{car} \quad \nabla A_z \text{ ne dépend que de } r.$$

$$\begin{aligned}
\nabla A_z &= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial A_z}{\partial r} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial}{\partial r} \left[I \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z \right] = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right] = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{4\pi} \left[\frac{-j\beta r e^{-j\beta r} - e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \\
&= -\hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\nabla A_z = -\hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \tag{30}$$

Substituant (30) dans (29), on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= (\nabla_{\perp}) \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{z}} \\
&= -\frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \hat{\mathbf{u}}_r \times (\hat{\mathbf{u}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta) \\
&= -\frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \cos \theta (\hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta (\hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_\theta) \\
&= \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi \\
&= \frac{I\Delta z}{4\pi r} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_\varphi j \frac{I\beta\Delta z}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \quad (31)$$

Calcul de E

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \left\{ \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \right\} = \frac{I\Delta z}{4\pi j\omega\epsilon} \nabla \times \left\{ \hat{\mathbf{u}}_\varphi \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \right\}$$

Sachant que :

$$\nabla \times \mathbf{V} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(V_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Alors :

$$\mathbf{E} = \frac{I\Delta z}{4\pi j\omega\epsilon} \left\{ \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(V_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \right\}$$

Avec pour notre cas :

$$\begin{cases} V_r(r, \theta, \varphi) = 0 \\ V_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ V_\varphi(r, \theta, \varphi) = \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{V} &= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (V_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} \\
&= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \sin \theta \right) \right] - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \right) \\
&= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin^2 \theta \right) \right] - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left[j\beta e^{-j\beta r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right] \sin \theta \right) \\
&= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[j\beta e^{-j\beta r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right] \\
&= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] 2 \sin \theta \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \sin \theta \left[\beta^2 e^{-j\beta r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \\
&= \hat{\mathbf{u}}_r \frac{2}{r} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \left[\beta^2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \sin \theta
\end{aligned}$$

Et en substituant dans (31), on trouve :

$$\mathbf{E} = \frac{I \Delta z}{4\pi j \omega \epsilon} \left\{ \hat{\mathbf{u}}_r \frac{2}{r} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \left[\beta^2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \sin \theta \right\}$$

Ou

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{2\pi j \omega \epsilon} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{I \Delta z}{4\pi j \omega \epsilon} \left[\beta^2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \sin \theta$$

Finalement, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} s'écrivent :

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{I \Delta z}{2\pi j \omega \epsilon} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{I \Delta z}{4\pi j \omega \epsilon} \left[\beta^2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \sin \theta \quad (32)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_\varphi \frac{I}{4\pi} \Delta z \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta \quad (33)$$

I.1.5. Rayonnement à grande distance (champs rayonnés lointains)

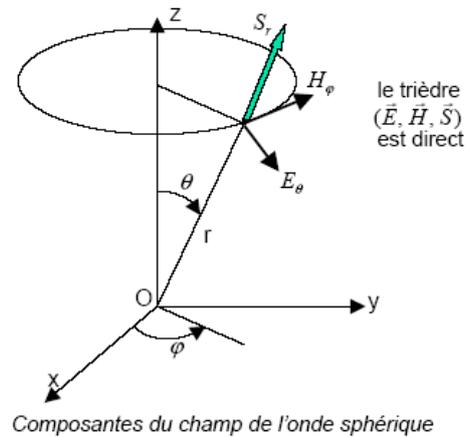
Nous venons de montrer qu'un petit élément conducteur de longueur Δz , parcouru par un courant alternatif de pulsation ω , crée dans l'espace à la distance r de l'origine, un champ magnétique et un champ électrique, dont les composantes sont données par les deux relations ci-dessus. Les termes qui contiennent la variable r indiquent le comportement des champs en fonction de la distance.

En s'éloignant de la source, les termes en $1/r^2$ et $1/r^3$ peuvent être ignorés devant les termes en $1/r$: c'est l'hypothèse du « champ lointain ». Dans cette région, les champs ont pour expressions approchées

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_\theta j \omega \mu \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta = E_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (34)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_\varphi j \beta \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta = H_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (35)$$

Ce sont les champs d'un dipôle électrique à grande distance.



On définit l'impédance caractéristique du milieu η par :

$$\eta = \frac{|E_\theta|}{|H_\phi|} = \left| \frac{j\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta}{j\beta \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta} \right| = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Si le milieu est l'air libre, alors :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi \approx 377 \Omega$$

On observe à grande distance de la source un effet de propagation radiale (suivant la coordonnée r) que traduit la présence du terme $e^{-j\beta r}$. L'expression (32) montre que l'amplitude de la composante E_r tend vers zéro beaucoup plus vite que les autres composantes du champ. Par conséquent le champ lointain possède essentiellement une composante électrique et une composante magnétique, toutes deux transverses à la direction de propagation :

- Elles sont de plus orthogonales et se propagent en phase,
- Le rapport de leurs amplitudes est constant et égal à η .

(Voir figure droite ci-dessus)

Ces équations décrivent une onde sphérique de type TEM, émise par une source quasi ponctuelle qui est en fait une antenne élémentaire.

I.1.6. Diagramme de rayonnement

C'est une représentation graphique des propriétés de rayonnement (champs lointains). Si on prend une sphère de rayon fixe r , alors sur la surface de cette sphère le champ $\mathbf{E} = E_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta$ varie en fonction de θ comme $\sin\theta$ donc n'importe quel plan qui contient l'axe (OZ) a le même diagramme de rayonnement car dans l'expression des champs, il n'y a pas une dépendance de φ . Un tel diagramme est appelé **diagramme de rayonnement du plan E**, car il contient le vecteur \mathbf{E} . Le diagramme dans un plan perpendiculaire au plan E (dans ce cas c'est le plan (XOY)) est nommé le **diagramme dans le plan H**, car il contient le vecteur \mathbf{H} .

Nous avons :

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_{\theta} j\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta$$

En amplitude

$$|\mathbf{E}_{\theta}| = \omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{1}{r} \sin\theta \quad (36)$$

Si l'on fixe r , alors :

$$|\mathbf{E}_{\theta}| = K \sin\theta \quad (37)$$

Les amplitudes des champs étant proportionnelles à $\sin\theta$, le champ rayonné est maximum dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) et s'annule le long de l'axe du dipôle ($\theta = 0$). Pour tracer le diagramme de rayonnement, on va normaliser $|\mathbf{E}_{\theta}|$ comme suit :

$$\frac{|\mathbf{E}_{\theta}|}{E_{\max}} = f(\theta) = \sin\theta \quad (38)$$

$f(\theta)$ est la **fonction caractéristique** de l'antenne.

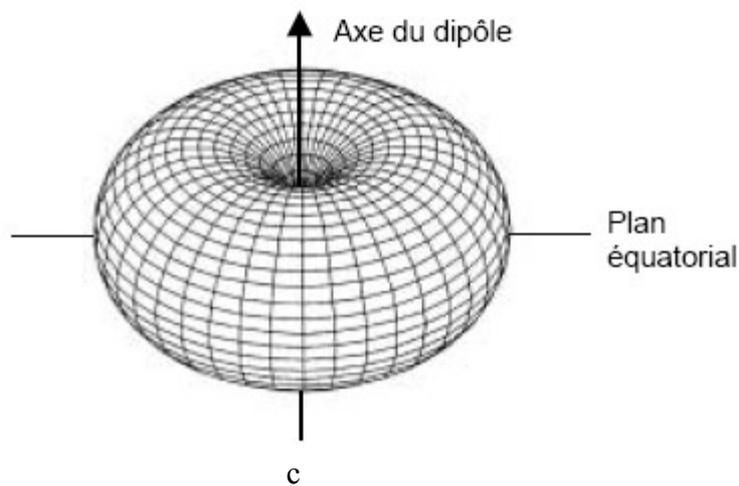
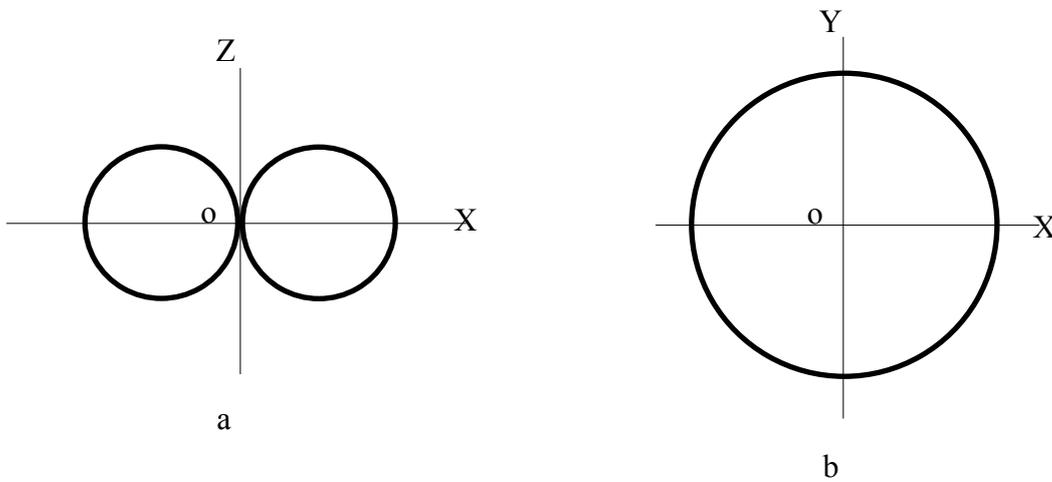


Diagramme de rayonnement d'un dipole électrique.

- Diagramme dans le plan E
- Diagramme dans le plan H
- Diagramme tridimensionnel

I.1.7. Puissance rayonnée

C'est à travers le mécanisme de résistance de rayonnement que la puissance est transformée d'une onde guidée en une onde libre dans l'espace. Pour calculer la résistance d'entrée pour une antenne sans pertes, le vecteur de Poynting \mathbf{W} est formé en terme des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} rayonnés par l'antenne. En intégrant le vecteur de Poynting sur une surface fermée (généralement une sphère de rayon constant), la puissance totale est trouvée. La partie réelle de cette puissance est reliée à la résistance d'entrée.

Pour le dipôle infinitésimal le vecteur complexe de Poynting est défini par :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}(E_r \hat{\mathbf{u}}_r + \hat{\mathbf{u}}_\theta E_\theta) \times (\hat{\mathbf{u}}_\varphi H_\varphi)^* = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{u}}_r E_\theta H_\varphi^* - \hat{\mathbf{u}}_\theta E_r H_\varphi^*) = \hat{\mathbf{u}}_r W_r + \hat{\mathbf{u}}_\theta W_\theta \quad (39)$$

Avec :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I \Delta z}{2\pi j \omega \epsilon} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \cos \theta = -j \frac{I \Delta z}{2\pi \omega \epsilon} [1 + j\beta r] \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \cos \theta = -j \frac{I \Delta z}{2\pi \omega \epsilon} \left[\frac{1}{r} + j\beta \right] \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \cos \theta \\ &= \frac{I \Delta z}{2\pi \omega \epsilon r^2} \left[-j \frac{1}{r} + \beta \right] e^{-j\beta r} \cos \theta = \frac{I \beta \Delta z}{2\pi \omega \epsilon r^2} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \cos \theta = \eta \frac{I(\Delta z) \cos \theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \\ E_r &= \eta \frac{I(\Delta z) \cos \theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \end{aligned} \quad (40.a)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{I \Delta z}{4\pi j \omega \epsilon} \left[\beta^2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} - j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^3} \right] \sin \theta = j \frac{I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon} \left[\beta^2 - j\frac{\beta}{r} - \frac{1}{r^2} \right] \frac{e^{-j\beta r}}{r} \\ &= j \frac{I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon r} \beta^2 \left[1 - j\frac{1}{\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right] e^{-j\beta r} = j\eta \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right] e^{-j\beta r} \\ E_\theta &= j\eta \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{(\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} \end{aligned} \quad (40.b)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{I \Delta z}{4\pi} \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \sin \theta = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left[j\beta + \frac{1}{r} \right] \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta = j \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \\ H_\varphi &= j \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \end{aligned} \quad (40.c)$$

Les composantes radiale W_r et transverse W_θ du vecteur de Poynting sont données par :

$$W_r = \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* \quad (41.a)$$

$$W_\theta = -\frac{1}{2} E_r H_\varphi^* \quad (41.b)$$

Calculons les expressions de W_r et W_θ .

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* = \frac{1}{2} \left[j\eta \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{(\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} \right] \cdot \left[j \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \right]^* \\ &= \frac{1}{2} j\eta \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} (-j) \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{(\beta r)^2} \right] \left[1 - \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} e^{j\beta r} \\ &= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\beta I \Delta z}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] \left[1 - \frac{1}{j\beta r} \right] - \frac{1}{(\beta r)^2} \left[1 - \frac{1}{j\beta r} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{I \Delta z}{2\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[1 + \frac{1}{(\beta r)^2} - \frac{1}{(\beta r)^2} + \frac{1}{j(\beta r)^3} \right] \\ &= \frac{\eta}{8} \left(\frac{I \Delta z}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right] \\ W_r &= \frac{\eta}{8} \left(\frac{I \Delta z}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right] \end{aligned} \quad (42.a)$$

$$\begin{aligned} W_\theta &= -\frac{1}{2} E_r H_\varphi^* = -\frac{1}{2} \left[\eta \frac{I(\Delta z) \cos \theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \right] \cdot \left[j \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \right]^* \\ &= -\frac{1}{2} \eta \frac{I(\Delta z) \cos \theta}{2\pi r^2} (-j) \frac{\beta I(\Delta z) \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] \left[1 - \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} e^{j\beta r} \\ &= j\eta \frac{\beta (I \Delta z)^2 \cos \theta \sin \theta}{16\pi r^3} \left[1 + \frac{1}{(\beta r)^2} \right] \\ W_\theta &= j\eta \frac{\beta (I \Delta z)^2 \cos \theta \sin \theta}{16\pi r^3} \left[1 + \frac{1}{(\beta r)^2} \right] \end{aligned} \quad (42.b)$$

La puissance complexe se déplaçant dans la direction radiale est obtenue en intégrant l'équation (39) sur une sphère fermée de rayon r . Donc elle peut être exprimée par :

$$P = \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\hat{\mathbf{u}}_r W_r + \hat{\mathbf{u}}_\theta W_\theta) \cdot \hat{\mathbf{u}}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Qui se réduit à :

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{W}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\eta}{8} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \right] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{\eta}{8} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\eta}{8} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\
&= \frac{\pi\eta}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi\eta}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\
&= \frac{\pi\eta}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta (-\sin \theta) d\theta \right] \\
&= \frac{\pi\eta}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \left\{ \left[-\cos \theta \right]_0^\pi + \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \right\} \\
&= \eta \frac{\pi}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \left\{ 2 - \frac{2}{3} \right\} = 120\pi \frac{\pi}{4} \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| \frac{4}{3} \\
P &= 40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left| 1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right| = P_{rad} + j2\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_E)
\end{aligned} \tag{43}$$

P = Puissance dans la direction radiale

P_{rad} = Puissance moyenne rayonnée

\bar{W}_m = Densité d'énergie magnétique moyenne dans la direction radiale

\bar{W}_E = Densité d'énergie électrique moyenne dans la direction radiale

$2\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_E)$ = Puissance imaginaire (réactive) dans la direction radiale

La composante transverse \bar{W}_θ de la densité d'énergie ne contribue pas à l'intégrale.

A partir de (43) :

$$P_{rad} = 40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 \tag{44}$$

I.1.8. Résistance de rayonnement

L'antenne rayonne sa puissance réelle à travers la résistance de rayonnement, pour le dipôle infinitésimal elle est obtenue en égalisant (44) à

$$P_{rad} = 40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} R_r I^2 \tag{45}$$

Où $P_{rad} = 40.\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} R_r I^2$ est la résistance de rayonnement. Equation (45) donne :

$$R_r = 80.\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad (46)$$

Pour que une antenne filaire soit considérée comme un dipôle infinitésimal, il faut que sa longueur soit très petite (généralement $\Delta z \leq \lambda/50$).

Exemple

Trouver la résistance de rayonnement d'un dipôle infinitésimal dont la longueur est $\Delta z = \lambda/50$.

Solution

En utilisant l'équation (45), on trouve :

$$R_r = 80.\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 = 80.\pi^2 \left(\frac{\lambda}{50\lambda} \right)^2 = 80.\pi^2 \left(\frac{1}{50} \right)^2 = 0.316 \Omega$$

Puisque la résistance de rayonnement du dipôle est approximativement 0.3Ω , elle présente une grande désadaptation lorsqu'elle est connectée à des lignes de transmission dont la plupart possède une impédance caractéristique de 50Ω et 75Ω . Le rendement de l'antenne sera très faible.

Paramètres caractéristiques des antennes

Définition

Les antennes sont des dispositifs qui ont pour fonction de transformer les ondes guidées en des ondes qui se propagent dans l'espace libre et réciproquement de capter des ondes de l'espace libre pour les conduire vers des circuits. Ce sont des adaptateurs entre l'espace et les circuits.

Paramètres caractéristiques d'une antenne

Pour décrire les performances d'une antenne, on doit donner les définitions des différents paramètres :

- **Diagramme de rayonnement** : C'est une fonction mathématique ou une représentation graphique des propriétés de rayonnement de l'antenne en fonction des coordonnées spatiales. On distingue : diagramme isotropique, directionnel et omnidirectionnel.

Antenne isotrope : C'est une antenne fictive qui rayonne dans toutes les directions de la même façon.

Antenne directive : C'est une antenne qui privilège le rayonnement des ondes électromagnétiques dans des directions bien définies par rapport à d'autres.

Un exemple d'une antenne qui a un rayonnement directionnel est illustrée dans la figure suivante.

On constate que ce diagramme est non directionnel dans le plan azimutal (équatorial, $f(\varphi)$, $\theta = \pi/2$) et directionnel dans le plan élévation ($g(\theta)$, $\varphi = \pi/2$). Ce type de diagramme est appelé omnidirectionnel et il est défini comme une antenne qui a un diagramme de rayonnement non directionnel dans un plan donné et directionnel dans un plan orthogonal.

Lobes d'un diagramme de rayonnement : Les différentes parties d'un diagramme de rayonnement sont connues sous le nom de lobes. Ces dernières sont classées en lobe principal et lobes secondaires.

Lobe principal : Le lobe principal est un lobe qui contient la direction du rayonnement maximal.

Lobes secondaires : Ce sont toutes autres lobes autre que le lobe principal

Intensité de rayonnement

L'intensité de rayonnement dans une direction donnée est définie comme la puissance rayonnée par une antenne par unité d'angle solide.

L'angle solide : Un stéradian est l'angle solide sous lequel un observateur en un point O (centre d'une sphère de rayon r) voit une surface r^2 . Comme la surface d'une est $4\pi r^2$, donc il y a 4π stéradians pour voir toute la surface d'une sphère.

Pour voir l'élément dS , il nous faut $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ avec $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ alors : $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

La puissance moyenne rayonnée par une antenne est donnée par :

$$P_{rad} = \Re \left[\iint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} \right] = \iint_S \mathbf{W}_{m\varphi} \cdot d\mathbf{S} \quad (47)$$

Où $\mathbf{W}_{m\varphi}$: la densité de puissance moyenne rayonnée (vecteur de Poynting)

$$W_{moy} = \frac{1}{2} \Re e [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \quad (48)$$

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \iint_S \Re e [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot d\mathbf{S} \quad (49)$$

$$U(\theta, \phi) = \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{W_{moy} dS}{d\Omega} = \frac{W_{moy} dS}{dS/r^2} \quad \text{alors :}$$

$$U(\theta, \phi) = r^2 W_{moy} \quad \text{avec : } U \text{ en Watt et } W_{moy} \text{ en Watt/m}^2 \quad (50)$$

U est reliée aussi au champ électrique lointain par :

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} \left[|E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right] \approx \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta^0(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi^0(r, \theta, \phi)|^2 \right] \quad (51)$$

Où : $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$ champ électrique lointain $= \mathbf{E}^0(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{r}$

E_θ, E_ϕ : composantes du champ lointain. η : impédance caractéristique du milieu.

La puissance totale rayonnée est obtenue en intégrant l'intensité de rayonnement à travers l'angle solide :

$$P_{rad} = \iint_{\Omega} U d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (52)$$

Pour une source isotropique : $U(\theta, \phi) = U_0 = C^{te}$ et $P_{rad} = \iint_{\Omega} U_0 d\Omega = U_0 \iint_{\Omega} d\Omega = 4\pi U_0$

$$U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (53)$$

I.1.9. Gain

C'est le quotient entre l'intensité de rayonnement suivant une direction donnée est l'intensité de rayonnement qu'on aurait obtenu si la puissance d'entrée de l'antenne est rayonnée de façon isotrope.

$$G(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{\frac{1}{4\pi} \text{Puissance totale à l'entrée de l'antenne}}$$

$$G(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{\frac{1}{4\pi} P_{in}} \quad (54)$$

On définit l'efficacité de rayonnement e (rendement) tel que :

$$P_{rad} = eP_m \quad (55)$$

$$G(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{\frac{1}{4\pi} \frac{P_{rad}}{e}} = e \left[4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \right] = eD(\theta, \phi)$$

Alors :

I.1.10. Directivité

C'est le quotient de l'intensité de rayonnement suivant une direction donnée et la valeur moyenne des intensités de rayonnement. La directivité est définie aussi comme étant égale à la puissance totale rayonnée divisée par 4π . Autrement dit, la directivité est le quotient de l'intensité de rayonnement suivant une direction donnée est l'intensité de rayonnement de l'antenne isotrope. D'où

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_0} = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} \quad (56)$$

Pour une antenne isotrope : $U(\theta, \phi) = U_0$, alors :

$$D(\theta, \phi) = \frac{U_0}{U_0} = 1$$

Remarque :

Pour une antenne sans pertes d'énergie, le gain et la directivité sont confondus ($e = 1$).

Pour le dipôle infinitésimal, nous avons :

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \quad \text{avec} \quad U(\theta, \phi) = r^2 W_{moy} \quad \text{et} \quad W_{moy} = \frac{1}{2} \Re e \left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right] = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{2\eta} |E_\theta|^2$$

Selon l'équation (36), on a : $|\mathbf{E}_\theta| = \omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi r} \sin\theta$

$$U(\theta, \phi) = r^2 W_{moy} = \frac{1}{2\eta} r^2 |E_\theta|^2 = |\mathbf{E}_\theta|^2 = \frac{1}{2\eta} r^2 \left[\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi r} \sin\theta \right]^2$$

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2\eta} \left[\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \right]^2 \sin^2\theta$$

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \quad \text{et selon l'équation (44), on a :} \quad P_{rad} = 40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2. \quad \text{Alors :}$$

$$\begin{aligned}
D(\theta, \phi) &= 4\pi \frac{\frac{1}{2\eta} \left[\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \right]^2 \sin^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2} = 4\pi \frac{\frac{1}{2 \times 120\pi} \left[2\pi \frac{C}{\lambda} 4.7 \times 10^{-7} \frac{I\Delta z}{4\pi} \right]^2 \sin^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2} \\
&= 4\pi \frac{1}{2 \times 120\pi} \frac{\left[2\pi \frac{3 \times 10^8}{\lambda} 4.7 \times 10^{-7} \frac{I\Delta z}{4\pi} \right]^2 \sin^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2} = \frac{1}{2 \times 30} \frac{\left[2\pi \frac{3 \times 10^8}{\lambda} 4.7 \frac{I\Delta z}{4\pi} \right]^2 \sin^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I\Delta z}{\lambda} \right)^2} \\
&= \frac{1}{60} \frac{\left[2\pi \times 3 \times 10^8 \right]^2 \sin^2 \theta}{40\pi^2} = \frac{1}{60} \frac{3600}{40} \sin^2 \theta = \frac{3600}{2400} \sin^2 \theta = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \\
D(\theta, \phi) &= \frac{3}{2} \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

A directivité sera alors lorsque $|\sin \theta| = 1$ et on obtient : $D_0 = \frac{3}{2}$

Ouverture à 3 dB (Half Power Band Width ; HPBW)

Dans un plan qui contient la direction maximale de rayonnement, l'angle entre les deux directions dans lesquelles l'intensité de rayonnement est la moitié du maximum de l'intensité de rayonnement est appelée ouverture à 3 dB.

Longueur effective d'une antenne

Une antenne en réception est utilisée pour capter les ondes électromagnétiques et extraire à partir de ces ondes de la puissance. On définit alors la longueur effective d'une antenne pour calculer la tension induite sur les terminaux du circuit ouvert de l'antenne. On définit le vecteur longueur effective \mathbf{l}_e comme suit :

$$\mathbf{l}_e(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{u}}_\theta I_\theta(\theta, \phi) + \hat{\mathbf{u}}_\phi I_\phi(\theta, \phi) \quad (57)$$

Le champ lointain est relié à \mathbf{l}_e par :

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_\theta E_\theta + \hat{\mathbf{u}}_\phi E_\phi = -j\eta \frac{\beta I}{4\pi r} \mathbf{l}_e e^{-jkr} \quad (58)$$

La tension induite en circuit ouvert est donnée par :

$$V_{oc} = \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{l}_e \quad (59)$$

$V_{oc} = \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{l}_e$: Tension du circuit ouvert

\mathbf{E}_t : Champ électrique incident

l_e : Vecteur longueur effective.

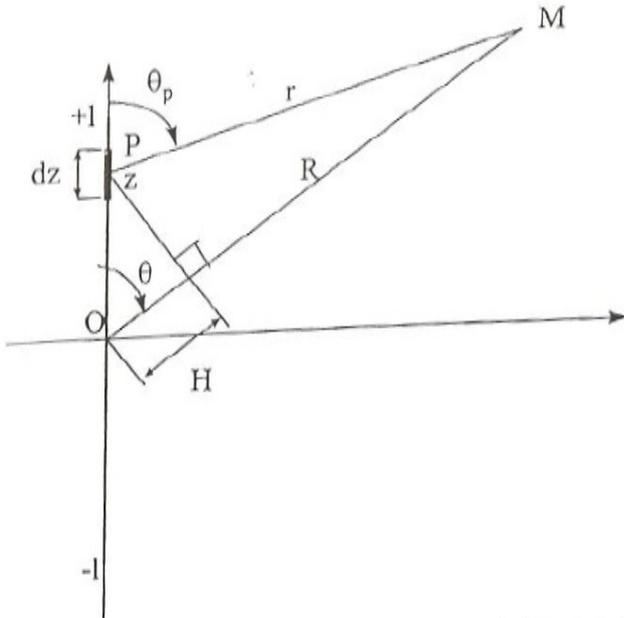
Chapitre 2

ANTENNES FILAIRES

ANTENNE DIPOLE DE LONGUEUR ARBITRAIRE

Soit un dipôle de longueur $2l$ orienté selon l'axe oz . Son rayonnement est calculé en considérant qu'il est composé d'une infinité de doublets alignés et de longueur élémentaire dz donc très faible devant la longueur d'onde λ .

Chaque doublet placé au point de cote z est parcouru par un courant $I(z)$ supposé constant le long du doublet.



r et R désignent respectivement les distances PM et OM .

O : l'origine de l'espace.

P : le centre de l'antenne, point où se trouve la source élémentaire ou encore le doublet.

M : le point d'observation où sera calculé le champ rayonné à grande distance.

R et r seront alors considérés très grands devant la longueur d'onde λ .

On rappelle l'expression du champ donnée par :

$$E_M(\theta) = \frac{jIl \sin \theta}{2 \epsilon_0 c R \lambda} e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}}$$

Or

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Donc

$$E_M(\theta) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{jIl \sin \theta}{2 R \lambda} e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}} = 120 \pi \frac{jIl \sin \theta}{2 R \lambda} e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}} = 60 \pi \frac{jIl \sin \theta}{R \lambda} e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}}$$

Ainsi, le champ élémentaire rayonné par le doublet situé au point P est donné par la relation suivante :

$$d E_M(\theta) = j 60 \pi \frac{I(z) dz}{\lambda r} \sin \theta e^{-j 2 \pi \frac{r}{\lambda}} \hat{u}_\theta$$

Le champ total rayonné $E_M(\theta)$ est alors donné par :

$$E_M(\theta) = \int_{z=-l}^{+l} d E_M(\theta) = \frac{j 60 \pi}{\lambda} \int_{z=-l}^{+l} \sin \theta I(z) \frac{e^{-j k r}}{r} \hat{u}_\theta dz$$

avec

$$k = \frac{2 \pi}{\lambda}$$

Comme la notion de diagramme de rayonnement n'a de sens que si l'onde rayonnée est sphérique, il faudra alors faire apparaître dans l'expression du champ rayonné $\frac{e^{-j k R}}{R}$. Ce champ peut être donné par une expression de la forme suivante :

$$E_M(\theta) = f(\theta) \frac{e^{-j k R}}{R}$$

Il s'agit bien dans ce cas d'une onde sphérique dont le centre de phase se trouve au centre géométrique de l'antenne. Comme r et R sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2 R z \cos \theta$$

Nous pouvons alors écrire :

$$r = R \sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - 2 \frac{z}{R} \cos \theta}$$

Soit en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{z}{R}$:

$$r = R \left[1 - \left(\frac{z}{R}\right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta) + O\left(\left(\frac{z}{R}\right)^3\right) \right]$$

Dans la fonction à intégrer pour le calcul du champ total rayonné par le dipôle, l'erreur maximale en confondant r à R dans le terme $\frac{1}{r}$ est $\frac{1}{R}$. Dès que R est supérieur à 10 fois la longueur de l'antenne $2l$, cette erreur est inférieure à $1/20$.

Dans le terme de phase $e^{-j k r}$, l'erreur commise doit être négligeable devant λ . Nous écrivons dans ce cas : $r = R - z \cos \theta$; et l'erreur maximale sur la phase est alors donnée par : $2 \pi l^2 / \lambda 2 R$.

Si l'on suppose que cette erreur est négligeable tant qu'elle reste inférieure à $\pi/8$, la distance R doit être telle que :

$$R > 8 \frac{l^2}{\lambda}$$

Cette distance correspond à la limite de la zone de rayonnement à grande distance. Compte tenu de ces différentes approximations relatives au rayonnement à grande distance, le champ total rayonné par le dipôle est alors donné par :

$$E_M(\theta) = E_M(\theta) \hat{u}_\theta = \hat{u}_\theta \frac{j60\pi}{\lambda} \sin\theta \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{z=-l}^{+l} I(z) e^{jkz \cos\theta} dz$$

Si nous considérons que le dipôle de longueur $2l$ est parcouru par un courant identique à celui sur une ligne ouverte sans pertes, ce courant est alors donné par :

$$I(z) = I_0 \sin[k(l - |z|)]$$

Nous montrons alors que le champ total rayonné par ce dipôle est donné par :

$$E_M(\theta) = \frac{j60\pi}{\lambda} \sin\theta \frac{e^{-jkR}}{R} 2I_0 \int_{z=0}^{+l} \sin[k(l - |z|)] e^{jkz \cos\theta} dz$$

La fonction caractéristique de rayonnement en champ est alors :

$$f(\theta) = \left| \frac{E_M(\theta)}{E_M\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)} \right| = \left| \frac{\cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda} \cos\theta\right) - \cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)\right) \sin\theta} \right|$$

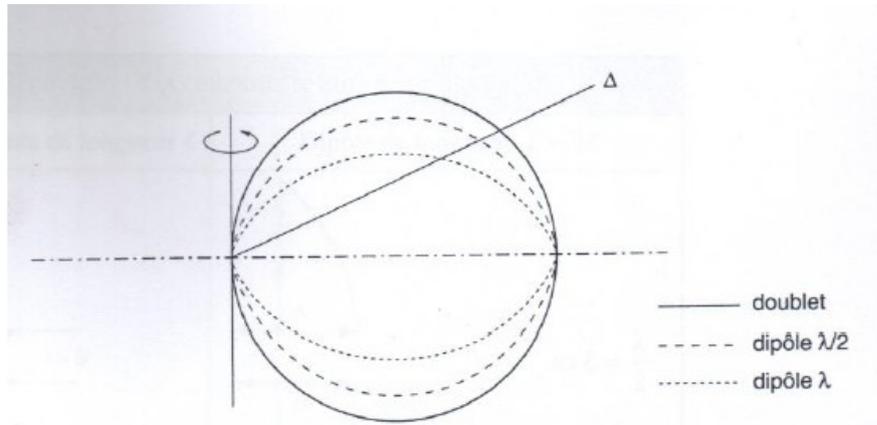
En particulier

- cas du dipôle demi-onde : $2l = \lambda/2$, on a :

$$f(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|$$

- cas du dipôle onde entière : $2l = \lambda$, on a :

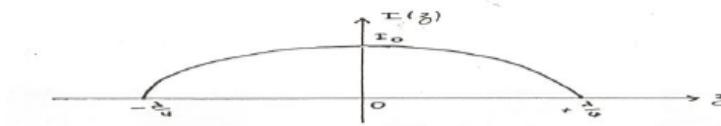
$$f(\theta) = \frac{1}{2} \left| \frac{\cos(\pi \cos\theta) + 1}{\sin\theta} \right| = \left| \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|$$



Comparaison des diagrammes de rayonnement en champ d'un doublet, d'un dipôle $\lambda/2$ et d'un dipôle λ pour $0 \leq \theta \leq \pi$

Cas du dipôle demi-onde

La longueur du fil est $2l = \frac{\lambda}{2}$ et la répartition du courant est la suivante :



L'expression donnant ce courant est : $I(z) = I_0 \cos(2\pi \frac{z}{\lambda})$. Le champ

électrique rayonné est alors donné par : $E(\theta) = j60 \frac{I_0}{R} e^{-jkr} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$. (à

calculer en TD)

La fonction caractéristique de rayonnement en champ vaut alors :

$$f(\theta) = \frac{\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right|}{|\sin\theta|}$$

Le maximum de rayonnement est donc obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, soit dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'antenne.

Le gain du dipôle demi-onde est calculé à partir de la relation suivante :

$$G = \frac{4\pi R^2 P_{\max}}{\iint_S P(\theta, \varphi) ds}$$

Comme : $|E(\theta, \varphi)| = 60 \frac{I_0}{R} e^{-jkr} \frac{\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right|}{|\sin\theta|}$, et comme

$P(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{1}{120\pi} |E|^2(\theta, \varphi)$ alors la densité de puissance moyenne $P(\theta, \varphi)$ est

$$\text{donnée par : } P(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{1}{120\pi} \left(60 \frac{I_0}{R} \right)^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Le gain du dipôle est alors donné par :

$$G = \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} d\theta} = \frac{2}{1,22} = 1,64 \quad (\text{à calculer en TD})$$

Ce gain est légèrement supérieur à celui du doublet de Hertz.

La résistance de rayonnement R_r est donnée par :

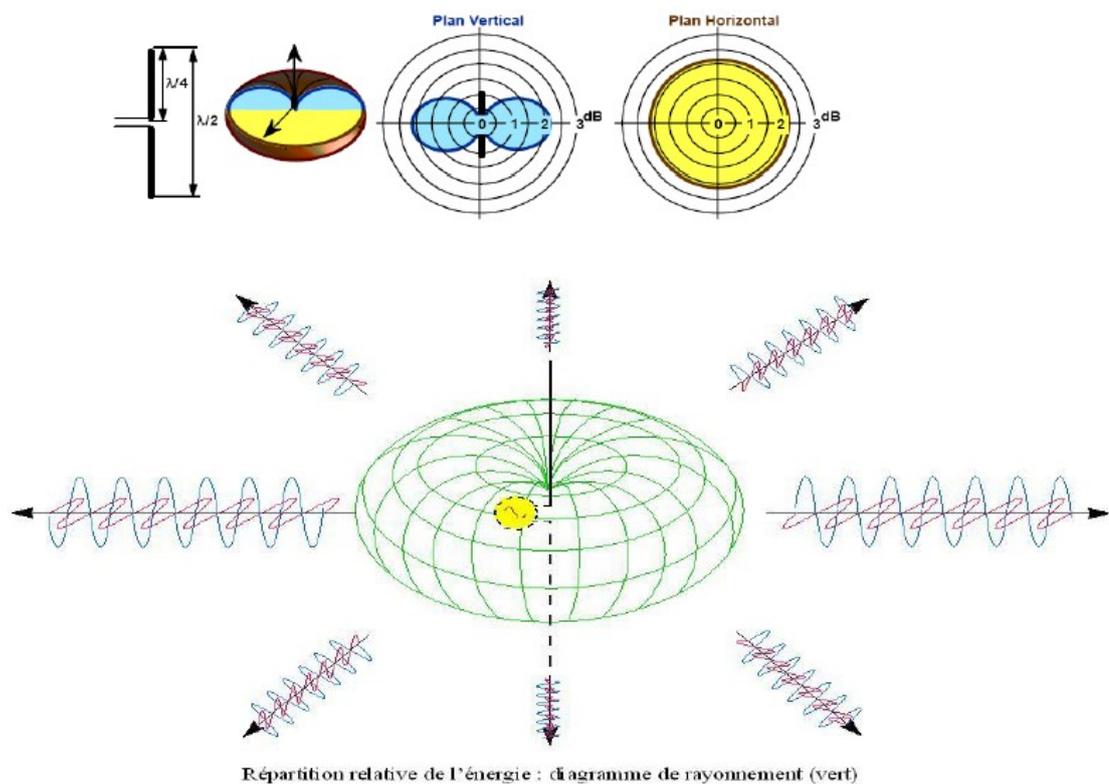
$$R_r = \frac{2}{I_0^2} \iint_S P(\theta, \varphi) ds = \frac{2}{I_0^2} P_{\max} 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} d\theta$$

Avec : P_{\max} la densité de puissance maximale donnée par : $P_{\max} = \frac{1}{240\pi} \left(60 \frac{I_0}{R}\right)^2$

D'où, $R_r = 73,2 \Omega$ (à calculer en TD)

Exemple : L'antenne dipôle $\lambda/2$ rayonne cette onde électromagnétique dans **plusieurs directions**

En un point la densité d'énergie électromagnétique est donnée par le produit de E et H. Cette densité d'énergie sera exprimée en VA/m² c'est à dire en W/m². Si l'on tente de représenter en 3 dimensions la répartition relative de l'énergie (sans unités donc), on obtient ce que l'on appelle le diagramme de rayonnement en traits verts. Pour simplifier on peut dire qu'il ressemble à une « pomme », la queue du fruit matérialisant l'antenne $\lambda/2$.



III. ANTENNE MONOPOLE

- L'antenne « monopôle » ou « quart d'onde » est constituée d'un élément de longueur égale au quart de longueur d'onde, perpendiculaire à un plan conducteur. Elle se comporte comme un demi dipôle, le plan conducteur agissant en miroir.
- Alimenter l'antenne $\lambda / 2$ au centre n'est pas toujours facile, donc il existe une astuce qui consiste à remplacer le brin inférieur $\lambda / 4$ par un plan de masse (en théorie de dimension infinies) lequel est capable de remplacer le brin manquant. Voir fig. 19. Cette antenne « monopôle $\lambda / 4$ » est aussi appelée « antenne fouet » ou « verticale au sol ». Ce plan de masse est parfois appelé « contrepoids d'antenne ». Dans nos émetteurs RC ce plan de masse est constitué :
- La figure ci-dessous représente en vert les diagrammes d'émission et de réception théoriques. L'amplitude des courants dans les antennes est visualisée en trait rouge.

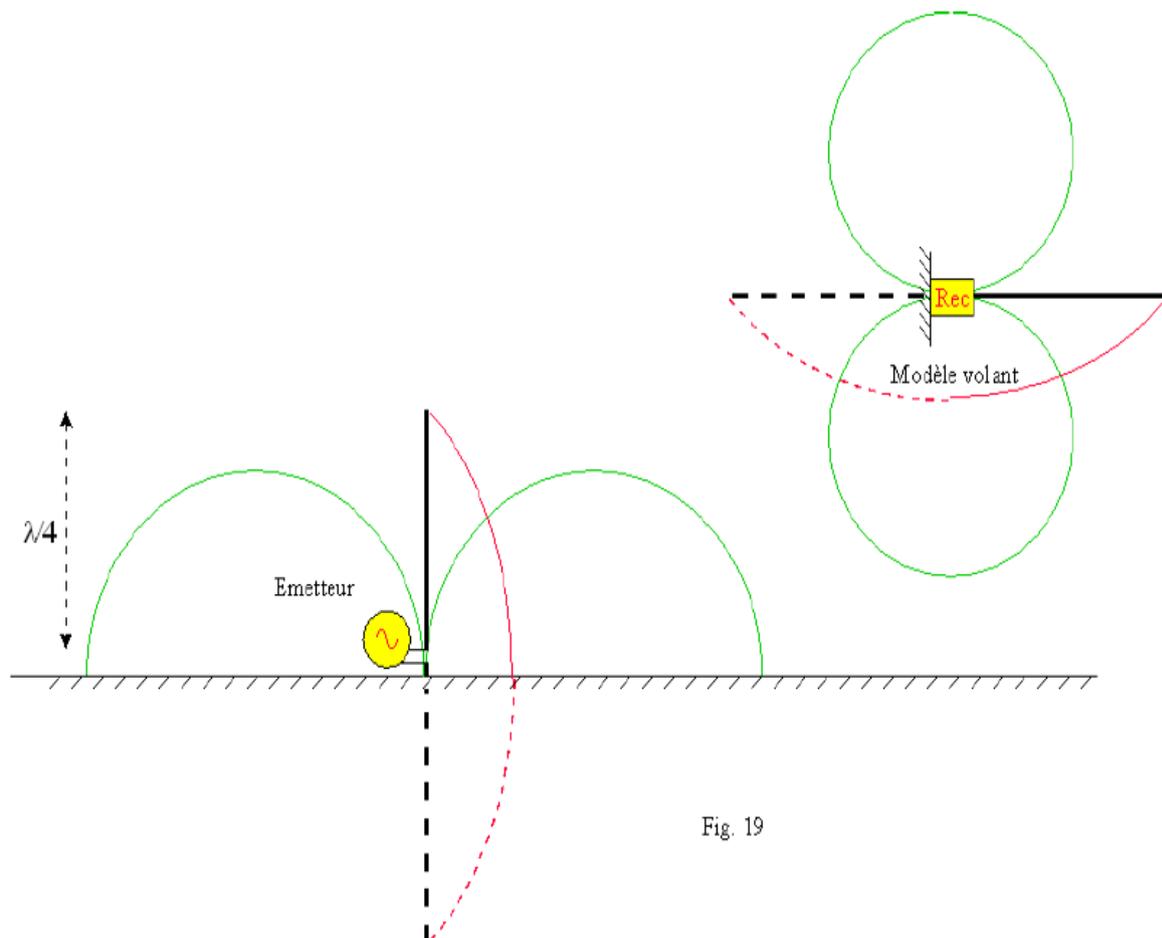


Fig. 19



ANT2400-14S

ANTENNE MOBILE
2400 - 2485 MHz

Antenne mobile avec fouet quart d'onde sur embase à percer, pour véhicule à toit métallique (ou coffret métallique). Elle est équipée de 5 mètres de câble coaxial faibles pertes et d'un connecteur FME femelle.



CARACTÉRISTIQUES :

Référence produit	ANT2400-14S-L (L : longueur câble)
Bandes de fréquence	2400 à 2485 MHz
Impédance nominale	50 ohms
ROS	δ 1,75
Polarisation	linéaire, verticale
Gain	0 dB par rapport au quart d'onde (hors pertes câble)
Puissance admissible	20 watts
Connexion	connecteur FME femelle à l'extrémité de 5 m de câble coaxial faibles pertes (diamètre extérieur 5 mm)
Prise de masse (sous le toit)	par 4 griffes en acier inoxydable solidaires du corps d'embase
Diamètre de perçage du toit	14 mm pour montage par l'intérieur du véhicule 15,5 mm pour montage par l'extérieur du véhicule
Épaisseur du toit	0,5 à 2,5 mm
Fixation du fouet	par filetage M4 femelle sur le fouet
Dimensions	hauteur au dessus du toit : 27 mm diamètre à la base : 26,5 mm épaisseur sous le toit : 9 mm
Masse	H 200 g (avec le câble)
Matériaux / couleurs	fouet : métallique noir écrou d'embase: plastique noir anti-UV, corps d'embase : alliage métallique passivé
Installation	Soit par l'extérieur du véhicule, soit par l'intérieur si l'accessibilité est possible, à travers un perçage effectué dans une zone plane du toit métallique. Une zone de bon contact électrique doit être assurée sous le toit pour les griffes de l'embase. Le serrage de l'écrou d'embase nécessite une clé plate de 16 mm, non fournie. Le serrage du fouet se fait à la main.

Cette antenne peut être utilisée sur un boîtier ou un équipement en prévoyant un contrepoids électrique relié à la masse de l'embase.



ATIM—Sarl au capital de 30.000€—siret 410 460 422 00026—Email: atim@atim.com—Web: www.atim.com
Chemin des guillets—38250 Villard de Lans—TEL: 04 76 95 50 65—FAX: 04 76 95 50 64

1) CAS D'UNE ANTENNE FILAIRE PLACEE AU-DESSUS D'UN PLAN CONDUCTEUR

On considère une antenne placée à une hauteur H au-dessus d'un plan infini parfaitement. Soit $f_0(\alpha)$ son diagramme de rayonnement. Suivant que la polarisation de la source soit verticale ou horizontale, l'image est en phase ou en opposition de phase avec la source réelle et nous montrons que le diagramme de rayonnement de l'ensemble antenne-image ou encore antenne-plan conducteur est donné par les fonctions caractéristiques suivantes :

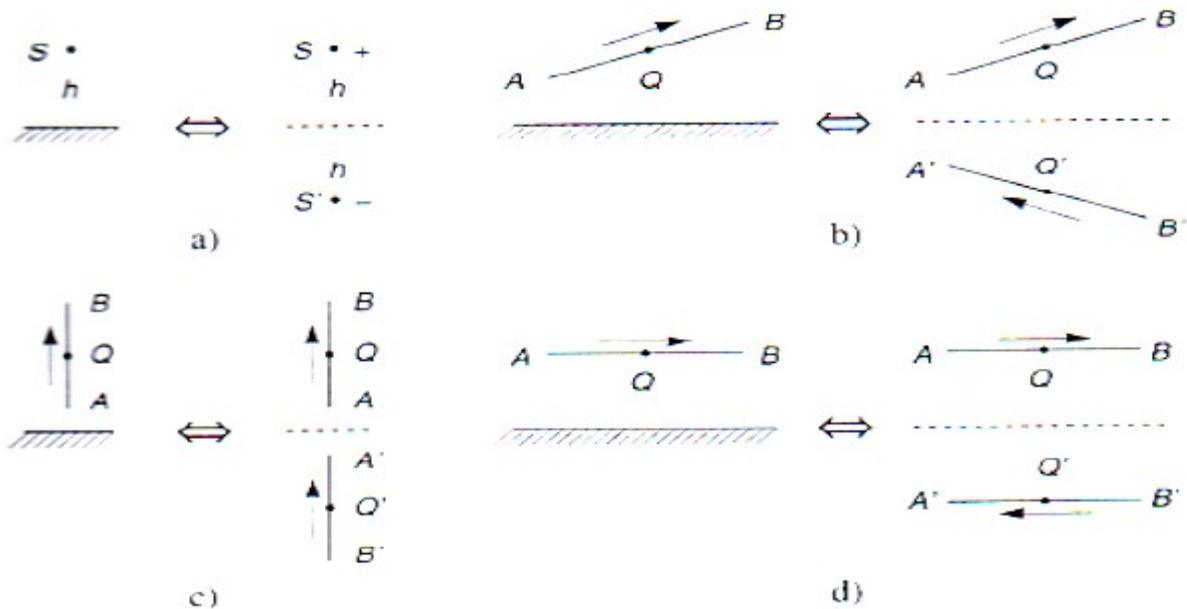
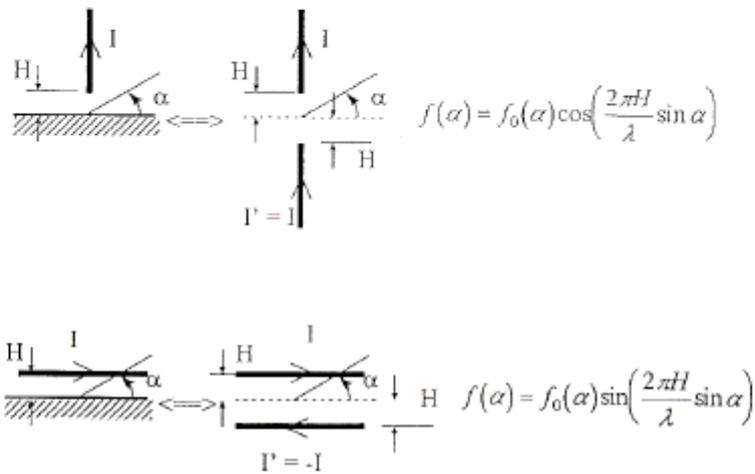
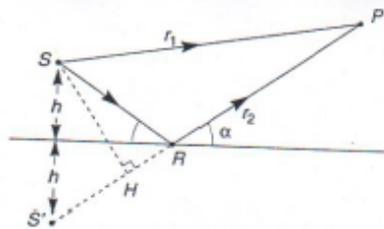


Figure10. Illustration du principe des images :
 a. pour une source ponctuelle. b. pour une antenne oblique
 c. verticale. d. horizontale.

- Le principe des images permet de tenir compte d'une manière très simple de la présence du sol au voisinage d'une antenne. Le champ produit en un point P de l'espace par une source S située à une hauteur h au dessus du sol est le même que celui qui serait produit en l'absence du sol, par cette source S et une source S' symétrique de S , appelée source image. Le champ rayonné par S' est affecté d'un facteur de pondération égal au coefficient de réflexion sur le sol.
- Dans le cas d'une surface plane parfaitement conductrice, ce coefficient est égal à -1 et l'on doit donc considérer que la phase de S' est opposée à celle de S (fig.10a). Par conséquent, le champ rayonné par une antenne $A B$ oblique au dessus d'un plan métallique (fig.10b) est le même que le champ rayonné, en l'absence de plan métallique, par cette même antenne $A B$ et l'antenne symétrique $A' B'$, à condition de considérer que les courants en un point Q de l'antenne $A B$ et en un point Q' de l'antenne $A' B'$ sont en sens inverses.
- Les modélisations pour le cas d'une antenne verticale ou d'une antenne horizontale sont représentées sur les figures 10c et 10b qui se déduisent de la figure 10b par continuité.
- Ce principe des images est très utile : ainsi, le rayonnement d'un dipôle isolé, dans l'espace, de longueur 2ℓ (fig.11) sur lequel on a représenté la répartition du courant (dans le cas où $(\lambda/4 < \ell < \lambda/2)$), est le même que le rayonnement d'un monopôle de longueur ℓ situé verticalement au dessus d'un plan conducteur, ce qui est le cas, notamment, des antennes utilisées sur les véhicules automobiles pour la réception en radiodiffusion F.M

2) RAYONNEMENT D'UN DIPOLE EN PRESENCE D'UN PLAN CONDUCTEUR

Nous allons calculer le champ rayonné en un point P par un dipôle placé en S à une hauteur h au dessus d'un plan métallique. La géométrie du problème est indiquée sur la figure 11 et nous utiliserons le principe des images qui conduit à introduire S' symétrique de S.



$$r_1 = SP, r_2 = SR + RP$$

S source réelle, S' source virtuelle, $SS' = 2h$

Source S et point d'observation P au-dessus d'un plan métallique ; géométrie du problème.

Nous devons considérer les trois cas principaux suivants :

- le dipôle est perpendiculaire au plan de la figure et, par conséquent, parallèle au plan métallique ;
- le dipôle est dans le plan de la figure et parallèle au plan métallique ;
- le dipôle est dans le plan de la figure et perpendiculaire au plan métallique.

Dans les deux premiers cas, qui correspondent à un coefficient de réflexion égal à -1, la source image est en opposition de phase avec la source réelle (Principe des images, § 10.8). Dans le troisième cas, qui correspond à un coefficient de réflexion égal à +1, la source image est en phase avec la source réelle.

Pour la mise en équations, nous allons traiter le cas d'un doublet, dont la fonction caractéristique de rayonnement en sinus est plus simple que celles des dipôles λ ou $\lambda/2$

1) Cas où le doublet est perpendiculaire au plan de la figure

Dans ce cas, le diagramme de rayonnement du doublet est omnidirectionnel ; sa fonction caractéristique de rayonnement est donc égale à 1. Le champ total $\underline{E}(P)$ est la somme :

*du champ $E(P)$ dû à la source S selon le parcours $SP = r_1$:

$$E_{-1} = V \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} = E_{-0} e^{-jkr_1} \quad (39)$$

*du champ E_{-2} dû à la source S' selon le parcours : $SP = r_2$

$$E_{-2} = V \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \quad (40)$$

Le champ total est donc :

$$E(P) = E_{-1} \left[1 - \frac{r_1}{r_2} e^{-jk(r_2 - r_1)} \right] \quad (41)$$

En zone lointaine, on peut considérer que SP//S'P et alors :

$$r_2 = r_1 + S'H = r_1 + 2h \sin \alpha$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{2h}{r_2} \sin \alpha \approx 1$$

d'où r_2

Dans ces conditions :

$$E(P) = E_1 \left[1 - e^{-jk 2h \sin \alpha} \right]$$

$$= E_0 e^{-jkh \sin \alpha} \left[e^{jkh \sin \alpha} - e^{-jkh \sin \alpha} \right]$$

$$= 2j E_0 e^{-jkr_1} e^{-jkh \sin \alpha} \sin(kh \sin \alpha) \quad (42)$$

En module, il nous reste :

$$E(P) = 2E_0 \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \sin \alpha \right) \right| \quad (43)$$

- dans la direction du plan métallique ($\alpha=0$) : $E=0$;
- dans la direction perpendiculaire au plan métallique ($\alpha= \pi/2$)

$$E = 2E_0 \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) \right| \quad (44)$$

$$E = 2E_0 \sin h = (2n+1) \frac{\lambda}{4} : \text{le champ est doublé par la présence du plan métallique ;}$$

$$E = 0 \text{ si } h = n\lambda/2 : \text{le champ est annulé par la présence du plan métallique.}$$

*dans les directions obliques ($0 < \alpha < \pi/2$) :

il y a des maxima pour $\frac{2\pi h}{\lambda} \sin \alpha = (2n+1) \frac{\pi}{2}$, soit pour

$$\sin \alpha = (2n+1)\lambda/4h \leq 1. \text{ Donc : } \alpha_M = \arcsin \left[(2n+1) \frac{\lambda}{4h} \right] \quad (45)$$

il y a des minima pour $\frac{2\pi h}{\lambda} \sin \alpha = m\pi$,
 soit pour $\sin \alpha = m\lambda/2h \leq 1$.

$$\alpha_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right) \quad (46)$$

Donc :

Exemple

- Si $h = \lambda$: $m \leq 2 \rightarrow m = 0, 1 \text{ et } 2$; $(2n + 1) \leq 4$ ou $n \leq 1,5 \rightarrow n = 0 \text{ et } 1$

Il y a donc deux max et trois min pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (fig.12a)

- Si $h = \lambda/2$: $m \leq 1 \rightarrow m = 0 \text{ et } 1$; $(2n + 1) \leq 2$ ou $n \leq 0,5 \rightarrow n = 0$

Il y a donc un max et deux min pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (fig.12b).

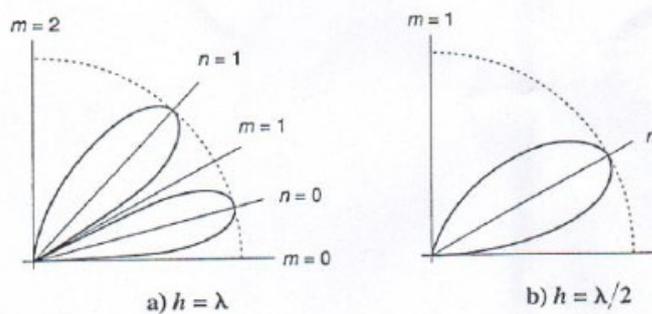


Figure12.

Diagramme de rayonnement d'un doublet perpendiculaire à la figure et à h au dessus du sol .

2) Cas où le doublet est dans le plan de la figure et parallèle au plan métallique

Par rapport au cas précédent, nous devons tenir compte de la fonction caractéristique de rayonnement du doublet qui est $\sin \alpha$ puisque la direction d'observation fait un angle α avec la direction du doublet. les calculs du paragraphe précédent restent valables à condition d'affecter les champs d'un facteur $\sin \alpha$. Par conséquent, le champ total en P (qui est dans le plan de la figure et $\perp SP // SP'$) est donné par :

$$E = 2E_0 \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \sin \alpha \right) \right| \sin \alpha \quad (47)$$

La présence de $\sin \alpha$ ne change rien aux résultats précédents dans la direction $\alpha = 0$ où le champ est nul et dans la direction $\alpha = \pi/2$ où $\sin \alpha = 1$, mais introduit un facteur de pondération dans les directions obliques.

3) Cas où le doublet est dans le plan de la figure et perpendiculaire au plan métallique

Par rapport au premiers cas (§ 2.8.1), nous devons tenir compte de la fonction caractéristique de rayonnement du doublet qui est $\cos \alpha = \sin (\pi/2 - \alpha)$ puisque la direction d'observation fait un angle $\pi/2 - \alpha$ avec la direction du doublet. Il faut donc affecter les

calculs du premier cas d'un facteur $\cos \alpha$. D'autre part, la source image est maintenant en phase avec la source réelle.

Par conséquent, le champ total en P est donné par :

$$E(P) = E_{-1} \left[1 + \frac{r_1}{r_2} e^{-jk(r_2 - r_1)} \right] \cos \alpha \quad (48)$$

Compte tenu des approximations effectuées en zone lointaine, le module de ce champ total est :

$$E(P) = 2E_0 \left| \cos \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \sin \alpha \right) \right| \cos \alpha \quad (49)$$

- Dans la direction du plan métallique ($\alpha = 0$): $E = 2E_0$; le champ est donc maximum $\forall h$.
- Dans la direction perpendiculaire au plan métallique ($\alpha = \pi/2$) : $E = 0$ le champ est annulé $\forall h$.
- Dans les directions obliques ($0 < \alpha < \pi/2$), les résultats sont inversés par rapport au deuxième cas (§ 2.8.2) ;

Nous avons donc des maxima relatifs pour $(2\pi h/\lambda) \sin \alpha = m\pi$ et des minima pour $(2\pi h/\lambda) \sin \alpha = (2n+1)\pi/2$.

Réseaux : Linéaire et planaire

Introduction

Dans le chapitre précédent, les caractéristiques de rayonnement des antennes à un seul élément ont été discutées et analysées. Habituellement, le diagramme de rayonnement d'un seul élément est relativement large, et chaque élément donne des faibles valeurs de la directivité (gain). Dans plusieurs applications il est nécessaire de concevoir des antennes avec des caractéristiques très directionnelles (des gains très élevés) pour répondre aux besoins de communication à longue distance. Cela peut être réalisé en augmentant la dimension électrique de l'antenne.

Souvent, l'augmentation des dimensions des éléments isolés résulte en des caractéristiques plus directionnelles. Une autre façon pour augmenter les dimensions d'une antenne, sans augmenter nécessairement la taille des éléments individuels, est de former un assemblage d'éléments rayonnants selon une certaine configuration électrique et géométrique. Cette nouvelle antenne, formée par de multiples éléments, est appelée un *groupement* (*réseau*, en anglais : array). Dans la plupart des cas, les éléments d'un réseau sont identiques. Ceci n'est pas obligatoire, cependant, il est souvent plus commode, plus simple et plus pratique. Les éléments individuels d'un réseau peuvent être de n'importe quelle forme (fils, ouvertures, etc.).

Le champ total du réseau est déterminé par la somme vectorielle des champs rayonnés par les éléments individuels. Ceci suppose que le courant dans chaque élément est le même que celui de l'élément isolé. Ceci n'est pas habituellement le cas et dépend de l'espacement entre les éléments. Pour créer des diagrammes très directionnels, il est nécessaire que les champs résultants des éléments du réseau interfèrent constructivement (s'ajoutent) dans les directions désirées et interfèrent destructivement (s'annulent entre eux) dans le reste de l'espace. Idéalement, ceci peut être réalisé, cependant dans la pratique, il est seulement approché. Dans un réseau d'éléments identiques, il y a cinq commandes qui peuvent être utilisées pour former le diagramme global de l'antenne. Celles-ci sont :

1. la configuration géométrique du réseau global (linéaire, circulaire, rectangulaire, sphérique, etc.)
2. le déplacement relative entre les éléments
3. les amplitudes des excitations des éléments individuels
4. les phases des excitations des éléments individuels
5. le diagramme relatif des éléments individuels

L'influence que chacun de ces éléments aura sur les caractéristiques globales de rayonnement sera étudiée dans ce paragraphe. Dans la plupart des cas, les techniques sont illustrées par des

exemples. Pour simplifier la présentation et donner une meilleure interprétation physique des techniques, un réseau à deux éléments sera considéré dans un premier temps. L'analyse d'un réseau à N éléments sera ensuite étudiée.

Réseau à deux éléments

L'antenne considérée consiste en la mise en réseau de deux dipôles infinitésimaux horizontaux positionnés le long de l'axe z , comme le montre la figure 6.1(a). Le champ total rayonné par les deux éléments, en supposant qu'il n'y a pas de couplage entre les éléments, est égal à la somme des deux champs et dans le plan y - z il est donné par

$$E_t = E_1 + E_2 = \hat{u}_\theta j\eta \frac{k I_0 l}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-j|kr_1 - \beta/2|}}{r_1} \cos \theta_1 + \frac{e^{-j|kr_2 + \beta/2|}}{r_2} \cos \theta_2 \right\} \quad (6.1)$$

où β est la différence dans la phase d'excitation entre les éléments. Le module d'excitation des radiateurs est identique. Supposant des observations en champ lointain et en se référant à la figure 6.1(b), on trouve

$$\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta \quad (6-2a)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\approx r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_2 &\approx r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{pour les variations de phase} \quad (6-2b)$$

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad \text{pour les variations d'amplitude} \quad (6-2c)$$

L'équation 6-1 se réduit à

$$E_t = \hat{u}_\theta j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \cos \theta \left[e^{+j|kd \cos \theta + \beta|/2} + e^{-j|kd \cos \theta + \beta|/2} \right] \right\}$$

$$E_t = \hat{u}_\theta j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \cos \theta \left[2 \cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \right] \right\} \quad (6-3)$$

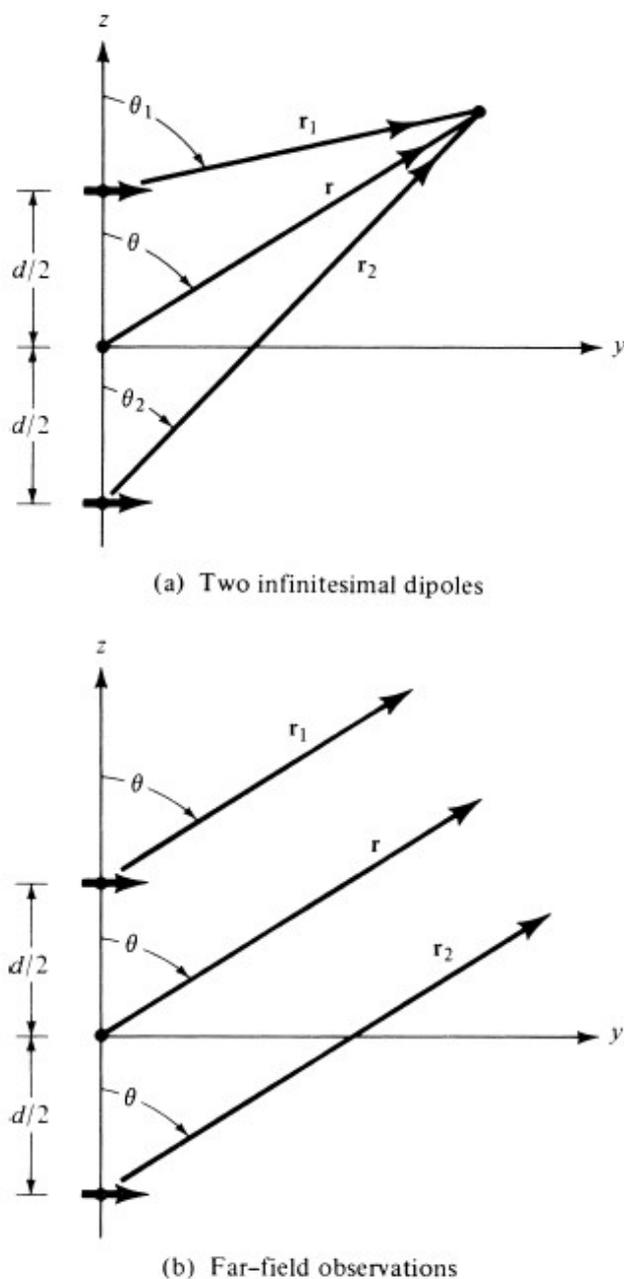


Figure 6.1 Géométrie d'un réseau à deux éléments positionnés le long de l'axe z .

Il est visible d'après l'équation (6-3) que le champ total du réseau est égal au champ d'un seul élément positionné à l'origine, multiplié par un facteur qui est appelé *facteur d'alignement* ou *facteur du réseau* (en anglais *Array Factor*, AF). Donc, pour le réseau à deux éléments à amplitude constante, le facteur de réseau est donné par

$$AF = 2 \cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] (6-4)$$

lequel, sous forme normalisée, peut s'écrire

$$(AF)_n = \cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] (6-4a)$$

Le facteur d'alignement est une fonction de la géométrie du réseau et de la phase d'excitation. En changeant la séparation d et/ou la phase β entre les éléments, les caractéristiques du facteur de réseau et du champ total du réseau peuvent être commandées.

Il a été montré que le champ lointain d'un réseau uniforme à deux éléments identiques est égal au ***produit du champ d'un seul élément, positionné en un point référence (habituellement l'origine), et le facteur d'alignement de ce réseau.*** Soit,

$$E(\text{total}) = [E(\text{élément seul en un point référence})] \times [\text{Facteur d'alignement}] (6-5)$$

Ceci est appelé *multiplication de diagrammes* pour les réseaux d'éléments identiques, et elle est analogue au multiplication de diagramme de l'équation (4-59) pour les sources continues. Bien qu'elle est illustrée seulement pour un réseau de deux éléments, d'amplitudes identiques chacune, il est aussi valable pour des réseaux ayant un nombre quelconque d'éléments identiques qui ne doivent pas forcément avoir des amplitudes, des phases et/ou des espacements (entre eux) identiques. Ceci va être démontré dans ce paragraphe par un certain nombre de réseaux différents. **(Continuer les vérifications à partir d'ici)**

Chaque réseau possède son propre facteur d'alignement. Le facteur d'alignement, en général, est une fonction du nombre d'éléments, leurs dispositions géométriques, leurs amplitudes relatives, leurs phases relatives et leurs espacements. Le facteur d'alignement sera dans sa forme la plus simple si les éléments possèdent des amplitudes, des phases et des inter-espacements identiques. Puisque le facteur d'alignement ne dépend pas des caractéristiques directionnelles des éléments rayonnants eux-mêmes, il peut être formulé en remplaçant les éléments réels par des sources isotropiques (ponctuelles). Une fois le facteur d'alignement est calculé en utilisant le réseau de sources ponctuelles, le champ total du réseau réel est obtenu par l'utilisation de l'équation (6-5). Chaque source ponctuelle est supposée avoir l'amplitude, la phase et la position de l'élément correspondant qui remplace.

Afin de synthétiser le diagramme total d'un réseau, le concepteur n'est pas uniquement demandé à choisir les éléments rayonnants propres mais aussi la géométrie (positionnement) et l'excitation des éléments individuels. Pour illustrer les principes, considérons quelques exemples.

Exemple 6.1

Etant donné le réseau des figures 6.1(a) et (b), trouver les zéros (nulls) du champ total lorsque $d = \lambda/4$ et

(a) $\beta = 0$

(b) $\beta = \frac{+\pi}{2}$

(c) $\beta = \frac{-\pi}{2}$

SOLUTION

(a) $\beta = 0$

Le champ normalisé est donné par

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{4} \cos \theta \right)$$

Les zéros sont obtenus en mettant le champ total égal à zéro, ou

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{4} \cos \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_n} = 0$$

Alors

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

et

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} \cos \theta_n \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cos \theta_n = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = n' \text{ existe pas}$$

Le seul zéro apparaît en $\theta = 90^\circ$ et est dû au diagramme des éléments individuels. Le facteur d'alignement ne contribue à aucun autre zéro parcequ'il n'y a pas suffisamment de séparation entre les éléments pour introduire une différence de phase de 180° entre les éléments, pour toute angle d'observation.

$$(b) \beta = \frac{+\pi}{2}$$

Le champ normalisé est donné par

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta + 1) \right]$$

Les zéros sont obtenus par

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta + 1) \right] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0$$

Alors

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

et

$$\cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta + 1) \right] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n + 1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = 0^\circ$$

et

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n + 1) = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = n' \text{ existe pas}$$

Les zéros d'un réseau se produisent en $\theta = 90^\circ$ et $\theta = 0^\circ$. Le zéro en 0° est introduit par l'arrangement des éléments (facteur d'alignement). Ceci peut aussi être montré par un raisonnement physique, comme le montre la figure 6.2(a). L'élément dans l'axe négatif des z possède une phase initiale de 90° par rapport à l'autre élément. Lorsque l'onde à partir de cet élément se propage vers l'axe des z positif (direction $\theta = 0^\circ$), elle subit un retard de phase additionnel de 90° lorsqu'elle arrive sur l'autre élément sur l'axe positif des z . Alors il y a une différence de phase totale de 180° entre les ondes des deux éléments lorsque la propagation est vers l'axe des z positifs ($\theta = 0^\circ$). Les ondes des deux éléments sont en phase lorsqu'elles se propagent dans l'axe des z négatifs ($\theta = 180^\circ$), comme le montre la figure 6.2(b).

$$(c) \beta = \frac{-\pi}{2}$$

Le champ normalisé est donné par

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta - 1) \right]$$

et les zéros par

$$E_{in} = \cos \theta \cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta - 1) \right] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0$$

Alors

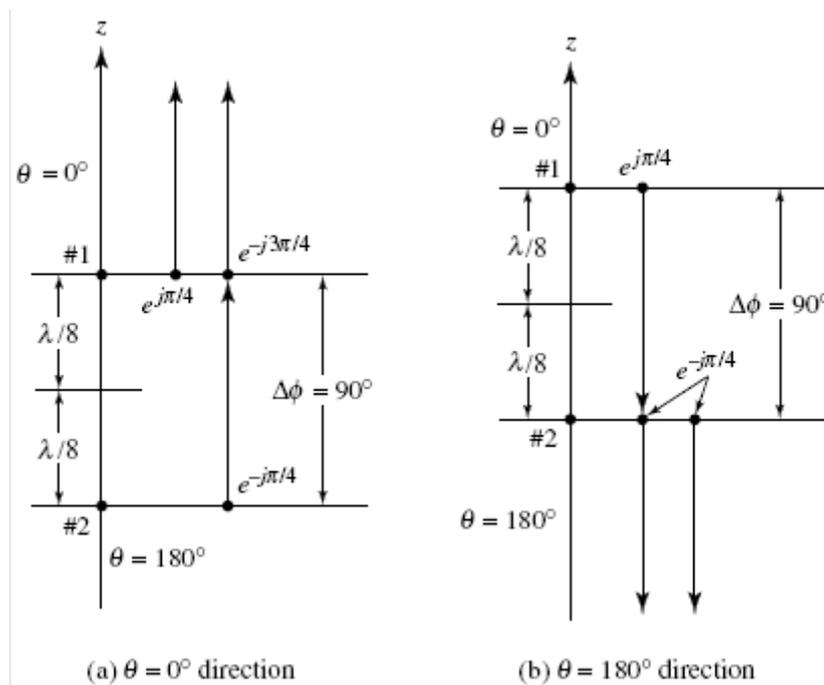
$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

et

$$\cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \theta - 1) \right] \Big|_{\theta = \theta_n} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n - 1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = n' \text{ existe pas}$$

et

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (\cos \theta_n - 1) = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = 180^\circ$$



(a) direction $\theta = 0^\circ$

(b) direction $\theta = 180^\circ$

Figure 6.2 Accumulation de phase pour un réseau à deux éléments pour la formation de zéro vers $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 180^\circ$.

Les zéros se produisent en 90° et 180° . L'élément sur l'axe des z positifs a un écart relatif de phase de 90° par rapport à l'autre, et la différence de phase est de 180° lorsque la propagation est limitée uniquement vers l'axe des z négatifs. Il n'y a aucune différence de phase entre les ondes propageantes vers les z négatifs. Un diagramme similaire à celui de la figure 6.2 peut être utilisé pour illustrer ce cas.

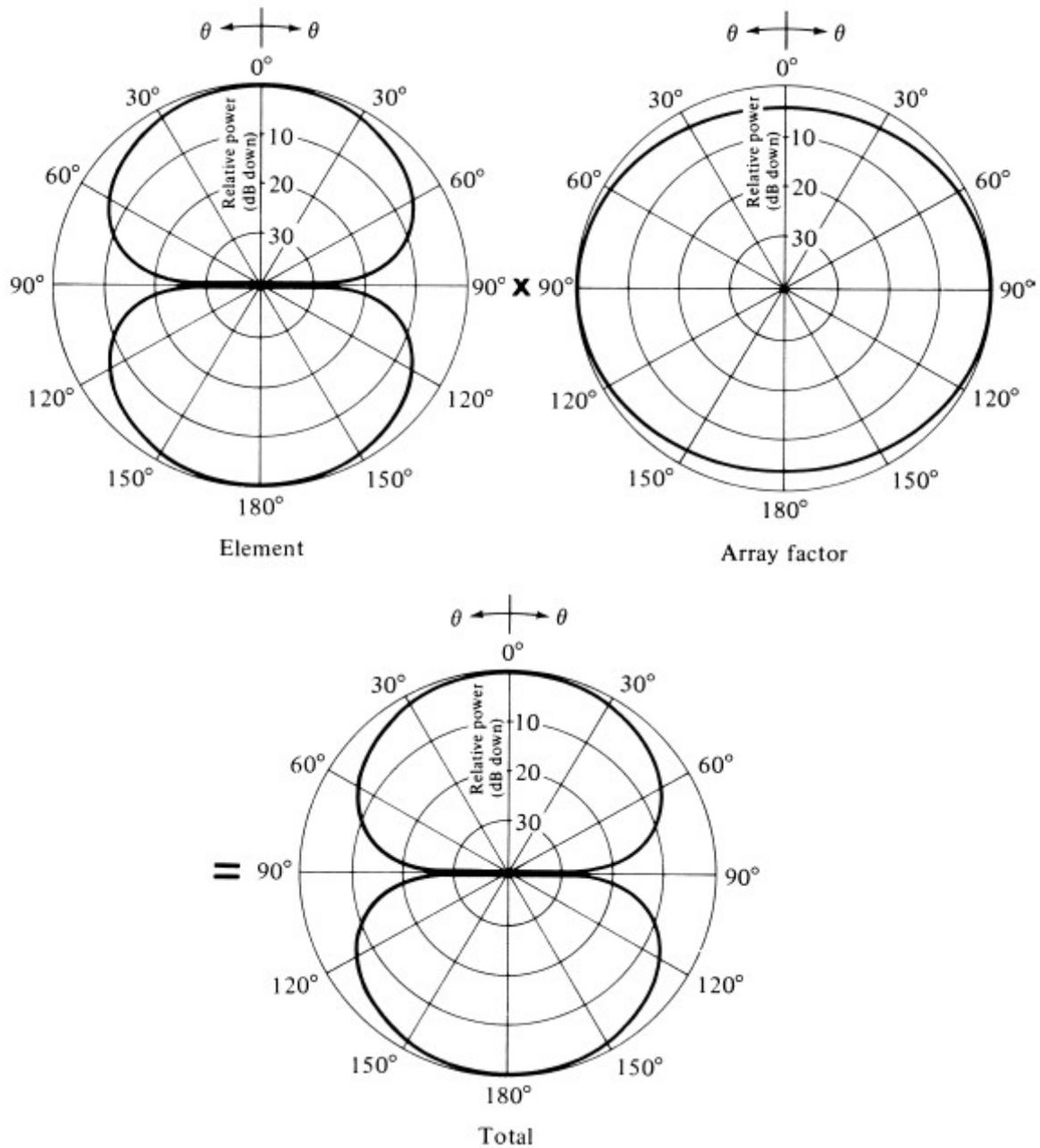


Figure 6.3 Diagrammes du champ de l'élément, du facteur d'alignement et du champ total d'un réseau à deux éléments constitués de dipôles infinitésimaux horizontaux ayant des phases d'excitation identiques ($\beta=0^\circ$, $d=\lambda/4$).

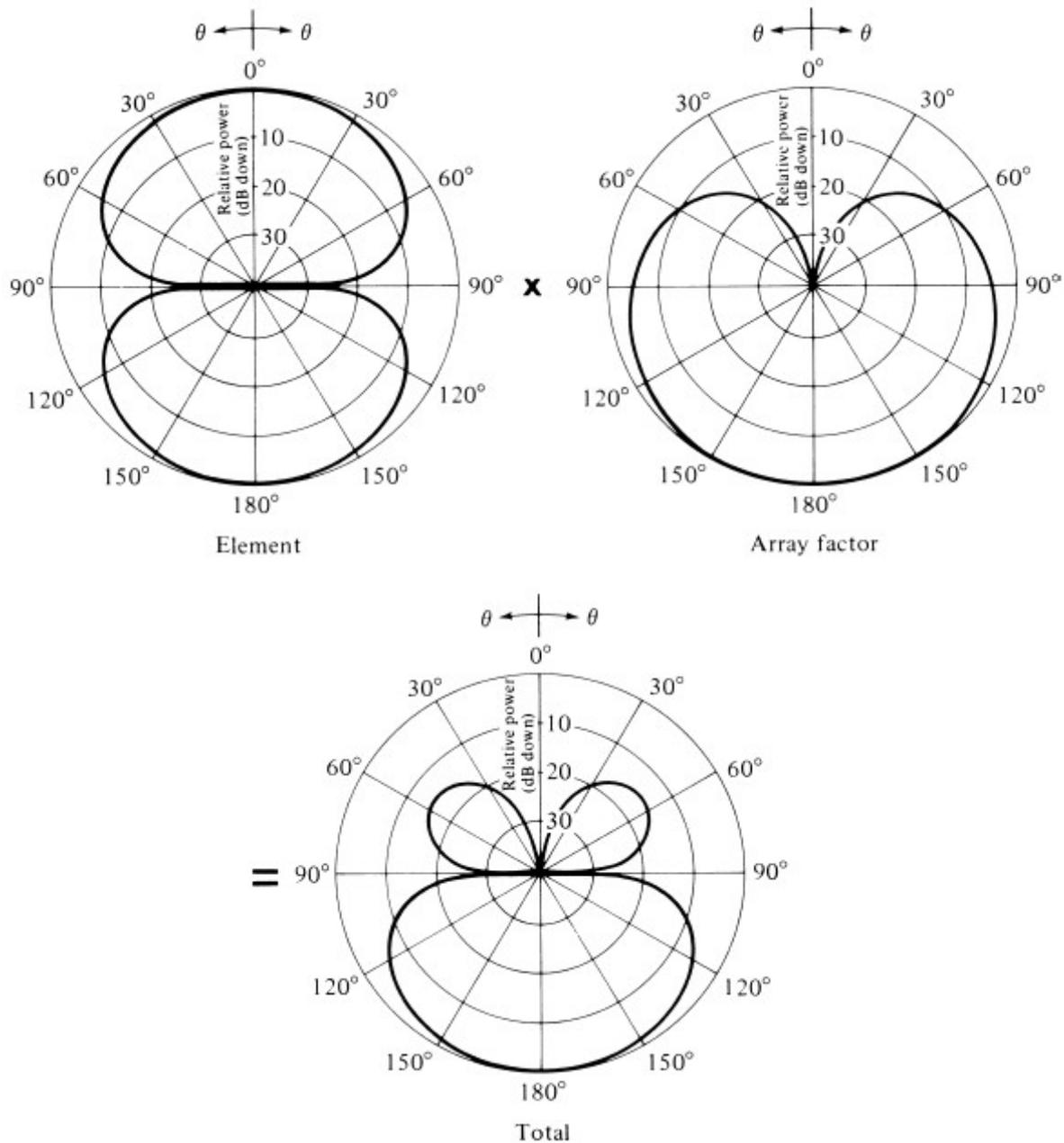


Figure 6.4 Multiplication de diagrammes de l'élément, du facteur d'alignement et du champ total d'un réseau à deux éléments constitués de dipôles infinitésimaux horizontaux avec (a) $\beta = +90^\circ$, $d = \lambda/4$.

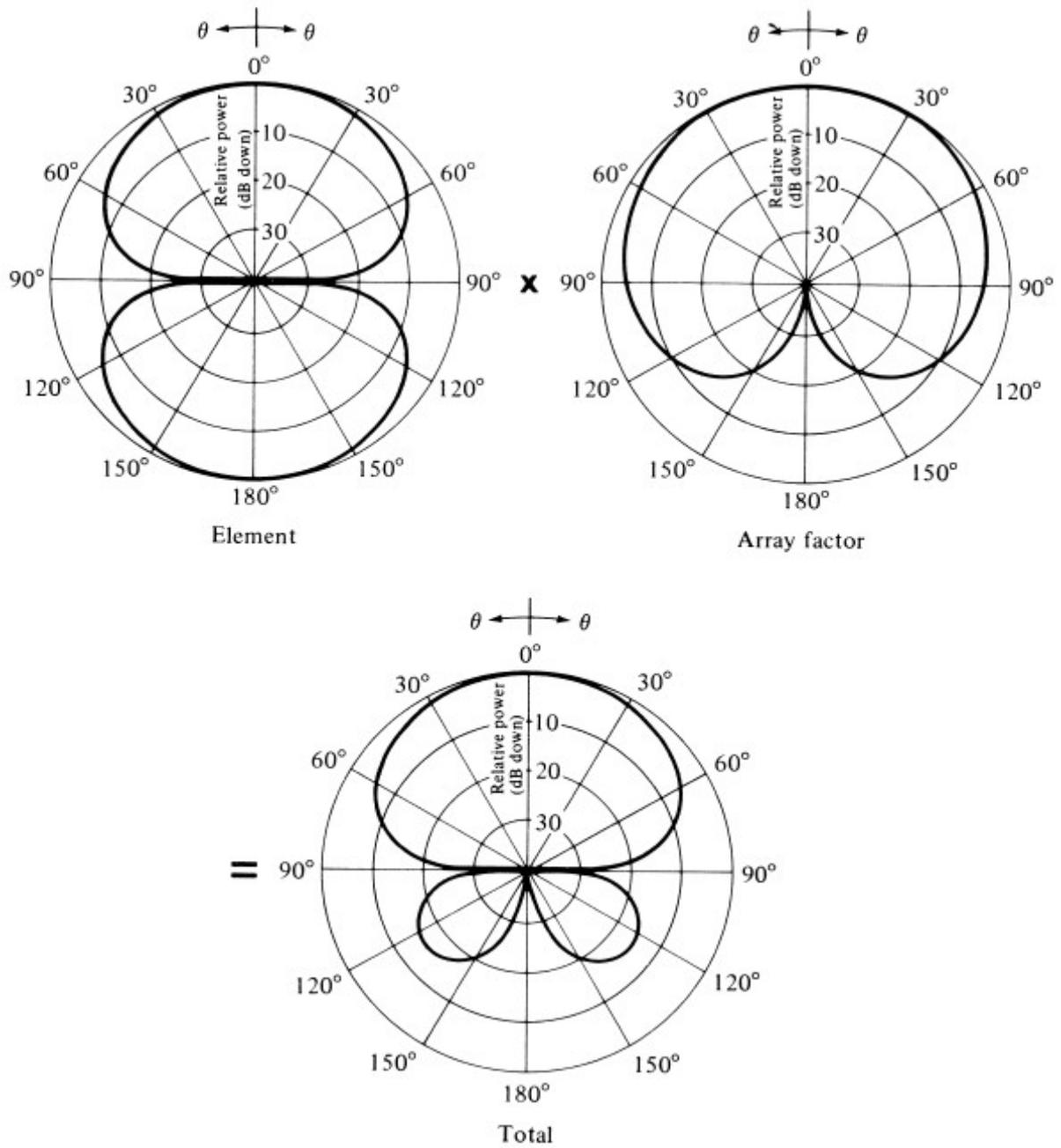


Figure 6.4(b) Suite ($\beta = -90^\circ, d = \lambda/4$).

Pour mieux illustrer la règle de multiplication de diagramme, les diagrammes normalisés de l'élément seul, le facteur d'alignement et le réseau global pour tous les réseaux des exemples ci-dessus sont montrés dans les figures 6.3, 6.4(a) et 6.4(b). Dans chaque figure, le diagramme total du réseau est obtenu en multipliant le diagramme de l'élément seul par celui du facteur d'alignement. *Dans chaque cas, le diagramme est normalisé par rapport à son propre maximum.* Puisque le facteur d'alignement de l'exemple de la Figure 6.3 est approximativement isotrope (dans 3 dB), le diagramme de l'élément et le diagramme total sont presque identiques dans la forme. La plus grande différence d'amplitude entre les deux est environ 3 dB, et pour chaque cas elle se produit selon la direction pour laquelle les phases des deux éléments sont en quadrature de phase (différence de 90°). Pour la Figure 6.3 cela se produit le long de $\theta=0^\circ$ tandis que pour les Figures 6.4(a,b) cela se produit selon $\theta=90^\circ$. Puisque le facteur d'alignement de la Figure 6.4(a) est d'une forme cardioïde, son élément correspondant et les diagrammes totaux sont considérablement différents. Dans le diagramme total, le zéro en $\theta=90^\circ$ est dû au diagramme de l'élément alors que celui en direction de $\theta=0^\circ$ est dû au facteur d'alignement. Des résultats similaires sont représentés dans la figure 6.4(b).

Voici le code Matlab 7.6 correspondant à la solution de l'exemple 6.1.

```
% Solution de l'exemple 6.1, Balanis, pp. 252-257.
% d'après l'équation (6-3) du cours, nous avons:
clear all;
clc;
format long g;
theta_initial=0;
theta_final=2*pi;
n_points=721;
theta=linspace(theta_initial,theta_final,n_points);
disp('Réseau de deux antennes dipôles infinitésimaux horizontaux espacés
de');
disp('Lambda/4 et de déphasages bêta=0, +90° et -90°.');
beta=input('Donner la valeur de bêta: ');
beta=beta/(pi/2);
E1=cos(theta);
AF=cos(pi/4*(cos(theta)+beta));
ETOT=E1.*AF;
subplot(2,2,1);polar(theta,abs(E1));
subplot(2,2,2);polar(theta,abs(AF));
subplot(2,1,2);polar(theta,abs(ETOT));
figure(gcf);
```

Exemple 6.2

On considère un réseau de deux dipôles infinitésimaux identiques orientés comme le montre les Figures 6.1(a) et (b). Pour une séparation d et une différence de phase β de l'excitation entre les éléments, trouver les angles d'observation où les zéros du réseau se produisent. L'amplitude de l'excitation des éléments est la même.

SOLUTION

Le champ total normalisé du réseau est donné par l'équation (6.3) comme suit

$$E_{tn} = \cos \theta \cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right]$$

Pour trouver les zéros, le champ est mis égal à zéro, ou

$$E_{tn} = \cos \theta \cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0$$

Alors

$$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

et

$$\cos \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta_n + \beta) \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (kd \cos \theta_n + \beta) = \pm \left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi$$

et

$$\Rightarrow \theta_n = \cos^{-1} \left(\frac{\lambda}{2\pi d} [-\beta \pm (2n+1)\pi] \right) \quad n=0,1,2,\dots$$

Le zéro en $\theta=90^\circ$ est attribué au diagramme des éléments individuels du réseau alors que les autres restants sont dûs à la formation du réseau. Pour aucune différence de déphasage entre les éléments ($\beta=0$), la séparation d doit être égale ou supérieure à la moitié de la longueur d'onde ($d \geq \lambda/2$) pour qu'au moins un zéro, dû à la formation du réseau, apparaisse.

6.3 Réseau linéaire à N éléments : Amplitude et espacement uniformes

Maintenant que le groupement d'éléments a été introduit et illustré par le réseau à deux éléments, on va généraliser la méthode pour inclure N éléments. En se référant à la géométrie de la figure 6.5(a), supposons que tous les éléments ont des amplitudes identiques mais chaque élément qui succédant possède une phase de courant progressive β par rapport à celui qui le précède (β représente la phase par laquelle le courant dans chaque élément avance le courant de l'élément le précédant). *Un réseau à éléments identiques tous d'amplitude identique et chacun ayant une phase progressive est appelé un réseau uniforme.* Le facteur d'alignement peut être obtenu en considérant les éléments comme étant des sources ponctuelles. Si les éléments réels ne sont pas des sources isotropiques, le champ total peut être formé en multipliant le facteur d'alignement des sources isotropiques par le champ d'un seul élément. Celle-ci est la règle de la multiplication des diagrammes (6-5), et elle s'applique seulement pour les réseaux à éléments identiques. Le facteur d'alignement est donné par

$$AF = 1 + e^{+j|kd \cos \theta + \beta|} + e^{+j2|kd \cos \theta + \beta|} + \dots + e^{j|N-1||kd \cos \theta + \beta|}$$

$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j|n-1||kd \cos \theta + \beta|} \quad (6-6)$$

qui peut s'écrire comme

$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j|n-1|\psi} \quad (6-7)$$

$$\text{où } \psi = kd \cos \theta + \beta \quad (6-7a)$$

Puisque le facteur d'alignement total du réseau uniforme est une sommation d'exponentielles, il peut être représenté par la somme vectorielle de N phaseurs chacun d'amplitude unité et de phase progressive ψ relative au élément précédent. Graphiquement, ceci est illustré par le diagramme phaseur dans la figure 6.5(b). Il est visible à partir du diagramme phaseur que l'amplitude et la phase du AF peuvent être commandées dans les réseaux uniformes en choisissant convenablement la phase relative entre les éléments ; dans les réseaux non-uniformes, l'amplitude ainsi que la phase peuvent être utilisées pour commander la formation et la distribution du facteur d'alignement total.

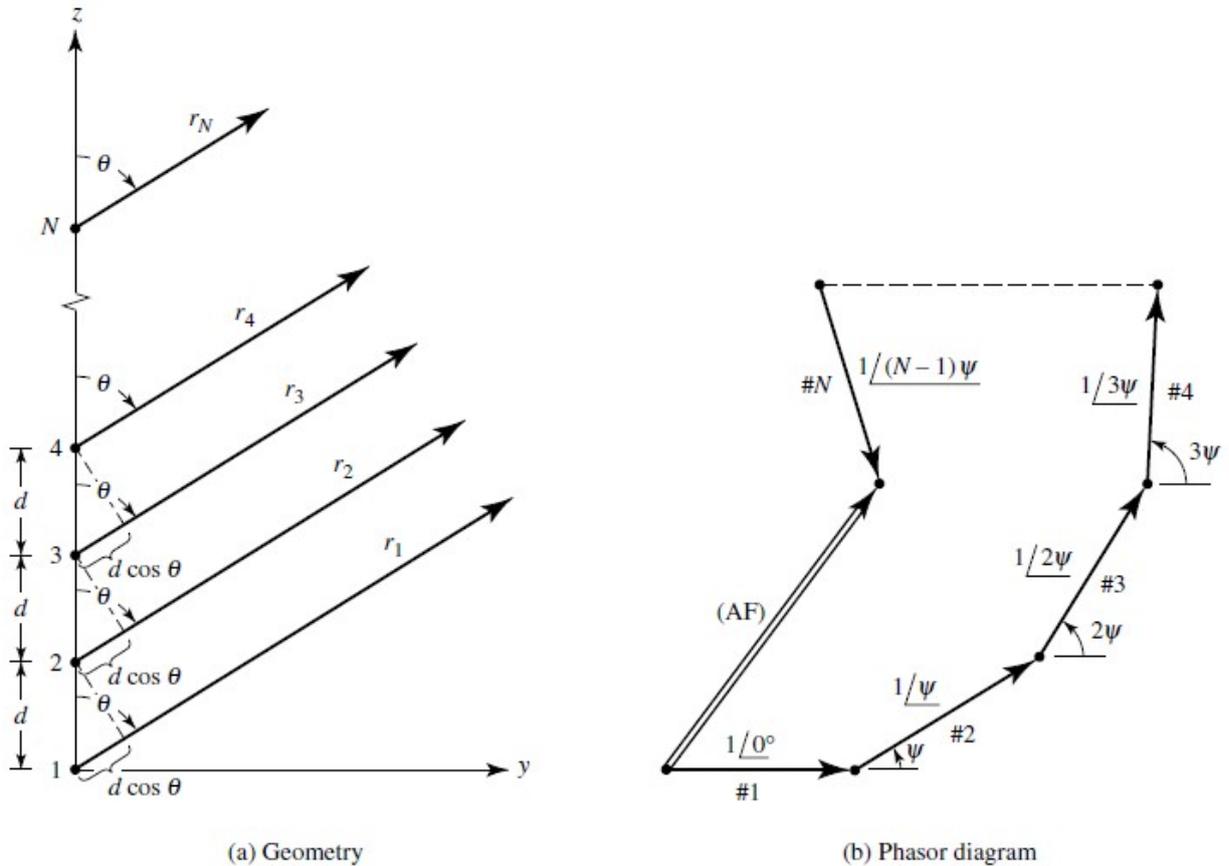


Figure 6.5 Géométrie champ lointain et diagramme phaseur d'un réseau de N sources isotropiques positionnées le long de l'axe z .

Le facteur d'alignement de (6-7) peut être exprimé sous une forme alternative, compacte et analytique dont les fonctions et ses distributions sont plus reconnaissables. Ceci est réalisé comme suit.

Multipliant les deux membres de (6-7) par $e^{j\psi}$, elle peut s'écrire comme

$$(AF)e^{j\psi} = e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} + e^{jN\psi} \quad (6-8)$$

Soustrayant (6-7) de (6-8) se séduit à

$$AF(e^{j\psi} - 1) = -1 + e^{jN\psi} \quad (6-9)$$

qui peut aussi s'écrire comme

$$AF = \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} = \frac{e^{jN\psi/2} e^{jN\psi/2} - e^{-jN\psi/2} e^{-jN\psi/2}}{e^{j\psi/2} e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2} e^{-j\psi/2}} = e^{j(N-1)\psi/2} \frac{e^{jN\psi/2} - e^{-jN\psi/2}}{e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} = e^{j[(N-1)/2]\psi} \frac{2j \sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{2j \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} = e^{j[(N-1)/2]\psi} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)}$$

$$AF = e^{j[(N-1)/2]\psi} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \quad (6-10)$$

Si le point de référence est le centre physique du réseau, le facteur d'alignement de (6-10) se réduit à

$$AF = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \quad (6-10a)$$

Pour les petites valeurs de ψ , l'expression ci-haut peut être approchée par

$$AF \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{\psi}{2}} \quad (6-10b)$$

La valeur maximale de (6-10a) ou (6-10b) est égal à N . Pour normaliser les facteurs d'alignement tel que la valeur maximale de chacun est égale à l'unité, (6-10a) et (6-10b) sont écrites sous forme normalisée comme

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \right] \quad (6-10c)$$

et

$$(AF)_n \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{N}{2}\psi} (6-10d)$$

Pour calculer les zéros du réseau, (6-10c) ou (6-10d) sont mises égales à zéro. Soit,

$$\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right) = 0 \Rightarrow \frac{N}{2}\psi \Big|_{\theta=\theta_n} = \pm n\pi \Rightarrow \theta_n = \cos^{-1}\left[\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\beta \pm \frac{2n}{N}\pi\right)\right] (6-11)$$

$$n=1,2,3,\dots$$

$$n \neq N, 2N, 3N, \dots \text{ avec } (6-10c)$$

Pour $n=N, 2N, 3N, \dots$, (6-10c) atteint ses valeurs maximales car elle se réduit à la forme $\sin(0)/0$. Les valeurs de n déterminent l'ordre des zéros (premier, deuxième, etc.). Pour qu'un zéro existe, l'argument de l'arccosinus ne peut pas dépasser l'unité. Alors le nombre de zéro qui peuvent exister sera une fonction de la séparation d des éléments et la différence de phase β de l'excitation.

Les valeurs maximales de (6-10c) se produisent lorsque

$$\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta=\theta_m} = \pm m\pi \Rightarrow \theta_m = \cos^{-1}\left[\frac{\lambda}{2\pi d}(-\beta \pm 2m\pi)\right]$$

$$m=0,1,2,\dots (6-12)$$

Le facteur d'alignement de (6-10d) possède un seul maximum et se produit pour $m=0$ dans (6-12). Soit,

$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda\beta}{2\pi d}\right) (6-13)$$

qui est l'angle d'observation qui produit $\psi = 0$.

Le point 3 dB pour le facteur d'alignement de (6-10d) se produit lorsque

$$\frac{N\psi}{2} = \frac{N}{2}(kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta=\theta_h} = \pm 1.391 \Rightarrow \theta_h = \cos^{-1}\left[\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\beta \pm \frac{2.782}{N}\right)\right] (6-14)$$

qui peut se réécrire aussi comme

$$\theta_h = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \left(-\beta \pm \frac{2.782}{N} \right) \right] (6-14a)$$

Pour des valeurs grandes de d ($d \gg \lambda$), il se réduit à

$$\theta_h \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2\pi d} \left(-\beta \pm \frac{2.782}{N} \right) (6-14b)$$

L'ouverture du faisceau à 3 dB Θ_h peut être calculée une fois les angles du premier maximum (θ_m) et le point demi-puissance (θ_h) sont calculées. Pour un diagramme symétrique

$$\Theta_h = 2|\theta_m - \theta_h| (6-14c)$$

Pour le facteur d'alignement (6-10d), il existe des maxima secondaires (maxima des lobes secondaires) qui se produisent approximativement lorsque le numérateur de (6-10d) atteint sa valeur maximum. Soit,

$$\sin \left(\frac{N}{2} \psi \right) = \sin \left[\frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \Big|_{\theta=\theta_s} \approx \pm 1 \Rightarrow \frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta=\theta_s} \approx \pm \left(\frac{2s+1}{2} \right) \pi$$

$$\Rightarrow \theta_s \approx \cos^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[-\beta \pm \left(\frac{2s+1}{N} \right) \pi \right] \right\}, s=1,2,3, \dots (6-15)$$

qui peut aussi s'écrire comme suit :

$$\theta_s \approx \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[-\beta \pm \left(\frac{2s+1}{N} \right) \pi \right] \right\}, s=1,2,3, \dots (6-15a)$$

Pour les grandes valeurs de d ($d \gg \lambda$), elle se réduit à

$$\theta_s \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2\pi d} \left[-\beta \pm \left(\frac{2s+1}{N} \right) \pi \right], s=1,2,3,\dots(6-15b)$$

Le maximum du premier lobe secondaire de (6-10c) se produit approximativement lorsque

$$\frac{N}{2} \psi = \frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta=\theta_s} \approx \pm \frac{3\pi}{2} \quad (6-16)$$

ou lorsque

$$\theta_s = \cos^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[-\beta \pm \frac{3\pi}{N} \right] \right\}, s=1,2,3,\dots(6-16a)$$

Dans ce point, l'amplitude de (6-10d) se réduit à

$$(AF)_n \approx \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{N}{2}\psi} \right]_{\substack{\theta=\theta_s \\ s=1}} = \frac{2}{3\pi} = 0.212 \quad (6-17)$$

qui, en dB, égale à

$$(AF)_n = 20 \log_{10} \left(\frac{2}{3\pi} \right) = -13.46 \text{ dB} \quad (6-17a)$$

Alors le maximum du premier lobe secondaire du facteur d'alignement de (6-10d) est 13.46 dB au dessous du maximum du lobe principal. Des expressions plus précise pour l'angle, la largeur du faisceau et l'amplitude du premier lobe secondaire du facteur d'alignement de (6-10d) peuvent être obtenues.

6.3.1 Réseau broadside

Dans plusieurs applications, il est désirable d'avoir le maximum de rayonnement d'un réseau selon la direction normale à l'axe du réseau (broadside ; $\theta=90^\circ$) de la figure 6.5(a)). Pour optimiser la conception, le maximum de l'élément seul et du facteur d'alignement doivent être toute les deux alignées selon $\theta=90^\circ$. Les spécifications des éléments isolés peuvent être

réalisées par un choix convenable des radiateurs, et celles du facteur d'alignement par un propre choix de la séparation et de l'excitation des radiateurs individuels. Dans ce paragraphe, les conditions qui permettent au facteur d'alignement de rayonner efficacement au broadside sont développées.

En se référant à (6-10c) ou (6-10d), le maximum du facteur d'alignement se produit pour

$$\psi = kd \cos \theta + \beta = 0 \quad (6-18)$$

Puisqu'il est désirable d'avoir le maximum dirigé selon $\theta = 90^\circ$, donc

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\theta=90^\circ} = \beta = 0 \quad (6-18 a)$$

Donc pour avoir le maximum du facteur d'alignement d'un réseau linéaire uniforme dirigé broadside à l'axe du réseau, il est nécessaire que tous les éléments auront la même phase d'excitation (en plus de la même amplitude d'excitation). La séparation entre les éléments peut être quelconque. Pour assurer qu'il n'y aura pas de maxima dans d'autres directions, qui sont appelées grating lobes, la séparation entre les éléments ne doit pas être égale aux multiples de longueur d'onde ($d \neq n\lambda, n=1,2,3, \dots$) lorsque $\beta=0$. Si $d = n\lambda, n=1,2,3, \dots$ et $\beta=0$, alors

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\substack{d=n\lambda \\ \beta=0 \\ n=1,2,3,\dots}} = 2\pi n \cos \theta \Big|_{\theta=0^\circ, 180^\circ} = \pm 2n\pi \quad (6-19)$$

Lorsque cette valeur de ψ est substituée dans (6-10c), le facteur d'alignement atteint sa valeur maximale. Donc pour un réseau uniforme avec $\beta=0$ et $d = n\lambda$, en plus d'avoir le maximum du facteur d'alignement dirigé broadside ($\theta=90^\circ$) à l'axe du réseau, il y a des maxima supplémentaire dirigés selon l'axe ($\theta=0^\circ, 180^\circ$) du réseau (rayonnement end-fire).

Dans plusieurs conceptions, un des objectifs est d'éviter des maxima multiples, en plus de maximum principal, qui sont appelés des grating lobes. Souvent, il est exigé de choisir le plus grand espacement possible entre les éléments mais sans grating lobes. Pour éviter tout grating lobe le plus grand espacement entre les éléments doit être inférieur à une longueur d'onde ($d_{max} < \lambda$).

Pour illustrer la méthode, le facteur d'alignement tridimensionnel de 10 éléments ($N = 10$) d'un réseau uniforme avec $\beta=0$ et $d = \lambda/4$ est représenté dans la Figure 6.6(a). Un secteur angulaire de 90° a été supprimé pour mieux voir la distribution du diagramme dans le

plan d'élévation. Le seul maximum apparaît en broadside ($\theta=90^\circ$). Pour former une comparaison, le diagramme tridimensionnelle du même réseau mais avec $d=\lambda$ est également représenté dans la Figure 6.6(b). Pour ce diagramme, en plus du maximum en $\theta=90^\circ$, il y a d'autres maxima dirigés selon $\theta=0^\circ, 180^\circ$. Les diagrammes bidimensionnels correspondants aux Figures 6.6(a,b) sont montrés dans la Figure 6.7.

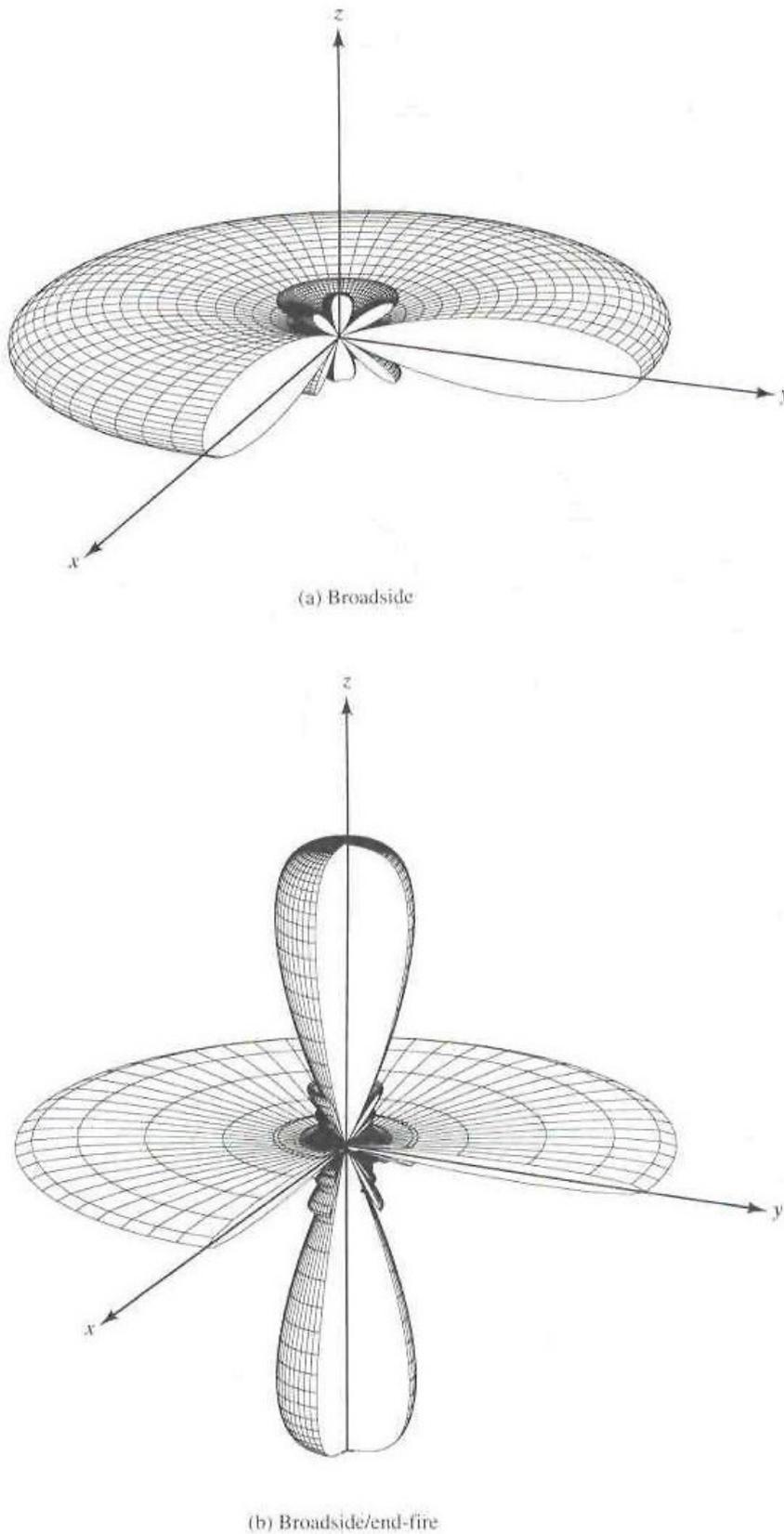


Figure 6.6 Diagramme d'amplitude tridimensionnels pour les réseaux broadside et broadside/end-fire.

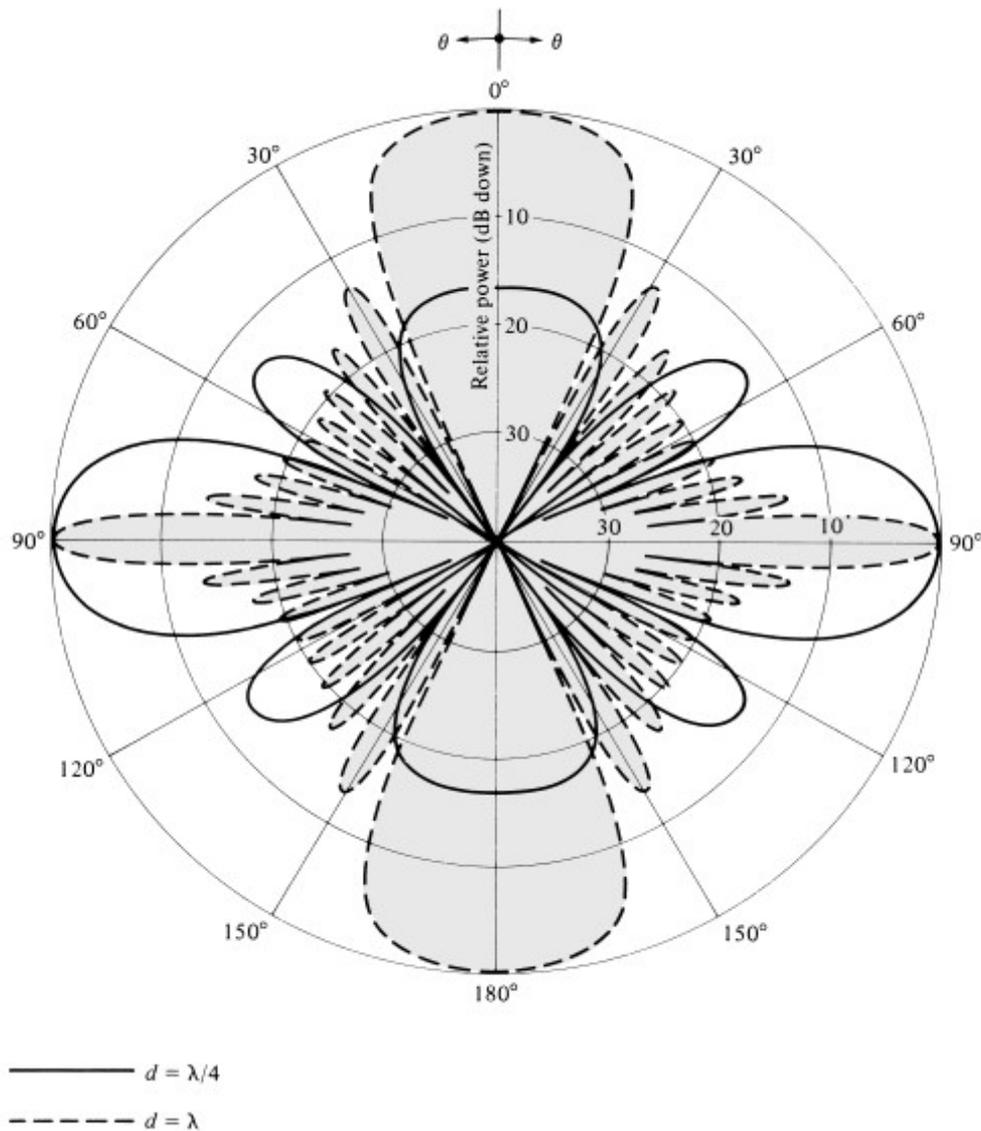


Figure 6.7 Diagrammes du facteur d'alignement d'un réseau uniforme de 10 éléments broadside ($N=10, \beta=0$).

Si l'espacement entre les éléments est choisit entre $\lambda < d < 2\lambda$, alors le maximum de la Figure 6.6 selon $\theta=0^\circ$ se déplace vers la région angulaire $0^\circ < \theta < 90^\circ$ tandis que le maximum selon $\theta=180^\circ$ se déplace vers $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Lorsque $d=2\lambda$, il y a des maxima selon $0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ et 180° .

Dans les Tables 6.1 et 6.2, les expressions des zéros, les maxima, les points demi-puissance, maxima du lobe secondaire et les largeurs du faisceau pour les réseaux broadside sont illustrés. Ils sont dérivés à partir de ceux plus général donnés par (6-10c)-(6-16a).

$\theta_n = \cos^{-1} \left(\pm \frac{n \lambda}{N d} \right)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ $n \neq N, 2N, 3N, \dots$	Zéros
$\theta_m = \cos^{-1} \left(\pm \frac{m \lambda}{d} \right)$ $m = 0, 1, 2, \dots$	Maxima
$\theta_n \approx \cos^{-1} \left(\pm \frac{1.391 \lambda}{\pi N d} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Points demi puissance
$\theta_s \approx \cos^{-1} \left[\pm \frac{\lambda}{2d} \left(\frac{2s+1}{N} \right) \right]$ $s = 1, 2, 3, \dots$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Maxima du lobe secondaire

Table 6.1 Zéros, Maxima, Points demi puissance et Maxima du lobe secondaire des réseaux broadside à amplitude uniforme.

$\theta_n = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{\lambda}{N d} \right) \right]$	Premier Zéro Largeur du Faisceau (FNBW)
$\theta_h \approx 2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi N d} \right) \right]$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Ouverture du Faisceau à Demi Puissance (HPBW)
$\theta_s \approx 2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{3 \lambda}{2 N d} \right) \right]$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Largeur du Faisceau du Premier Lobe Secondaire (FSLBW)

Table 6.2 Largeurs de bande des réseaux broadside à amplitude uniforme

6.3.2 Réseau end-fire ordinaire

Au lieu d'avoir le maximum du rayonnement broadside à l'axe du réseau, il peut être désirable de le diriger selon l'axe du réseau (end-fire). Aussi, il se pourrait que le réseau rayonne selon une seule direction (soit $\theta=0^\circ$ ou 180° de la figure 6.5).

Pour diriger le maximum selon $\theta=0^\circ$,

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\theta=0^\circ} = kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -kd(6 - 20a)$$

Si le maximum est désiré selon $\theta=180^\circ$, alors

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\theta=180^\circ} = -kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = kd(6 - 20b)$$

Par conséquent, le rayonnement end-fire est réalisé lorsque $\beta = -kd$ (pour $\theta=0^\circ$) ou $\beta = kd$ (pour $\theta=180^\circ$).

Si la séparation entre les éléments est $d = \lambda/2$, le rayonnement end-fire existe dans les deux directions ($\theta=0^\circ$ et $\theta=180^\circ$). Si l'espacement inter-élément est un multiple de la longueur d'onde ($d = n\lambda, n=1,2,3, \dots$), alors en plus d'avoir un rayonnement end-fire dans les deux directions, il existe aussi des maxima dans les directions broadside. Donc pour ($d = n\lambda, n=1,2,3, \dots$), il existe quatre maxima ; deux dans les directions broadside et deux selon l'axe du réseau. Pour obtenir un seul maximum end-fire et d'éviter tout grating lobes, l'espacement maximum entre les éléments doit être inférieur à $d_{max} < \lambda/2$.

Les diagrammes de rayonnement tri-dimensionnels d'un réseau à 10 éléments ($N = 10$) avec $d = \lambda/4$, $\beta = +kd$ sont représentés dans la Figure 6.8. Lorsque $\beta = -kd$, le maximum est dirigé selon $\theta=0^\circ$ et le diagramme tri-dimensionnel est montré dans la Figure 6.8(b). Les diagrammes bi-dimensionnels des Figures 6.8(a, b) sont montrés dans la Figure 6.9. Pour former une comparaison, le facteur d'alignement du même réseau ($N = 10$) mais avec $d = \lambda$ et $\beta = -kd$ a été calculé. Son diagramme est identique à celui d'un réseau broadside ayant $N = 10$, $d = \lambda$, et est montré dans la Figure 6.7. On voit qu'il y a quatre maxima ; deux broadside et deux le long de l'axe du réseau.

Les expressions des zéros, maxima, points demi-puissance, maxima du lobe secondaire et largeurs de bande, comme appliquée pour les réseaux end-fire ordinaires, sont listés dans les Tables 6.3 et 6.4.

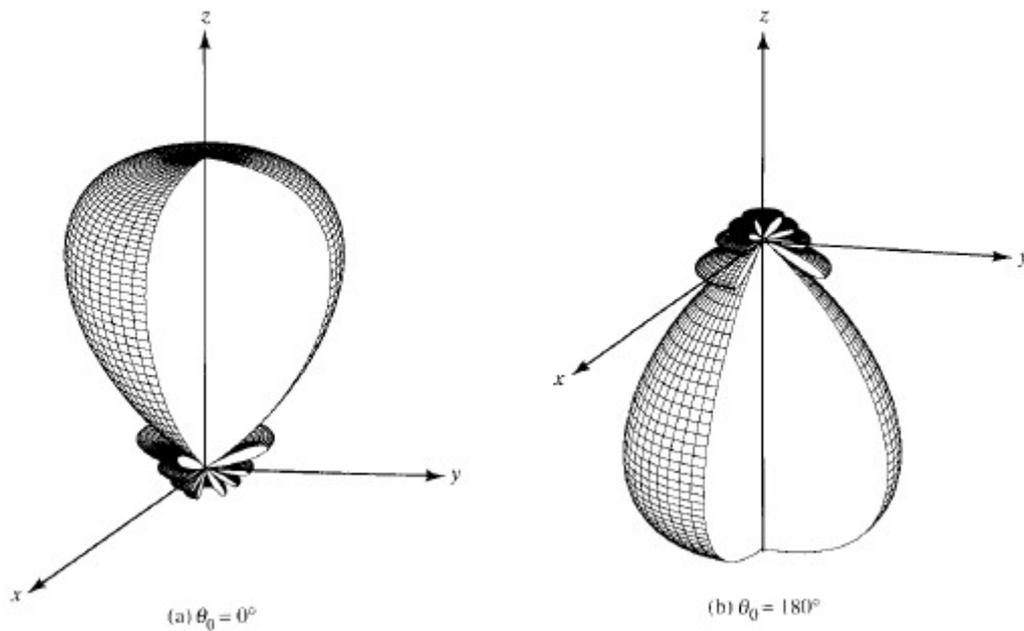


Figure 6.8 Diagrammes tri-dimensionnels pour les réseaux end-fire le long de $\theta=0^\circ$ et 180° .

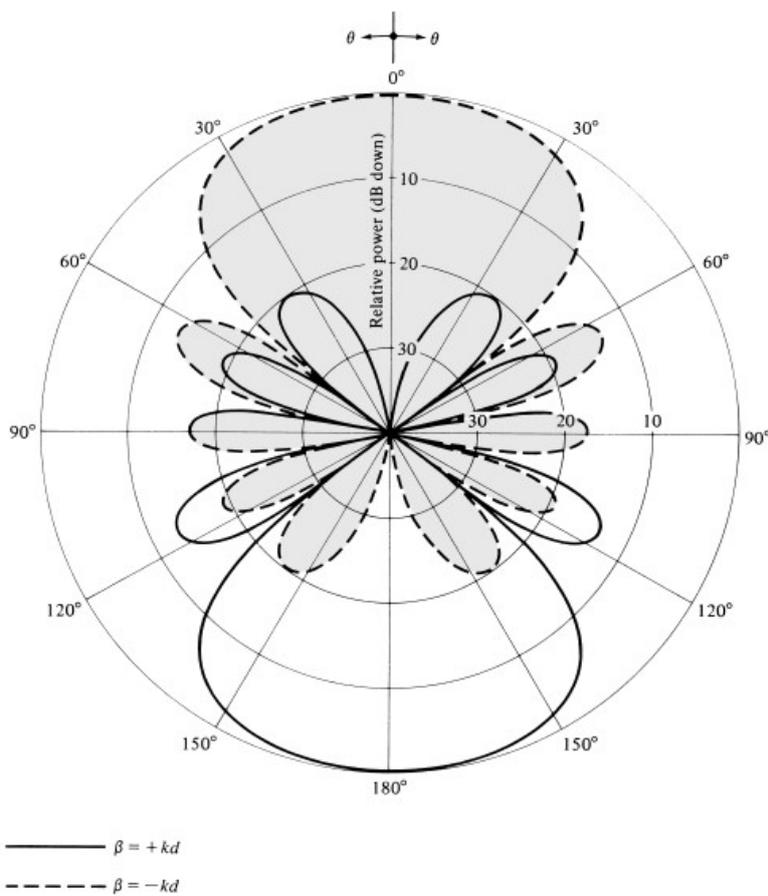


Figure 6.9 Diagrammes du facteur d'alignement d'un réseau end-fire de 10 éléments à amplitude uniforme ($N=10, d=\lambda/4$).

$\theta_n = \cos^{-1} \left(1 - \frac{n \lambda}{N d} \right), n=1,2,3, \dots n \neq N, 2N, 3N, \dots$	Zéros
$\theta_m = \cos^{-1} \left(1 - \frac{m \lambda}{d} \right), m=0,1,2, \dots$	Maxima
$\theta_h \approx \cos^{-1} \left(1 - \frac{1.391 \lambda}{\pi N d} \right), \pi d / \lambda \ll 1$	Points demi puissance
$\theta_s \approx \cos^{-1} \left[1 - \frac{(2s+1) \lambda}{2 N d} \right], s=1,2,3, \dots \pi d / \lambda \ll 1$	Maxima du lobe secondaire

Table 6.3 Zéros, Maxima, Points demi puissance et Maxima du lobe secondaire des réseaux end-fire ordinaires à amplitude uniforme.

$\theta_n = 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{\lambda}{N d} \right)$	Premier Zéro Largeur du Faisceau (FNBW)
$\theta_h \approx 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{1.391 \lambda}{\pi N d} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Ouverture du Faisceau à Demi Puissance (HPBW)
$\theta_s \approx 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{3 \lambda}{2 N d} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$	Ouverture du Faisceau du Premier Lobe Secondaire (FSLBW)

Table 6.4 Largeurs de bande des réseaux end-fire ordinaires à amplitude uniforme

6.4 Réseau linéaire à N éléments : Directivité

Les critères qui doivent être vérifiés pour obtenir le rayonnement broadside et end-fire par un réseau linéaire uniforme de N éléments ont été discutés dans le paragraphe précédent. Il sera instructif d'étudier la directivité de chaque réseau, puisqu'elle représente un coefficient de mérite sur le fonctionnement du système.

6.4.1 Réseau broadside

Comme résultat du critère de rayonnement broadside donné par (6-18a), le facteur d'alignement pour cette forme du réseau se réduit à

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd \cos\theta\right)} \right] \quad (6-38)$$

Lequel pour les petits espacements entre les éléments ($d \ll \lambda$) peut être approché par

$$(AF)_n \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos\theta\right)}{\frac{N}{2}kd \cos\theta} \quad (6-38a)$$

L'intensité de rayonnement peut s'écrire comme

$$U(\theta) = [(AF)_n]^2 = \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos\theta\right)}{\frac{N}{2}kd \cos\theta} \right]^2 = \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 \quad (6-39)$$

$$Z = \frac{N}{2}kd \cos\theta \quad (6-39a)$$

La directivité peut être obtenue en utilisant (6-...)

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} P_{rad} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2} kd \cos\theta\right)}{\frac{N}{2} kd \cos\theta} \right]^2 \sin\theta d\theta \quad (6-40)$$

En faisant un changement de variable, soit,

$$Z = \frac{N}{2} kd \cos\theta \quad (6-40a)$$

$$dZ = -\frac{N}{2} kd \sin\theta d\theta \quad (6-40a)$$

(6-40) peut s'écrire comme

$$U_0 = \frac{-1}{Nkd} \int_{+Nkd/2}^{-Nkd/2} \left[\frac{\sin Z}{Z} \right]^2 dZ = \frac{1}{Nkd} \int_{-Nkd/2}^{+Nkd/2} \left[\frac{\sin Z}{Z} \right]^2 dZ \quad (6-41)$$

Pour un grand réseau ($Nkd/2 \rightarrow \text{grand}$), (6.41) peut être approchée en étendant les limites à l'infini. Soit,

$$U_0 = \frac{1}{Nkd} \int_{-Nkd/2}^{+Nkd/2} \left[\frac{\sin Z}{Z} \right]^2 dZ \approx \frac{1}{Nkd} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin Z}{Z} \right]^2 dZ \quad (6-41a)$$

Puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin Z}{Z} \right]^2 dZ = \pi \quad (6-41b)$$

(6-41a) se réduit à

$$U_0 \approx \frac{\pi}{Nkd} \quad (6-41c)$$

La directivité de (6-....) peut s'écrire comme

$$D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} \approx \frac{Nkd}{\pi} = 2N \frac{d}{\lambda} \text{ car } U_{max} = 1 \text{ selon (6-39)(6-42)}$$

Utilisant

$$L = (N-1)d \text{ (6-43)}$$

où L est la longueur totale du réseau, (6-42) peut être exprimée comme

$$D_0 \approx 2N \frac{d}{\lambda} = 2 \left(1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \text{ (6-44)}$$

laquelle, pour un grand réseau ($L \gg d$) se réduit à

$$D_0 \approx 2N \frac{d}{\lambda} = 2 \left(1 + \frac{L}{d} \right) \frac{d}{\lambda} \approx 2 \frac{L}{\lambda} \text{ (6-44a)}$$

Exemple 6.3

Etant donné un réseau linéaire, broadside, uniforme de 10 éléments isotropiques, ($N = 10$) avec une séparation de $d = \lambda/4$ entre les éléments, calculer la directivité du réseau.

SOLUTION

En utilisant (6-44a)

$$D_0 \approx 2N \frac{d}{\lambda} = 5 (\text{i dimension}) = 10 \log_{10}(5) = 6.99 \text{ dB}$$

6.4.2 Réseau end-fire ordinaire

Pour un réseau end-fire, ayant le maximum du rayonnement dans la direction $\theta=0^\circ$, le facteur d'alignement est donné par

$$(AF)_n = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}kd(\cos\theta-1)\right]}{N \sin\left[\frac{1}{2}kd(\cos\theta-1)\right]} \quad (6-45)$$

qui, pour de faible espacement entre les éléments ($d \ll \lambda$), peut être approché par

$$(AF)_n \approx \frac{\sin\left[\frac{N}{2}kd(\cos\theta-1)\right]}{\frac{N}{2}kd(\cos\theta-1)} \quad (6-45a)$$

L'intensité de rayonnement correspondante peut être écrite comme

$$U(\theta) = [(AF)_n]^2 = \left[\frac{\sin\left[\frac{N}{2}kd(\cos\theta-1)\right]}{\frac{N}{2}kd(\cos\theta-1)} \right]^2 = \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 \quad (6-46)$$

$$Z = \frac{N}{2}kd(\cos\theta-1) \quad (6-46a)$$

dont la valeur maximale est l'unité ($U_{max}=1$) et elle se produit en $\theta=0^\circ$. La valeur moyenne de l'intensité de rayonnement est donnée par

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \left[\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1)} \right]^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \left[\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1)} \right]^2 \sin \theta d\theta \quad (6-47)$$

En posant

$$Z = \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \quad (6-47a)$$

$$dZ = -\frac{N}{2} kd \sin \theta d\theta \quad (6-47b)$$

L'équation (6-47) peut se réécrire comme

$$U_0 = \frac{-1}{Nkd} \int_0^{-Nkd} \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 dZ = \frac{1}{Nkd} \int_0^{Nkd} \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 dZ \quad (6-48)$$

Pour un grand réseau ($Nkd \rightarrow \text{grand}$), l'équation (6-48) peut être approchée en étendant les limites à l'infini. Soit,

$$U_0 = \frac{1}{Nkd} \int_0^{Nkd} \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 dZ \approx \frac{1}{Nkd} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(Z)}{Z} \right]^2 dZ \quad (6-48a)$$

En utilisant l'équation (6-41a), on réduit (6-48a) à

$$U_0 \approx \frac{\pi}{2Nkd} \quad (6-48b)$$

et la directivité à

$$D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} \approx \frac{2Nkd}{\pi} = 4N \frac{d}{\lambda} \quad (6-49)$$

Une autre forme de (6-49), utilisant (6-43), est

$$D_0 \approx 4N \frac{d}{\lambda} = 4 \left(1 + \frac{L}{d}\right) \frac{d}{\lambda} \quad (6-49a)$$

laquelle pour un grand réseau ($L \gg d$) se réduit à

$$D_0 \approx 4N \frac{d}{\lambda} = 4 \left(1 + \frac{L}{d}\right) \frac{d}{\lambda} \approx 4 \frac{L}{\lambda} \quad (6-49b)$$

Il est à noter que la directivité du réseau end-fire, comme donnée par (6-49)-(6-49b), est deux fois celle du réseau broadside donnée par (6-42)-(6-44a).

Exemple 6.4

Etant donné un réseau linéaire, end-fire, uniforme de 10 éléments ($N = 10$) avec une séparation de $d = \lambda/4$ entre les éléments, calculer la directivité du facteur d'alignement. Ce réseau est identique au réseau broadside de l'exemple 6.3.

SOLUTION

En utilisant (6-49)

$$D_0 \approx 4N \frac{d}{\lambda} = 10(\text{dimension}) = 10 \log_{10}(10) = 10 \text{ dB}$$

Cette valeur de la directivité ($D_0 = 10$) est approximative, basée sur la validité de (6-48a). Cependant, elle se compare très favorablement avec la valeur de ($D_0 = 10.05$) obtenue numériquement en intégrant (6-45) utilisant le programme DIRECTIVITY.

6.8 Réseau linéaire à N éléments : Espacement uniforme, amplitude non-uniforme

La théorie pour analyser les réseaux linéaires avec espacement uniforme, amplitude uniforme et une phase progressive entre les éléments a été introduite dans les paragraphes précédents. Un certain nombre de solutions numériques ont été utilisées pour illustrer certains de ces principes. Dans cette section, les réseaux broadside avec un espacement uniforme mais une distribution d'amplitude non uniforme seront considérés. La plus grande partie de la discussion sera dirigée vers les réseaux broadside binomiaux et Dolph-Tschebyscheff (également orthographiés Tchebyscheff ou Chebyshev).

Parmi les trois distributions (uniforme, binomiale et Tschebyscheff), un réseau d'amplitude uniforme donne la plus petite largeur de faisceau à mi-puissance. Il est suivi, dans l'ordre, par les réseaux Dolph-Tschebyscheff et binomial. En revanche, les réseaux binomiaux possèdent généralement les plus petits lobes latéraux suivis, dans l'ordre, par le Dolph-Tschebyscheff et des réseaux uniformes. En fait, les réseaux binomiaux avec un espacement d'éléments égal ou inférieur à $\lambda/2$ n'ont pas de lobes latéraux. Il est évident que le concepteur doit faire un compromis entre le niveau du lobe latéral et la largeur du faisceau.

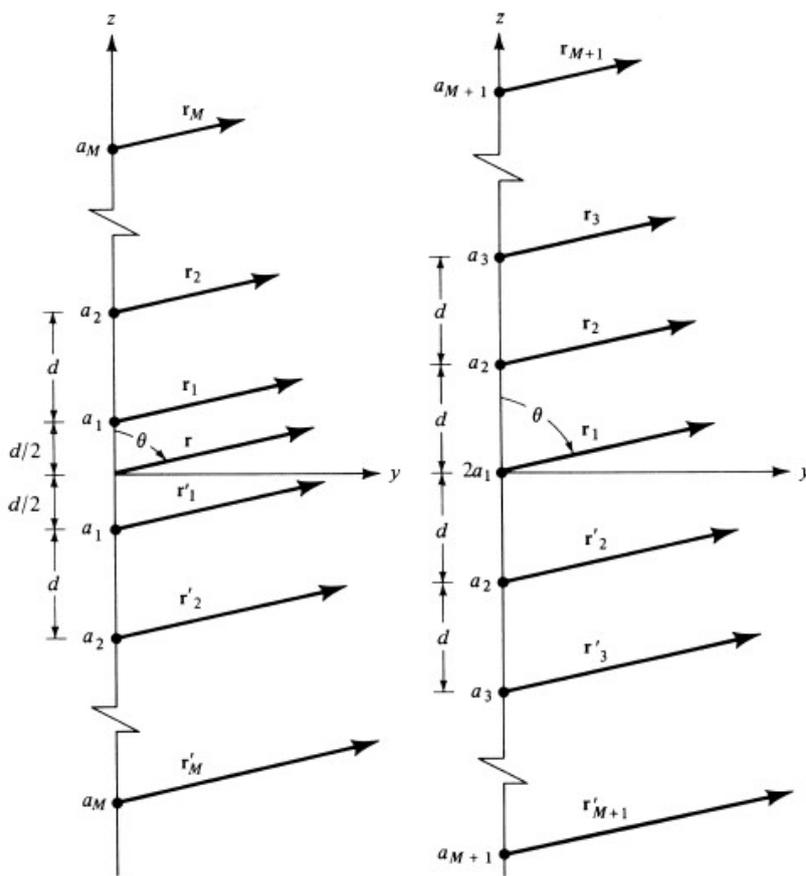
Un critère qui peut être utilisé pour juger de la largeur relative du faisceau et du niveau des lobes latéraux d'une conception à l'autre est la distribution d'amplitude (effilement; tapering) le long de la source. *Il a été montré analytiquement que pour un niveau de lobe latéral donné, le réseau Dolph-Tschebyscheff produit la plus petite largeur de faisceau entre les premiers zéros. Inversement, pour une largeur de faisceau donnée entre les premiers zéros, la conception de Dolph-Tschebyscheff conduit au plus petit niveau de lobe latéral possible.*

Avant d'introduire les méthodes de conception pour des distributions d'amplitude non uniformes spécifiques, commençons par dériver le facteur d'alignement.

6.8.1 Facteur d'alignement - Array factor

Un réseau d'un nombre pair d'éléments isotropes $2M$ (où M est un entier) est positionné symétriquement le long de l'axe z , comme le montre la figure 6.19 (a). La séparation entre les éléments est d , et M éléments sont placés de chaque côté de l'origine.

En supposant que l'excitation d'amplitude est symétrique par rapport à l'origine, le facteur d'alignement pour un réseau broadside à amplitude non uniforme peut être écrit comme



(a) Nombre pair d'éléments

(b) Nombre impair d'éléments

Figure 6.19. Réseaux à amplitude non uniforme de nombre d'éléments pair et impair.

$$(AF)_{2M} = a_1 e^{+j[1/2]kd \cos \theta} + a_2 e^{+j[3/2]kd \cos \theta} + \dots + a_M e^{+j[(2M-1)/2]kd \cos \theta} + a_1 e^{-j[1/2]kd \cos \theta} + a_2 e^{-j[3/2]kd \cos \theta} + \dots + a_M e^{-j[(2M-1)/2]kd \cos \theta}$$

Après normalisation

$$(AF)_{2M} = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[\frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \quad (6.59)$$

Nous avons les cas particuliers suivants:

1. Deux éléments ($2M=2$)

$$a_1=1$$

2. Trois éléments ($2M+1=3$)

$$2a_1=2 \implies a_1=1$$

$$a_2=1$$

3. Quatre éléments ($2M=4$)

$$a_1=3$$

$$a_2=1$$

3. Cinq éléments ($2M+1=5$)

$$2a_1=6 \implies a_1=3$$

$$a_2=4$$

$$a_3=1$$

Les coefficients des autres réseaux pourront être déterminés de la même manière.

B. Procédure de conception - Design procedure

Les réseaux binomiaux ne présentent pas de lobes secondaires à condition que l'espacement entre les éléments soit égal ou inférieur à la moitié de la longueur d'onde. Pour un espacement inter-élément $d = \lambda/2$, on a

$$HPBW(d = \lambda/2) \cong \frac{1.06}{\sqrt{N-1}} = \frac{1.06}{\sqrt{2L/\lambda}} = \frac{0.75}{\sqrt{L/\lambda}} \quad (6.63)$$

$$D_0 = \frac{2}{\int_0^\pi d\theta \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right]^{2(N-1)} \sin\theta} = \frac{1.06}{\sqrt{2L/\lambda}} = \frac{0.75}{\sqrt{L/\lambda}} \quad (6.64)$$

$$D_0 = \frac{(2N-2)(2N-4)\dots 2}{(2N-3)(2N-5)\dots 1} \quad (6.65)$$

$$D_0 \cong 1.77\sqrt{N} = 1.77\sqrt{1+2L/\lambda} \quad (6.66)$$

Pour illustrer la méthode, les diagrammes d'un réseau binomial de 10 éléments ($2M = 10$) avec des espacements entre les éléments de $\lambda/4$, $\lambda/2$, $3\lambda/4$ et λ , respectivement, ont été représentés sur la Figure 6.20. Les diagrammes sont tracés en utilisant (6-61.a) et (6-61.c) avec les coefficients $a_1=126$, $a_2=84$, $a_3=36$, $a_4=9$ et $a_5=1$. On observe qu'il n'y a pas de lobes secondaires pour les réseaux avec des espacements de $\lambda/4$ et $\lambda/2$ entre les éléments.

Alors que les réseaux binomiaux ont des lobes secondaires de très faible niveau, ils présentent des largeurs de faisceau plus grandes (par rapport aux conceptions uniformes et Dolph-Tschebyscheff). Un désavantage pratique majeur des réseaux binomiaux est la grande variation entre les amplitudes des différents éléments d'un réseau, en particulier pour un réseau avec un grand nombre d'éléments. Ceci conduit à de très faibles rendements pour le réseau d'alimentation, et rend la méthode peu souhaitable dans la pratique. Par exemple, le coefficient d'amplitude relative des éléments d'extrémité d'un réseau de 10 éléments est 1 alors que celui de l'élément central est 126. Pratiquement, il serait difficile d'obtenir et de maintenir de telles variations d'amplitude parmi les éléments. Ils conduiraient également à des systèmes d'antennes très inefficaces. Parce que la distribution d'amplitude diminue de façon monotone du centre vers les bords et l'amplitude des éléments extrêmes est négligeable par rapport à ceux vers le centre, un niveau de lobe latéral très bas est attendu.

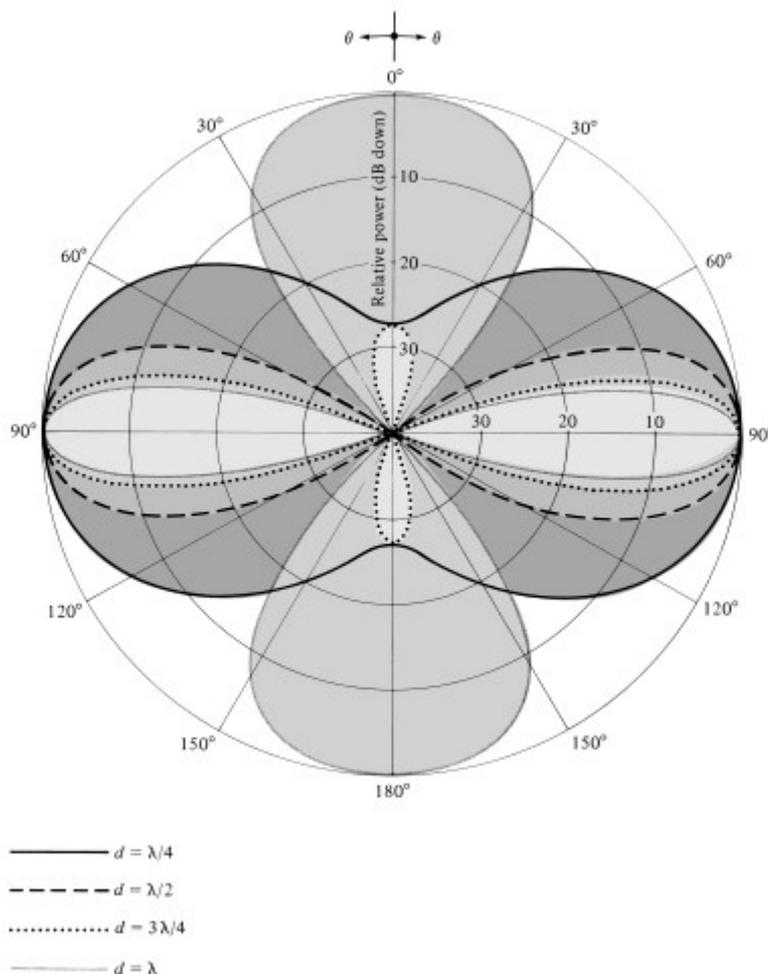


Figure 6.20. Diagrammes du puissance du facteur d'alignement pour un réseau broadside binomial à 10 éléments avec $N=10$ et $d = \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4$ et λ .

Exemple 6.5

Pour un réseau binomial de 10 éléments avec un espacement de $\lambda/2$ entre les éléments, dont le diagramme d'amplitude est illustré à la Figure 6.20, déterminer l'ouverture du faisceau à demi-puissance (en degrés) et la directivité maximale (en dB). Comparez les réponses avec d'autres données disponibles.

SOLUTION

En utilisant (6.62), l'ouverture du faisceau à mi-puissance est égale à

$$HPBW \cong \frac{1.06}{\sqrt{N-1}} = \frac{1.06}{\sqrt{10-1}} = \frac{1.06}{3} = 0.353 \text{ radians} = 20.23^\circ$$

La valeur obtenue en utilisant le facteur d'alignement, dont le diagramme est montré dans la Figure 6.20, est 20.5° qui compare bien avec la valeur approchée. est égale

En utilisant (6.64), la valeur de la directivité pour $N = 10$ est égale à

$$D_0 = \frac{(2N-2)(2N-4)\dots 2}{(2N-3)(2N-5)\dots 1} = \frac{18 \times 16 \times \dots \times 2}{17 \times 15 \times \dots \times 1} = \frac{185794560}{34459425} = 5.39169 = 7.31725 \text{ dB}$$

tandis que la valeur obtenue en utilisant (6.65) est

$$D_0 = 1.77 \sqrt{N} = 1.77 \sqrt{10} = 5.59723 = 7.479732 \text{ dB}$$

Ces valeurs se comparent favorablement entre elles.

6.8.3 Réseau de Dolph-Tschebyscheff

Un autre réseau, avec de nombreuses applications pratiques, est le tableau Dolph-Tschebyscheff. La méthode a été initialement introduite par Dolph et étudiée par la suite par d'autres. C'est avant tout un compromis entre les réseaux uniformes et binomiaux. Ses coefficients d'excitation sont liés aux polynômes de Tschebyscheff. Un réseau de Dolph-Tschebyscheff sans lobes secondaires (ou lobes secondaires de $-\infty$ dB) se réduit à la conception binomiale. Les coefficients d'excitation pour ce cas, tels qu'obtenus par les deux méthodes, seraient identiques.

A. Facteur d'alignement

En se référant à (6-61a) et (6-61b), le facteur d'alignement d'un réseau d'un nombre pair ou impair d'éléments avec une excitation d'amplitude symétrique n'est rien de plus qu'une sommation de M ou $M + 1$ termes cosinus. L'harmonique la plus grande des termes cosinus est inférieure de un au nombre total d'éléments du tableau. Chaque terme cosinus, dont l'argument est un nombre entier de fois une fréquence fondamentale, peut être réécrit comme une série de fonctions cosinus avec comme argument la fréquence fondamentale. Soit,

$$\begin{aligned}
 m = 0 \quad \cos(mu) &= 1 \\
 m = 1 \quad \cos(mu) &= \cos u \\
 m = 2 \quad \cos(mu) &= \cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1 \\
 m = 3 \quad \cos(mu) &= \cos(3u) = 4 \cos^3 u - 3 \cos u \\
 m = 4 \quad \cos(mu) &= \cos(4u) = 8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1 \\
 m = 5 \quad \cos(mu) &= \cos(5u) = 16 \cos^5 u - 20 \cos^3 u + 5 \cos u \\
 m = 6 \quad \cos(mu) &= \cos(6u) = 32 \cos^6 u - 48 \cos^4 u + 18 \cos^2 u - 1 \\
 m = 7 \quad \cos(mu) &= \cos(7u) = 64 \cos^7 u - 112 \cos^5 u + 56 \cos^3 u - 7 \cos u \\
 m = 8 \quad \cos(mu) &= \cos(8u) = 128 \cos^8 u - 256 \cos^6 u + 160 \cos^4 u \\
 &\quad - 32 \cos^2 u + 1 \\
 m = 9 \quad \cos(mu) &= \cos(9u) = 256 \cos^9 u - 576 \cos^7 u + 432 \cos^5 u \\
 &\quad - 120 \cos^3 u + 9 \cos u
 \end{aligned}
 \tag{6.67}$$

Ces équations ont été obtenues par l'usage de la formule de Euler

$$[e^{ju}]^m = (\cos u + j \sin u)^m = e^{jmu} = \cos(mu) + j \sin(mu)$$

et l'identité trigonométrique $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$.

Si on met

$$z = \cos u \quad (6.68)$$

les équations (6.67) peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} m = 0 & \quad \cos(mu) = 1 = T_0(z) \\ m = 1 & \quad \cos(mu) = z = T_1(z) \\ m = 2 & \quad \cos(mu) = 2z^2 - 1 = T_2(z) \\ m = 3 & \quad \cos(mu) = 4z^3 - 3z = T_3(z) \\ m = 4 & \quad \cos(mu) = 8z^4 - 8z^2 + 1 = T_4(z) \\ m = 5 & \quad \cos(mu) = 16z^5 - 20z^3 + 5z = T_5(z) \\ m = 6 & \quad \cos(mu) = 32z^6 - 48z^4 + 18z^2 - 1 = T_6(z) \\ m = 7 & \quad \cos(mu) = 64z^7 - 112z^5 + 56z^3 - 7z = T_7(z) \\ m = 8 & \quad \cos(mu) = 128z^8 - 256z^6 + 160z^4 - 32z^2 + 1 = T_8(z) \\ m = 9 & \quad \cos(mu) = 256z^9 - 576z^7 + 432z^5 - 120z^3 + 9z = T_9(z) \end{aligned}$$

(6.69)

et chacune de ces équations est liée à un polynôme de Tschebyscheff (Chebyshev) $T_m(z)$. Ces relations entre les fonctions cosinus et les polynômes de Tschebyscheff ne sont valables que dans l'intervalle $-1 \leq z \leq 1$. Parce que $|\cos(mu)| \leq 1$, chaque polynôme de Tschebyscheff est $|T_m(z)| \leq 1$ pour $-1 \leq z \leq 1$. Pour $|z| \geq 1$, les polynômes de Tschebyscheff sont liés aux fonctions cosinus hyperboliques.

La formule de récurrence pour les polynômes de Tschebyscheff est

$$T_m(z) = 2z T_{m-1}(z) - T_{m-2}(z) \quad (6.70)$$

Elle peut être utilisée pour trouver un polynôme de Tschebyscheff si les polynômes des deux ordres précédents sont connus. Chaque polynôme peut également être calculé en utilisant

$$T_m(z) = \cos[m \cos^{-1}(z)] \quad -1 \leq z \leq +1 \quad (6.71. a)$$

$$T_m(z) = \cosh[m \cosh^{-1}(z)] \quad z < -1, z > +1 \quad (6.71. b)$$

Dans la Figure 6.21, les six premiers polynômes de Tschebyscheff ont été placés. Les propriétés suivantes des polynômes sont intéressantes:

1. Tous les polynômes, de n'importe quel ordre, passent par le point (1,1).
2. Dans l'intervalle $-1 \leq z \leq +1$, les polynômes ont des valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$.
3. Toutes les racines (les zéros) apparaissent dans $-1 \leq z \leq +1$, et tous les maxima et minima ont des valeurs de +1 et -1, respectivement.

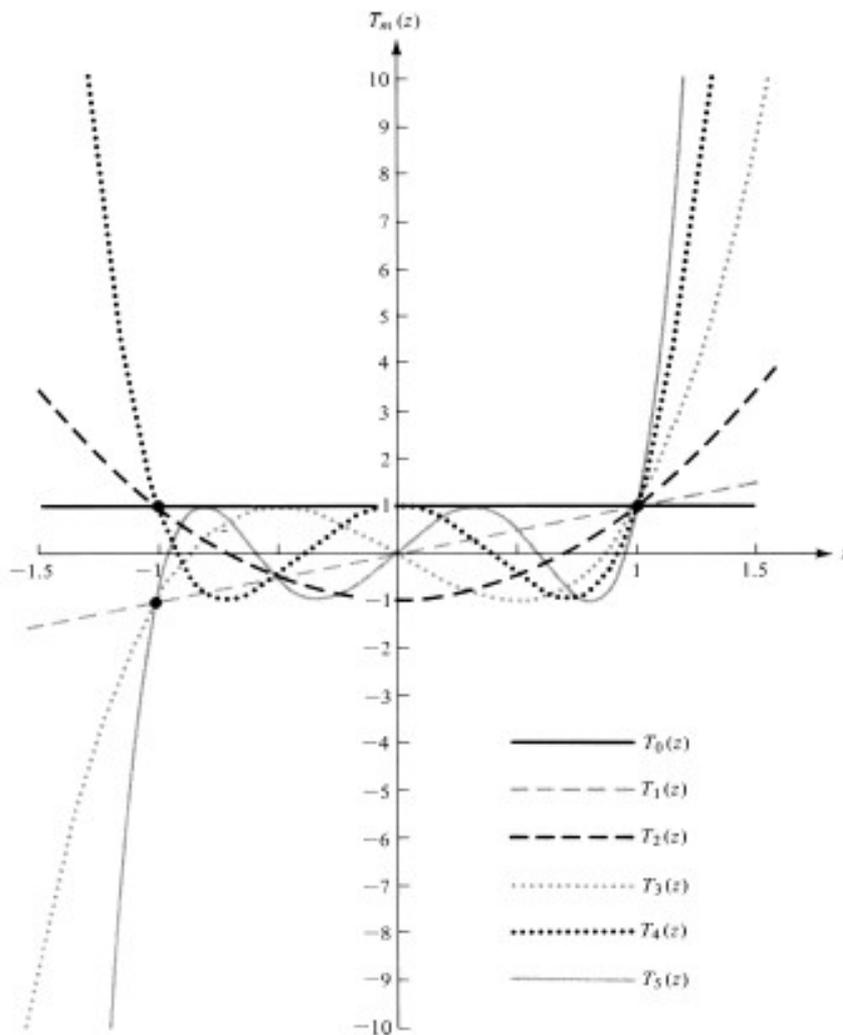


Figure 6.21 Polynomes de Tschebyscheff à ordres de zero à cinq.

B. Procédure de conception

Spécification. Concevoir un réseau broadside de Dolph-Tschebyscheff de $2M$ ou $2M+1$ éléments avec espacement d entre les éléments. Les lobes latéraux sont R_0 dB en dessous du maximum du lobe principal. Trouvez les coefficients d'excitation et formez le facteur d'alignement.

Procédure

a. Sélectionnez le facteur d'alignement approprié comme indiqué par (6-61a) ou (6-61b).

b. Développez le facteur d'alignement. Remplacer chaque fonction $\cos(mu)$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) par son développement en série appropriée trouvé dans (6.67).

c. Déterminer le point $z=z_0$ tel que $T_m(z_0)=R_0$ (rapport de tension). L'ordre m du polynôme de Tschebyscheff est toujours égal au nombre total d'éléments moins 1. La procédure de conception nécessite que le polynôme de Tschebyscheff dans l'intervalle $-1 \leq z \leq z_1$, où z_1 est le zéro le plus proche à $z=+1$, soit utilisé pour représenter les lobes secondaires du réseau. Le lobe principal du réseau est formé à partir de la partie restante du polynôme jusqu'au point z_1 ($z_1 \leq z \leq z_0$).

d. Remplacer

$$\cos(u) = \frac{z}{z_0} \quad (6.72)$$

dans le facteur d'alignement de l'étape b. Le $\cos(u)$ est remplacé par z/z_0 , et non par z , de sorte que (6.72) serait valide pour $|z| \leq z_0$. A $|z|=z_0$, (6.72) atteint sa valeur maximale d'unité.

e. Egaliser le facteur d'alignement de l'étape b, après substitution de (6.72), à un $T_m(z)$ de (6-69). Le $T_m(z)$ choisit devrait être d'ordre m où m est un nombre égal au nombre total d'éléments du réseau conçu moins un. Ceci permettra la détermination des coefficients d'excitation a_n .

f. Écrire le facteur d'alignement de (6-61a) ou (6-61b) en utilisant les coefficients trouvés à l'étape e.

Exemple 6.6

Faire la conception d'un réseau broadside de Dolph-Tchebyscheff de 10 éléments avec espacement d entre les éléments et un rapport entre le lobe principal au secondaire de 26 dB. Calculer les coefficients d'excitation et former le facteur d'alignement.

SOLUTION

1. Le facteur d'alignement est donné par (6.61.a) et (6.61.c). Soit

$$(AF)_{2M} = \sum_{n=1}^{M=5} a_n \cos[(2n-1)u]$$

$$u = \frac{\pi d}{\lambda} \cos \theta$$

2. Une fois développé, le facteur d'alignement peut s'écrire comme

$$(AF)_{10} = a_1 \cos(u) + a_2 \cos(3u) + a_3 \cos(5u) + a_4 \cos(7u) + a_5 \cos(9u)$$

Remplacer $\cos(u)$, $\cos(3u)$, $\cos(5u)$, $\cos(7u)$ et $\cos(9u)$ par leurs développements en série donnés par (6.63).

3. $R_0(dB) = 26 = 20 \log_{10}(R_0)$ où R_0 (rapport de tension) = 20. Déterminer Z_0 en égalisant R_0 à $T_9(z_0)$. Donc

$$R_0 = 20 = T_9(z_0) = \cosh \left[9 \cosh^{-1}(z_0) \right]$$

ou

$$z_0 = \cosh \left[\frac{1}{9} \cosh^{-1}(20) \right] = 1.0851$$

Une autre équation qui peut, en général, être utilisée pour calculer z_0 et ne nécessite pas les fonctions hyperboliques est

$$z_0 = \frac{1}{2} \left[\left(R_0 + \sqrt{R_0^2 - 1} \right)^{1/(N-1)} + \left(R_0 - \sqrt{R_0^2 - 1} \right)^{1/(N-1)} \right] \quad (6.73)$$

$R_0 = H_0/H_1$ et z_0 sont identifiés dans la Figure 6.22.

4. Substituer

$$\cos(u) = \frac{z}{z_0} = \frac{z}{1.0851}$$

dans le facteur d'alignement calculé dans l'étape 2.

5. Egaliser le facteur d'alignement de l'étape 2, après la substitution de l'étape 4, à $T_9(z)$. Le polynôme $T_9(z)$ est montré dans la Figure 6.22. Donc,

$$(AF)_{10} = a_1 \cos(u) + a_2 \cos(3u) + a_3 \cos(5u) + a_4 \cos(7u) + a_5 \cos(9u) = a_1 \frac{z}{z_0} + a_2 \left[4 \left(\frac{z}{z_0} \right)^3 - 3 \frac{z}{z_0} \right] + a_3 \left[16 \left(\frac{z}{z_0} \right)^5 - 20 \left(\frac{z}{z_0} \right)^3 + 6 \frac{z}{z_0} \right] + a_4 \left[64 \left(\frac{z}{z_0} \right)^7 - 112 \left(\frac{z}{z_0} \right)^5 + 56 \left(\frac{z}{z_0} \right)^3 - 7 \frac{z}{z_0} \right] + a_5 \left[256 \left(\frac{z}{z_0} \right)^9 - 576 \left(\frac{z}{z_0} \right)^7 + 432 \left(\frac{z}{z_0} \right)^5 - 120 \left(\frac{z}{z_0} \right)^3 + 9 \frac{z}{z_0} \right]$$

$$(AF)_{10} = \frac{a_1 - 3a_2 + 5a_3 - 7a_4 + 9a_5}{z_0} z + \frac{4a_2 - 20a_3 + 56a_4 - 120a_5}{z_0^3} z^3 + \frac{16a_3 - 112a_4 + 432a_5}{z_0^5} z^5 + \frac{64a_4 - 576a_5}{z_0^7} z^7 + \frac{256a_5}{z_0^9} z^9$$

En identifiant les termes similaires permet la détermination des a_n . Soit

$$256 a_5 / z_0^9 = 256 \quad a_5 = 2.0860$$

$$(64 a_4 - 576 a_5) / z_0^7 = -576 \quad a_4 = 2.8308$$

$$(16 a_3 - 112 a_4 + 432 a_5) / z_0^5 = 432 \quad a_3 = 4.1184$$

$$(4 a_2 - 20 a_3 + 56 a_4 - 120 a_5) / z_0^3 = -120 \quad a_2 = 5.2073$$

$$(a_1 - 3 a_2 + 5 a_3 - 7 a_4 + 9 a_5) / z_0 = 9 \quad a_1 = 5.8377$$

Sous forme normalisée, les coefficients a_n peuvent s'écrire comme

$$a_5 = 1 \quad a_5 = 0.357$$

$$a_4 = 1.357 \quad a_4 = 0.485$$

$$a_3 = 1.974 \quad \text{ou} \quad a_3 = 0.706$$

$$a_2 = 2.496 \quad a_2 = 0.890$$

$$a_1 = 2.798 \qquad a_1 = 1$$

Le premier ensemble (gauche) est normalisé par rapport à l'amplitude des éléments au bord tandis que l'autre (à droite) est normalisé par rapport à l'amplitude de l'élément central.

6. En utilisant le premier ensemble (gauche) de coefficients normalisés, le facteur d'alignement peut être écrit comme

$$(AF)_{10} = 2.798 \cos(u) + 2.496 \cos(3u) + 1.974 \cos(5u) + 1.357 \cos(7u) + \cos(9u)$$

$$\text{où } u = (\pi d / \lambda) \cos \theta$$

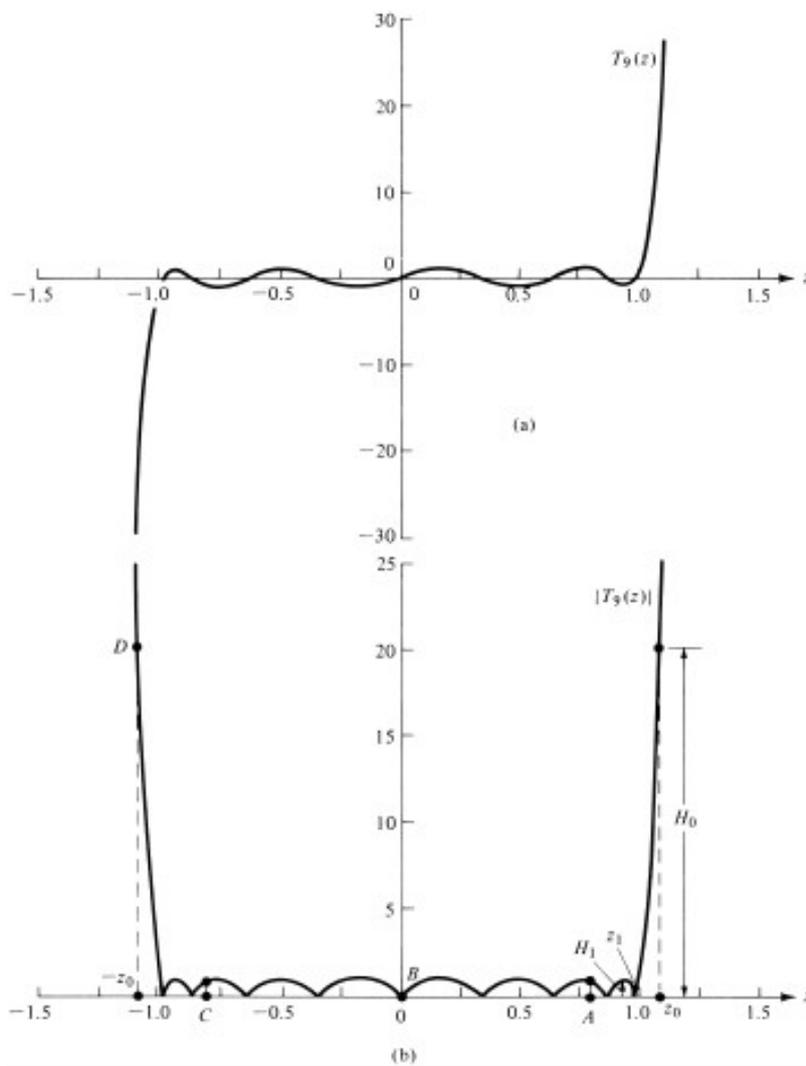


Figure 6.22 Polynôme de Tschebyscheff d'ordre neuf (a) amplitude (b) valeur absolue

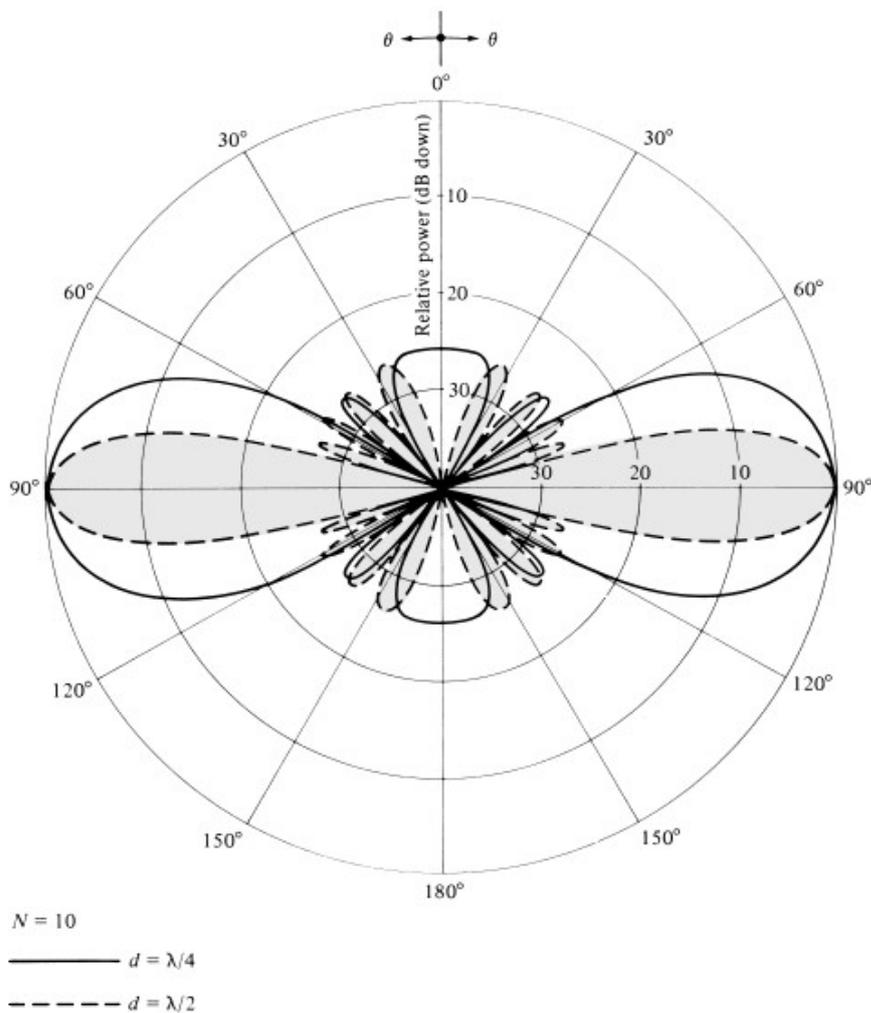


Figure 6.23 Diagramme de puissance du facteur d'alignement d'un réseau Dolph-Tschebyscheff à 10 éléments.

C. Largeur de bande et directivité

Pour le réseau de Dolph-Tschebyscheff, l'ouverture à 3 dB du faisceau est donnée par

$$HPBW = f \Theta_h \quad (6.74)$$

Où f est appelé facteur d'élargissement donné par

$$f = 1 + 0.636 \left\{ \frac{2}{R_0} \cosh \left[\sqrt{(\cosh^{-1} R_0)^2 - \pi^2} \right] \right\}^2 \quad (6.75)$$

et

$$\Theta_h = \cos^{-1} \left[\cos \theta_0 - 0.443 \frac{\lambda}{L+d} \right] - \cos^{-1} \left[\cos \theta_0 + 0.443 \frac{\lambda}{L+d} \right] \quad (6.76)$$

où L est la longueur du réseau et d l'espacement inter-élément.

La directivité est donnée par

$$D_0 = \frac{2R_0^2}{1 + (R_0^2 - 1) f \frac{\lambda}{L+d}} \quad (6.77)$$

7.3 Méthode polynomiale de Schelkunof

Une méthode propice à la synthèse de réseaux dont les diagrammes possèdent des zéros selon des directions souhaitées est celle introduite par Schelkunoff. Pour compléter la conception, cette méthode nécessite des informations sur le nombre de zéros et leurs emplacements. Le nombre d'éléments et leurs coefficients d'excitation sont ensuite dérivés. La formulation analytique de la technique suit.

En référence à la figure 6.5 (a), le facteur d'alignement pour une excitation d'un réseau à N éléments, à espacement égal, à amplitude non uniforme et à excitation de phase progressive donnée par (6.52) comme

$$AF = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)(kd \cos \theta + \beta)} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)\psi} \quad (7.1)$$

où a_n tient compte de l'amplitude d'excitation non uniforme de chaque élément. L'espacement entre les éléments est d et β le décalage de phase progressif.

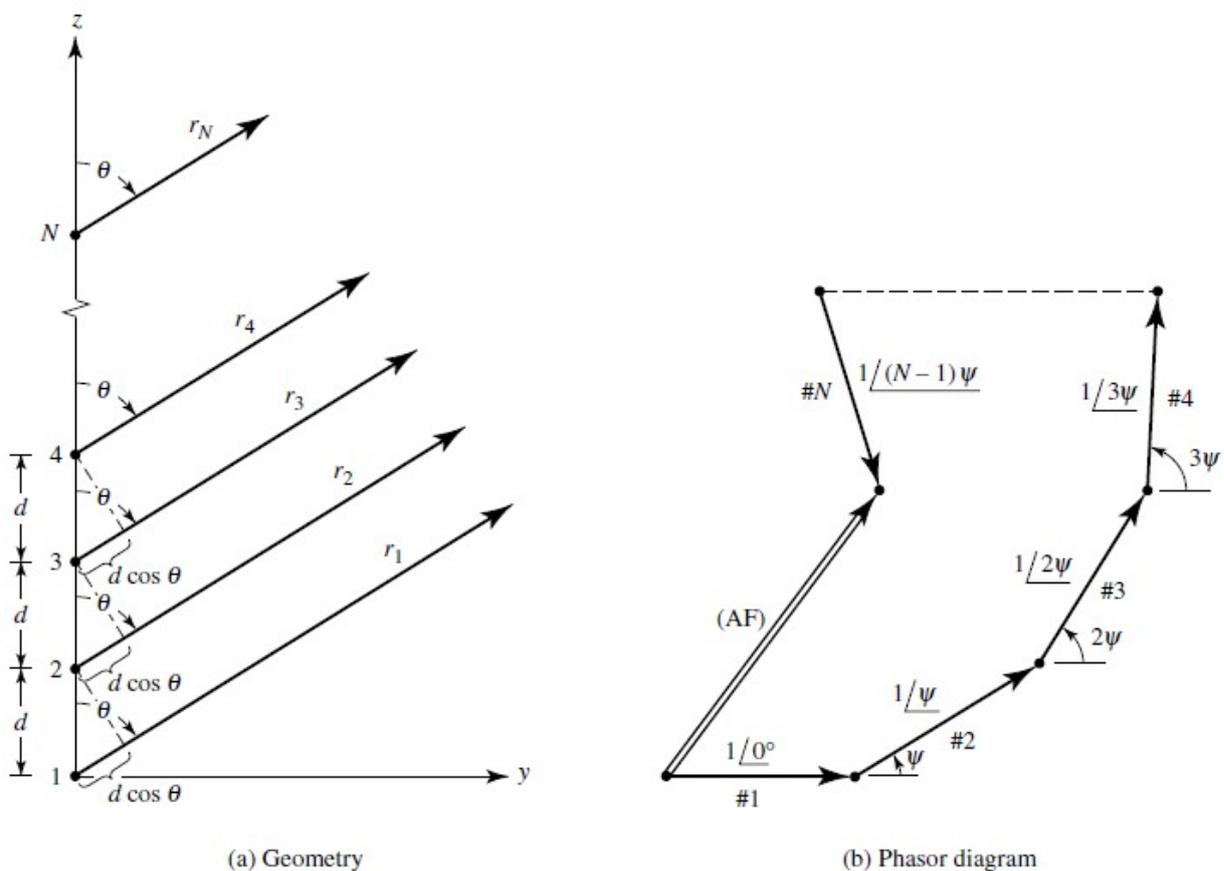


Figure 6.5 Géométrie champ lointain et diagramme phaseur d'un réseau de N sources isotropiques positionnées le long de l'axe z .

Mettant

$$z = x + jy = e^{j\psi} = e^{j(kd \cos \theta + \beta)} \quad (7.2)$$

on peut réécrire (7.1) comme

$$AF = \sum_{n=1}^N a_n z^{n-1} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_N z^{N-1} \quad (7.3)$$

Qui est un polynome de degré $(N-1)$, admettant $(N-1)$ racines et donc peut s'exprimer comme le produit de $(N-1)$ termes linéaires.

$$AF = a_N (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_{N-1}) \quad (7.4)$$

où $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{N-1}$ sont les racines, qui peuvent être complexes, du polynome.

La valeur absolue de (7.4) peut s'écrire comme

$$|AF| = |a_N| |z - z_1| |z - z_2| |z - z_3| \dots |z - z_{N-1}| \quad (7.5)$$

Quelques observations très intéressantes peuvent être tirées de (7-5) qui peuvent être utilisées judicieusement pour l'analyse et la synthèse de réseaux. Avant d'aborder cette phase du problème, revenons d'abord sur les propriétés de (7-2).

La variable complexe z de (7-2) peut être écrite sous une autre forme

$$z = |z| e^{j\psi} = |z| \angle \psi = 1 \angle \psi \quad (7.6)$$

$$\psi = kd \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta \quad (7.7. a)$$

Il est clair que pour toute valeur de d , θ ou β , l'amplitude de z est toujours sur un cercle unitaire; cependant, sa phase dépend de d , θ , et β . Pour $\beta = 0$, nous avons tracé sur les Figures 7-2 (a) - (d) la valeur de z , l'amplitude et la phase, puisque θ prend des valeurs de 0 à π rad. On observe que pour $d = \lambda/8$ les valeurs de z , pour tous les angles de θ physiquement observables, n'existent que sur la partie du cercle montrée à la Figure 7.2 (a). Toutes les valeurs de z en dehors de cet arc ne sont réalisables par aucun angle d'observation physique θ pour l'espacement $d = \lambda/8$. Nous nous référons à la partie réalisable du cercle comme la *région visible* (Visible Region; VR) et le reste comme la *région invisible* (Invisible Region; IR). Dans la Figure 7.2 (a), nous observons également le chemin des valeurs de z lorsque θ change de 0° à 180° .

Dans les Figures 7.2 (b) - (d), nous avons tracé les valeurs de z lorsque l'espacement entre les éléments est $\lambda/4$, $\lambda/2$ et $3\lambda/4$. Il est évident que la région visible peut être étendue en augmentant l'espacement entre les éléments. Il faut un espacement d'au moins $\lambda/2$ pour englober, au moins une fois, le cercle entier. Tout espacement supérieur à $\lambda/2$ conduit à plusieurs valeurs pour z .

Dans la Figure 7.2 (d), nous avons des valeurs doubles pour z pour la moitié du cercle lorsque $d = 3\lambda/4$.

Cas #a : $d = \lambda/8, \beta = 0$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta + 0 = \frac{\pi}{4} \cos \theta$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$\frac{-\pi}{4} \leq \psi = \frac{\pi}{4} \cos \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{La région invisible (IR) est : } \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

Cas #b : $d = \lambda/4, \beta = 0$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \cos \theta + 0 = \frac{\pi}{2} \cos \theta$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$\frac{-\pi}{2} \leq \psi = \frac{\pi}{2} \cos \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{La région invisible (IR) est : } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Cas #c : $d = \lambda/2, \beta = 0$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos \theta + 0 = \pi \cos \theta$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$-\pi \leq \psi = \pi \cos \theta \leq \pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\pi \leq \psi \leq \pi \\ \text{La région invisible (IR) est : ensemble vide} \end{array} \right.$$

Cas #d : $d = 3\lambda/4, \beta = 0$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{4} \cos \theta + 0 = \frac{3}{2} \pi \cos \theta$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$\frac{-3\pi}{2} \leq \psi = \frac{3\pi}{2} \cos \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\pi \leq \psi \leq \pi \\ \text{La région invisible (IR) est : ensemble vide} \end{array} \right.$

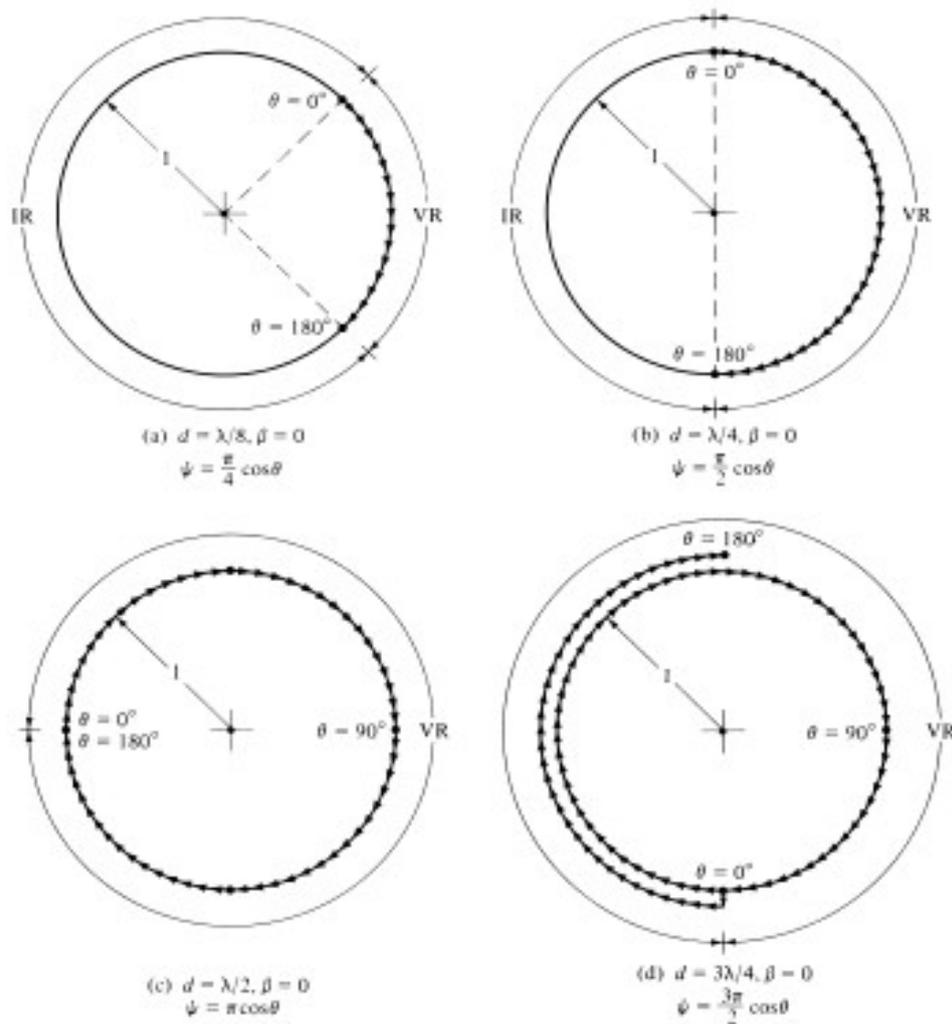


Figure 7.2 Frontières des Région Visible (VR) et Région Invisible (IR) pour la variable complexe z lorsque $\beta = 0$.

Pour illustrer la polyvalence des réseaux, nous avons représenté sur les Figures 7.3 (a) à (d) les valeurs de z pour les mêmes espacements que dans la figure 7.2 (a) - (d) mais avec $\beta = \pi/4$. Une comparaison entre les Figures correspondantes indique que la région visible globale pour chaque

espacement n'a pas changé mais que sa position relative sur le cercle unité a tourné dans le sens antihoraire d'une quantité égale à β .

On peut alors conclure que l'étendue globale de la région visible peut être contrôlée par l'espacement entre les éléments et sa position relative sur le cercle unité par l'excitation en phase progressive des éléments. Ces deux peuvent être utilisés efficacement dans la conception des facteurs de réseau ou d'alignement.

Cas #a : $d = \lambda/8$, $\beta = \pi/4$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cos \theta + \frac{\pi}{4}$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$0 \leq \psi = \frac{\pi}{4} \cos \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{La région invisible (IR) est : } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq 0 \end{array} \right.$$

Cas #b : $d = \lambda/4$, $\beta = \pi/4$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \cos \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cos \theta + \frac{\pi}{4}$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$-\frac{\pi}{4} \leq \psi = \frac{\pi}{2} \cos \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{4} \\ \text{La région invisible (IR) est : } \frac{3\pi}{4} \leq \psi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

Cas #c : $d = \lambda/2$, $\beta = \pi/4$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos \theta + \frac{\pi}{4} = \pi \cos \theta + \frac{\pi}{4}$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \psi = \pi \cos \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La région visible (VR) est : } -\frac{3\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{5\pi}{4} \\ \text{La région invisible (IR) est : ensemble vide} \end{array} \right.$$

Cas #d : $d = 3\lambda/4$, $\beta = \pi/4$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{4} \cos \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi \cos \theta + \frac{\pi}{4}$$

sachant que : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, alors

$$-\frac{5\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} \cos \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$$

La région visible (VR) est : $-\frac{5\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{7\pi}{4}$
 La région invisible (IR) est : ensemble vide

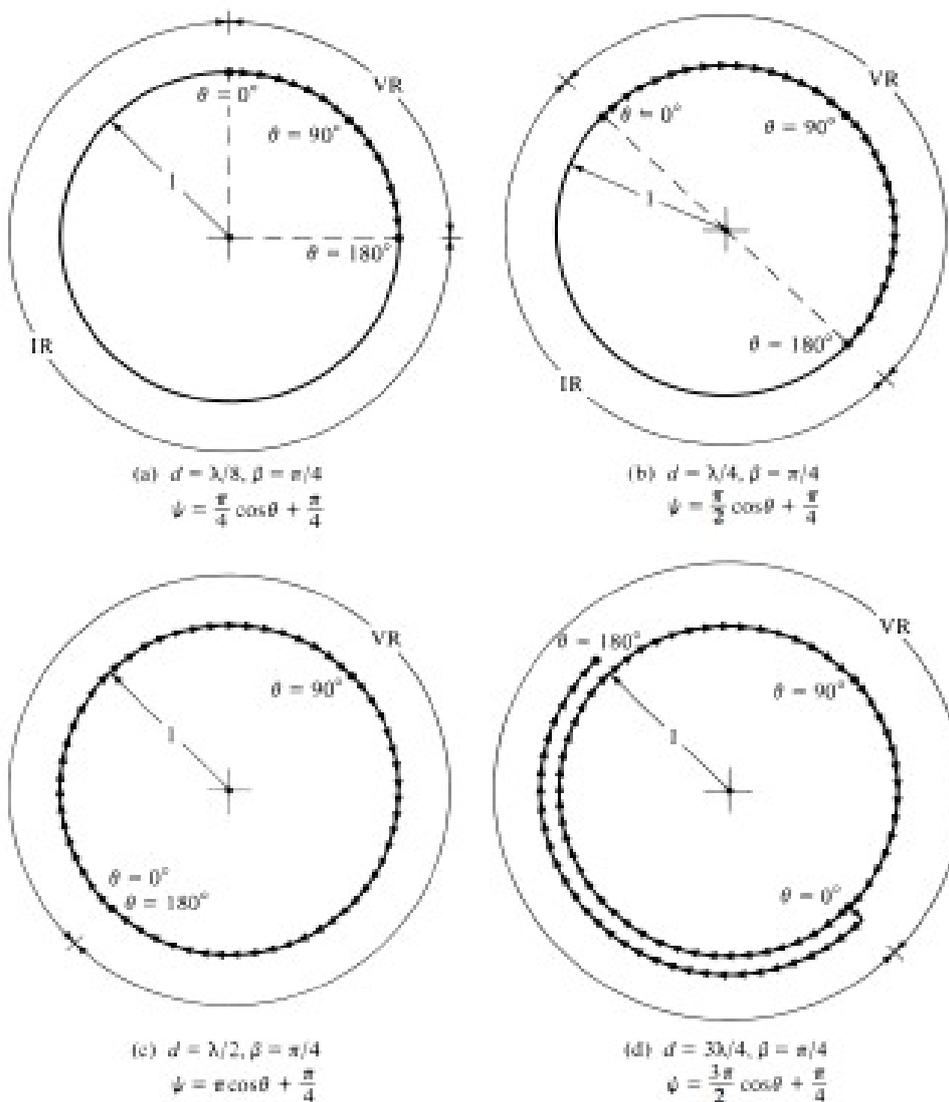
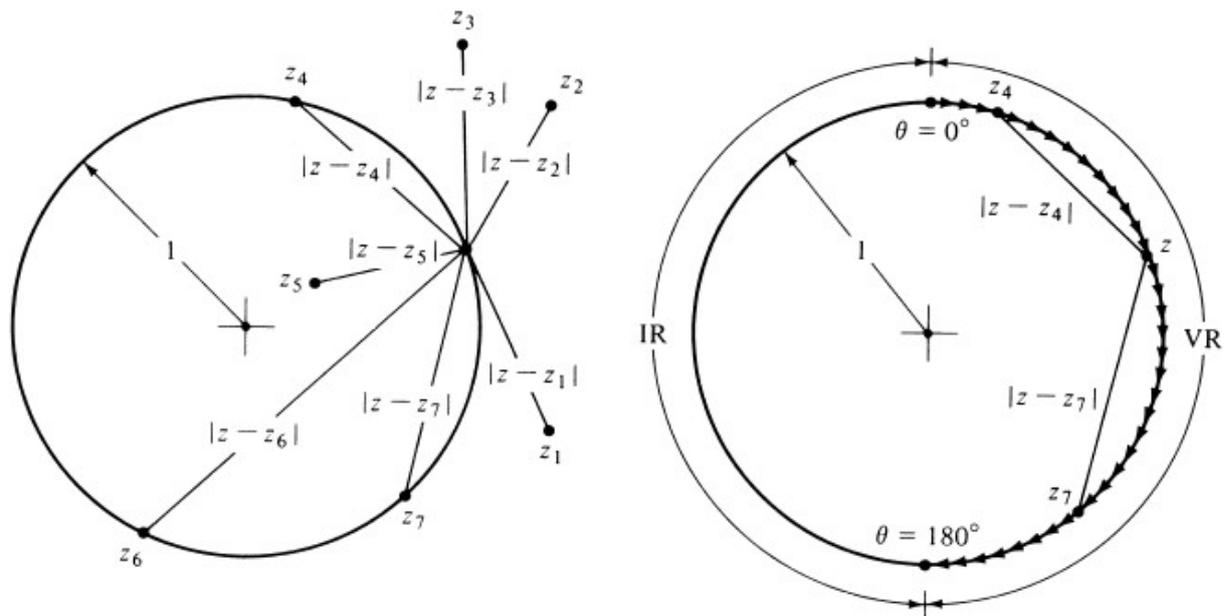


Figure 7.3 Frontières des Région Visible (VR) et Région Invisible (IR) pour la variable complexe z lorsque $\beta = \pi/4$.

Maintenant revenons à (7-5). Le module du facteur d'alignement, sa forme comme montrée dans (7-5), a une interprétation géométrique. Pour une valeur donnée de z dans la région visible du cercle unité, correspondant à une valeur de θ déterminée par (7-2), $|AF|$ est proportionnel au produit des distances entre z et $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{N-1}$, les racines de AF. De plus, à une constante près, la phase de AF est égale à la somme des phases entre z et chacun des zéros (racines). Ceci est le mieux démontré géométriquement dans la Figure 7.4 (a). Si toutes les racines $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{N-1}$ sont situées dans la région visible du cercle unité, alors chacun correspond à un zéro dans le diagramme de $|AF|$ parce que si θ change z change aussi et finit par passer par chacun des z_n . Quand il le fait, la longueur entre z et z_n est nulle et (7-5) s'annule. Lorsque tous les zéros (racines) ne sont pas dans la région visible du cercle unité, mais que certains se trouvent à l'extérieur et/ou tout autre point ne se trouvant pas sur le cercle unité, seuls les zéros sur la zone visible contribuent aux zéros du diagramme. Ceci est représenté géométriquement sur la Figure 7.4 (b). S'il n'y a pas de zéros dans la région visible du cercle unité, alors ce facteur d'alignement particulier n'a pas de valeur nulle pour toute valeur de θ . Cependant, si un zéro donné se trouve sur le cercle unité mais pas dans sa région visible, ce zéro peut être inclus dans le motif en changeant l'excitation de phase β de telle sorte que la région visible soit tournée jusqu'à englober cette racine. Faire cela, et ne pas changer d , peut exclure d'autre(s) zéro(s).



(a) Racines du facteur d'alignement

(b) Racines du facteur d'alignement sur le cercle unité et dans la région visible

Figure 7.4 Racines du facteur d'alignement à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, et les régions visible et invisible.

Pour démontrer tous les principes, nous allons considérer un exemple avec quelques calculs.

Exemple 7.1

Concevoir un réseau linéaire avec un espacement entre les éléments de $d = \lambda/4$ tel qu'il a des zéros à $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ et 180° . Déterminer le nombre d'éléments, leur excitation, et tracer le diagramme calculé. Utilisez la méthode de Schelkunoff.

SOLUTION : Pour un espacement de $\lambda/4$ entre les éléments et un déphasage $\beta = 0^\circ$, la région visible est représentée sur la Figure 7.2 (b). Si les zéros souhaités du facteur d'alignement doivent apparaître à $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ et 180° , ils correspondent à $z = j, 1, -j$ sur le cercle unité. Ainsi, une forme normalisée du facteur d'alignement est donnée par

$$AF = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - j)(z - 1)(z + j)$$

$$AF = z^3 - z^2 + z - 1$$

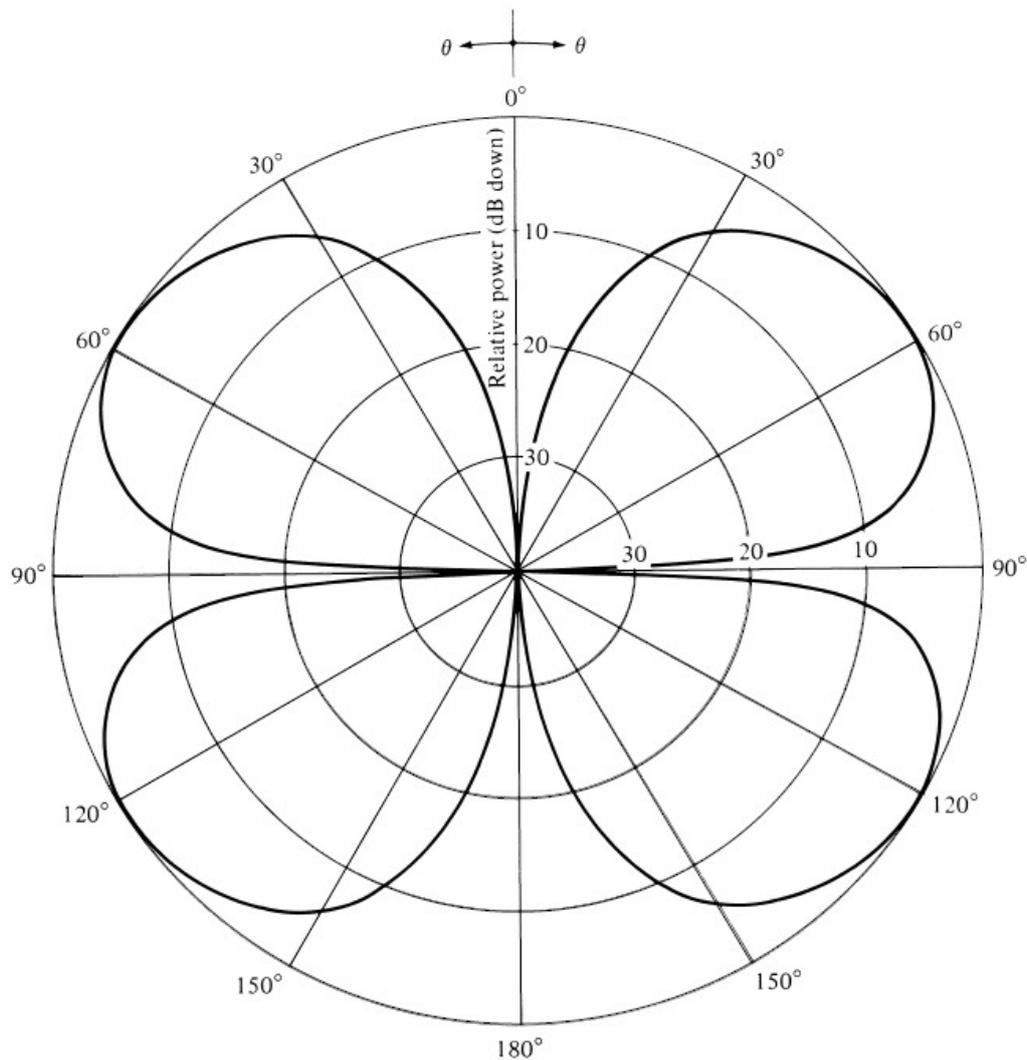


Figure 7.5. Diagramme de rayonnement en amplitude d'un réseau à quatre éléments de sources isotropiques avec un espacement de $\lambda/4$ entre eux, décalage de phase progressif de zéro degré, et des zéros de rayonnement en $\theta = 0^\circ$, 90° et 180° .

En référence à (7-3), le facteur de réseau ci-dessus et les caractéristiques de rayonnement souhaitées peuvent être réalisés lorsqu'il y a quatre éléments et que leurs coefficients d'excitation sont égaux à:

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = +1$$

$$a_3 = -1$$

$$a_4 = +1$$

Pour illustrer la méthode, nous avons tracé dans la Figure 7.5 le diagramme de ce réseau; il répond clairement aux spécifications souhaitées. En raison de la symétrie du réseau, le diagramme de l'hémisphère gauche est identique à celui de la droite.

7.4 Méthode de la transformée de Fourier

Cette méthode peut être utilisée pour déterminer, à partir d'une description complète du motif désiré, la distribution d'excitation d'un système d'antenne source continu ou discret. L'excitation dérivée donnera, soit exactement soit approximativement, le diagramme d'antenne désiré. La synthèse de modèle utilisant cette méthode est appelée mise en forme de faisceau.

7.4.1 Source filaire

Les distributions source filaire continues sont des fonctions d'une seule coordonnée, et elles peuvent être utilisées pour approximer des réseaux linéaires d'éléments discrets et vice-versa. Le facteur d'alignement d'un réseau d'éléments discrets, placés le long de l'axe z , est donné par (6-52) et (6-52a). Lorsque le nombre d'éléments augmente dans un réseau de longueur fixe, la source se rapproche d'une distribution continue. A la limite, la somme des facteurs d'alignement se réduit à une intégrale. Pour une distribution continue, le facteur qui correspond au facteur

d'alignement est connu sous le nom de facteur d'espace (Space Factor; SF). Pour une distribution de source linéaire de longueur l placée symétriquement le long de l'axe z comme le montre la Figure 7.1 (a), le facteur d'espace (SF) est donné par

$$SF(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I_n(z') e^{j[kz' \cos\theta + \phi_n(z')]} dz' \quad (7.1)$$

où $I_n(z')$ et $\phi_n(z')$ représentent, respectivement, les distributions d'amplitude et de phase le long de la source. Pour une distribution de phase uniforme $\phi_n(z')=0$.

L'équation (7-1) est une transformée de Fourier unidimensionnelle finie reliant le diagramme de champ lointain de la source à sa distribution d'excitation

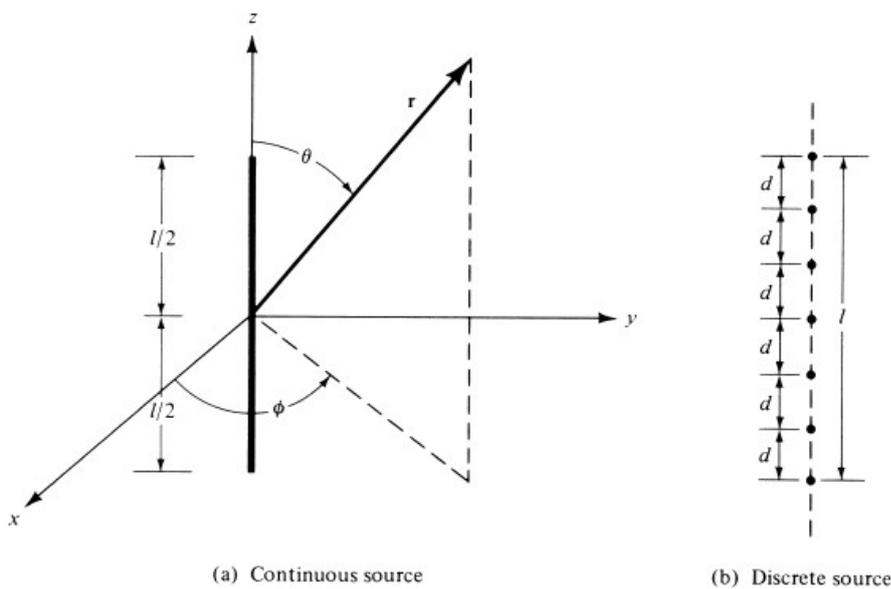


Figure 7.1 Sources linéaires continues et discrètes.

Pour une distribution continue de source linéaire de longueur l , comme indiqué dans la Figure 7.1, le facteur d'espace normalisé de (7-1) peut être écrit comme

$$SF(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{j[k \cos\theta - k_z]z'} dz' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') e^{j\xi z'} dz' \quad (7.2)$$

$$\xi = k \cos\theta - k_z \implies \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\xi + k_z}{k} \right) \quad (7.3)$$

où k_z est la constante de phase de la source d'excitation. Pour une distribution normalisée de courant uniforme de la forme $I(z')=I_0/l$, l'équation (7. 2) s'écrit

$$SF(\theta) = I_0 \frac{\sin \left[\frac{kl}{2} \left(\cos\theta - \frac{k_z}{k} \right) \right]}{\frac{kl}{2} \left(\cos\theta - \frac{k_z}{k} \right)} \quad (7.4)$$

L'angle d'observation θ de (7.4) aura des valeurs réelles (région visible) pourvu que $-(k+k_z) \leq \xi \leq (k-k_z)$ tel qu'obtenu à partir de (7.3). Puisque la distribution de courant (7.2) ne s'étend que sur $-l/2 \leq z' \leq l/2$ (et elle est nulle en dehors de celle-ci), les limites peuvent être étendues à l'infini et (7.2) peut être écrite comme

$$SF(\theta) = SF(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z') e^{j\xi z'} dz' \quad (7.5)$$

La forme (7.5) est une transformée de Fourier, et elle relie la distribution d'excitation $I(z')$ d'une source continue au facteur d'espace de son champ lointain $SF(\theta)$. La paire de transformées de (7.5) est donnée par

$$I(z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} SF(\xi) e^{-jz'\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} SF(\theta) e^{-jz'\xi} d\xi \quad (7.6)$$

Si (7.5) représente la transformée directe et (7.6) la transformée inverse, ou vice-versa, cela n'a pas d'importance ici. Le plus important est que la distribution d'excitation et le facteur d'espace du champ lointain sont liés par des transformées de Fourier. L'équation (7.6) indique que si $SF(\theta)$ représente le diagramme désiré, la distribution d'excitation $I(z')$ qui donnera le diagramme désiré exact doit en général existe pour toutes les valeurs de $z' (-\infty \leq z' \leq \infty)$. Puisque physiquement, seules les sources de dimensions finies sont réalisables, la distribution d'excitation de (7.6) est généralement tronquée à $z' = \pm l/2$ (au-delà de $z' = \pm l/2$, elle est mise à zéro). Donc, la distribution approchée de la source est donnée par

$$I_a(z') \cong \begin{cases} I(z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} SF(\xi) e^{-jz'\xi} d\xi, \wedge -l/2 \leq z' \leq l/2 \\ 0, \wedge \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.7)$$

et elle donne un diagramme approché $SF(\theta)_a$. Le diagramme approché est utilisé pour représenter, avec une certaine erreur, le diagramme désiré $SF(\theta)_d$. Ainsi

$$SF(\theta)_d \cong SF(\theta)_a = \int_{-l/2}^{l/2} I_a(z') e^{j\xi z'} dz' \quad (7.8)$$

On peut montrer que, sur toutes les valeurs de ξ , le diagramme approché synthétisé $SF(\theta)_a$ donne l'erreur ou la déviation au sens du moindre carré par rapport au diagramme désiré $SF(\theta)_d$. Cependant, ce critère n'est pas satisfait lorsque les valeurs de ξ sont limitées seulement dans la région visible.

Pour illustrer les principes de cette méthode de conception, un exemple est pris.

Exemple 7.2

Déterminer la distribution du courant et le diagramme de rayonnement approché d'une source-filaire placée le long de l'axe z dont le diagramme de rayonnement désiré est symétrique par rapport à $\theta = \pi/2$, et qui est donné par

$$SF(\theta) = \begin{cases} 1, \wedge \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 \\ 0, \wedge \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ceci est appelé diagramme sectoriel, et il est largement utilisé dans les applications de recherche et de communication radar.

SOLUTION

Puisque le diagramme est symétrique, $k_z = 0$. Les valeurs de ξ , déterminées par (7.3), sont données par $k/\sqrt{2} \geq \xi \geq -k/\sqrt{2}$. À son tour, la distribution de courant est donnée par (7.6) ou

$$I(z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} SF(\xi) e^{-jz'\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-k/\sqrt{2}}^{k/\sqrt{2}} e^{-jz'\xi} d\xi = SF(\theta) = \frac{k}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{\sin\left(\frac{kz'}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{kz'}{\sqrt{2}}} \right]$$

et il existe sur toutes les valeurs de z' ($-\infty \leq z' \leq \infty$). Sur l'étendue de la source linéaire, la distribution de courant est estimée par

$$I_a(z') \cong I(z'), -l/2 \leq z' \leq l/2$$

Si la distribution de courant dérivée $I(z')$ est utilisée en conjonction avec (7.5) et qu'il est supposé exister sur toutes les valeurs de z , le diagramme sectoriel exact et désiré sera obtenu. Si toutefois il est tronqué à $z' = \pm l/2$ (et supposé être nul à l'extérieur), alors le diagramme désiré est approximé par (7.8) ou

$$SF(\theta)_d \cong SF(\theta)_a = \int_{-l/2}^{l/2} I_a(z') e^{j\xi z'} dz' = \frac{1}{\pi} \left\{ S_i \left[\frac{l}{\lambda} \pi \left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] - S_i \left[\frac{l}{\lambda} \pi \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}$$

où $S_i(x)$ est le sinus intégral.

La distribution approchée du courant (normalisée de sorte que son maximum est égal à l'unité) est représentée sur la Figure 7.6 (a) pour $l = 5\lambda$ et $l = 10\lambda$. Les diagrammes normalisés approchés correspondants sont montrés sur la Figure 7.6 (b) où ils sont comparés avec le diagramme désiré. Une très bonne reconstruction est indiquée. La plus longue source filaire ($l = 10\lambda$) fournit une meilleure réalisation. Les lobes secondaires mesurent environ 0.102 (-19,83 dB) pour $l = 5\lambda$ et 0.081 (-21,83 dB) pour $l = 10\lambda$ (par rapport au modèle $\theta = 90^\circ$).

Exercice n°1

Un dipôle électrique infinitésimal horizontal de courant constant I_0 est placé symétriquement par rapport à l'origine et dirigé le long de l'axe x . Calculer

- (a) Les champs lointains rayonnés par le dipôle
- (b) La directivité de l'antenne

Exercice n°2

Refaire l'exercice n°1 pour un dipôle électrique infinitésimal horizontal dirigé le long de l'axe y .

Exercice n°3

Refaire l'exercice n°1 en utilisant la procédure de l'exemple 4.5.

Exercice n°4

Pour l'exemple 4.5,

- (a) Formuler une expression pour la directivité.
- (b) Déterminer la puissance rayonnée.
- (c) Déterminer la directivité maximale par l'intégration de la puissance rayonnée. Comparer avec celle de l'exercice n°2 ou tout autre dipôle infinitésimal.
- (d) Déterminer la directivité maximale en utilisant le programme **Dipole** ; comparer avec celle de la partie (c).

Exercice n°5

Pour l'exercice n°1, déterminer la polarisation des champs électriques rayonnés (E_θ, E_ϕ) en zone lointaine et l'amplitude normalisée du diagramme dans les plans suivants :

- (a) $\phi = 0^\circ$
- (b) $\phi = 90^\circ$
- (c) $\theta = 90^\circ$

Exercice n°6

Refaire l'exercice n°5 pour un dipôle électrique infinitésimal horizontal de l'exercice n°2, qui est dirigé selon l'axe y .

Exercice n°7

Pour l'exercice n° 3, déterminer la polarisation des champs rayonnés (E_θ, E_ϕ) en zone lointaine dans les plans suivants :

(b) $\phi = 0^\circ$ (b) $\phi = 90^\circ$ (c) $\theta = 90^\circ$

Comparer avec celles de l'exercice n°5.

Exercice n°8

Pour l'exercice n° 5, déterminer la polarisation des champs rayonnés (E_θ, E_ϕ) en zone lointaine dans les plans suivants :

(c) $\phi = 0^\circ$ (b) $\phi = 90^\circ$ (c) $\theta = 90^\circ$

Comparer avec celles de l'exercice n°6.

Exercice n°11

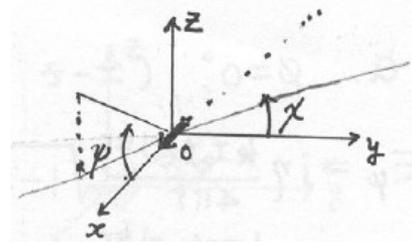
Un dipôle électrique infinitésimal est centré à l'origine et se situe dans le plan x - y selon une ligne qui est à un angle de 45° par rapport à l'axe x . Trouver les champs électrique et magnétique rayonnés en zone lointaine. La réponse doit être une fonction des coordonnées sphériques.

Exercice n°1

(a).

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - |\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r|^2}$$

$$= \sqrt{1 - (\sin \theta \cos \phi)^2}$$



Les champs lointains sont

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}$$

$$H_x = j \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \psi = \frac{E_\psi}{\eta}$$

(b).

$$U = U_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi)$$

$$\therefore P_{rad} = U_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{8\pi}{3} U_0$$

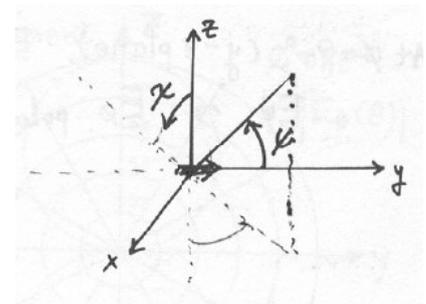
$$D_0 = \frac{4\pi U_0}{P_{rad}} = \frac{4\pi U_0}{\frac{8\pi}{3} U_0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Exercice n°2

(a).

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - |\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r|^2}$$

$$= \sqrt{1 - (\sin \theta \sin \phi)^2}$$



Les champs lointains sont

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}$$

$$H_x = \frac{E_\psi}{\eta} = j \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}$$

(b).

$$U = U_0 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi)$$

$$\therefore P_{rad} = U_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \sin \theta d\theta d\phi = U_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\int_{\theta=0}^{\pi} (\sin \theta - \sin^3 \theta \sin^2 \phi) d\theta \right] d\phi = U_0 \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} 2 d\phi - \frac{4}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \right]$$

$$D_0 = \frac{4\pi U_0}{P_{rad}} = \frac{4\pi U_0}{\frac{8\pi}{3} U_0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

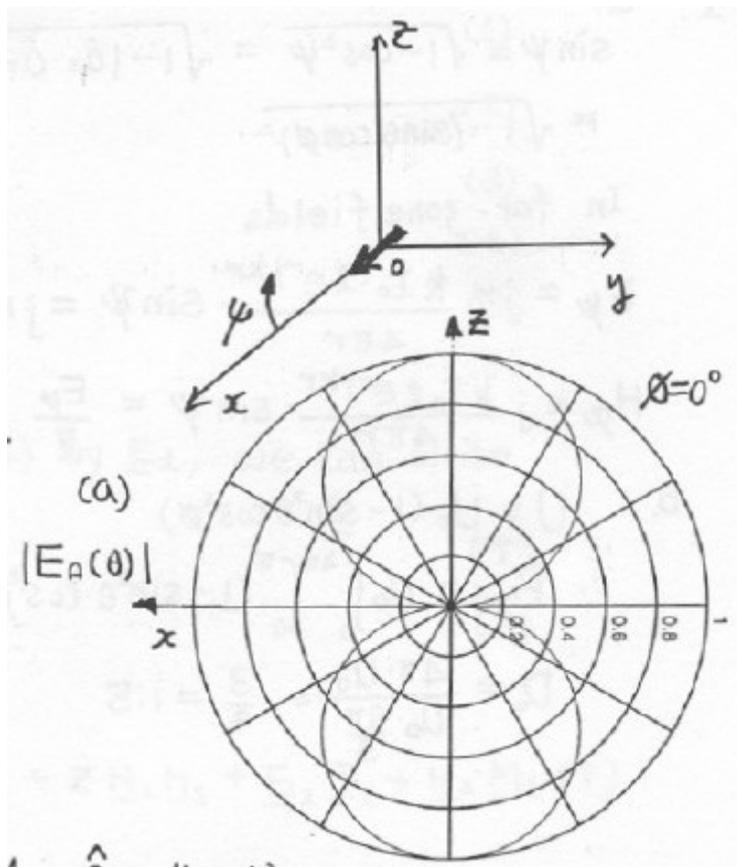
Exercice n°3

(a). $\phi = 0^\circ$; (plan x - z)

$$E_\psi = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \theta$$

En $\phi = 0^\circ$; E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_θ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_θ .



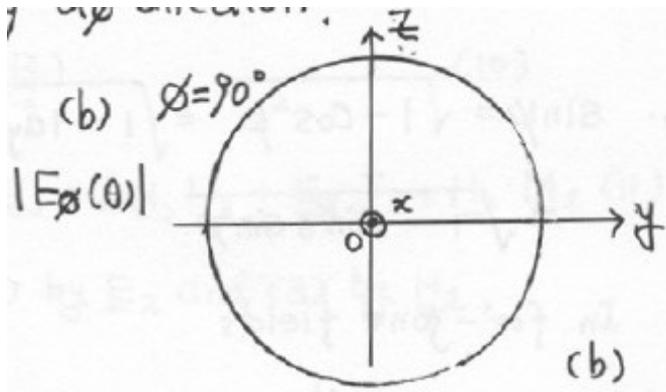
(b). $\phi = 90^\circ$; (plan y - z)

$$E_\psi = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} 1$$

Solution SERIE DE TD N° 2

En $\phi = 90^\circ$, E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_ϕ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_ϕ .

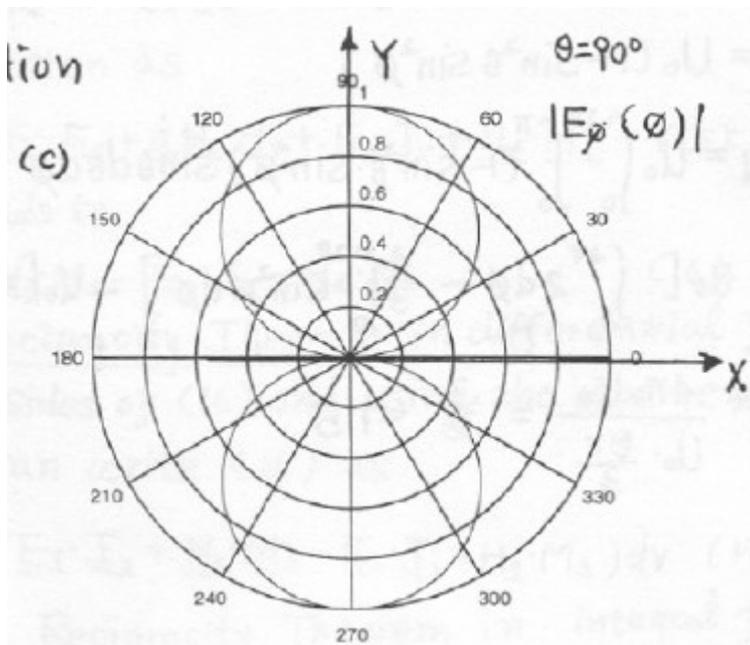


(c). $\theta = 90^\circ$; (plan x-y)

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \phi$$

En $\theta = 90^\circ$, E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_ϕ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_ϕ .



Exercice n°4

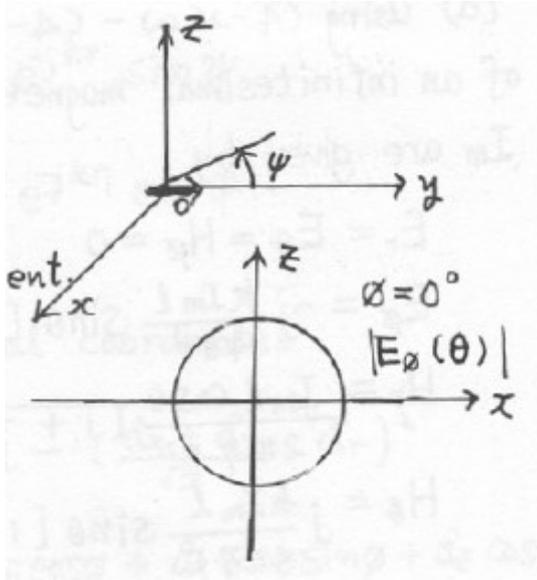
(a). $\phi = 0^\circ$; (plan x-z)

Solution SERIE DE TD N° 2

$$E_\psi = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{a}_\psi$$

En $\phi = 0^\circ$; E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_ϕ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_ϕ .

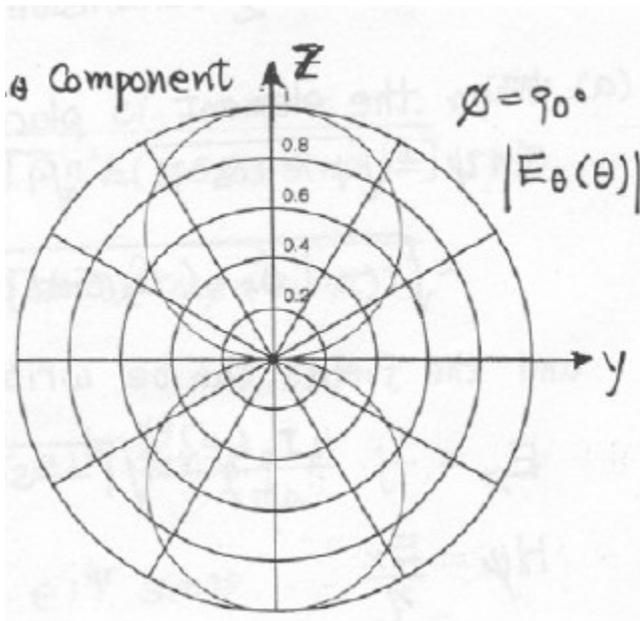


(b). $\phi = 90^\circ$; (plan y - z)

$$E_\psi = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \theta$$

En $\phi = 90^\circ$; E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_θ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_θ .



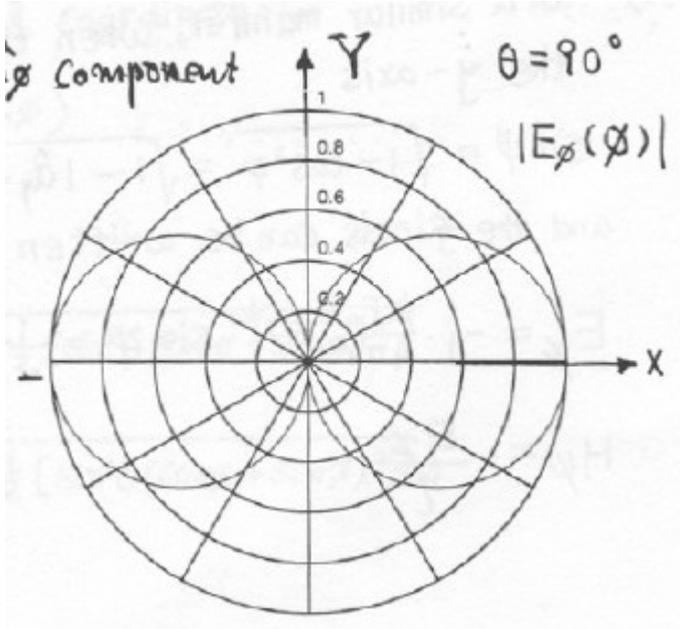
(c). $\theta = 90^\circ$; (plan x - y)

Solution SERIE DE TD N° 2

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \phi$$

En $\theta = 90^\circ$, E_ψ possède seulement la direction \hat{a}_ϕ .

La polarisation de E_ψ est celle de E_ϕ .



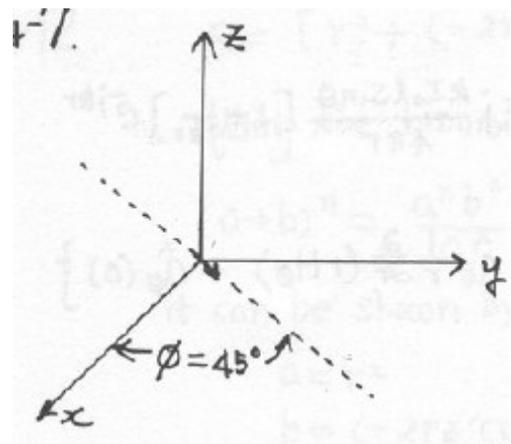
Exercice n°7

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \psi$$

$$H_x = j \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \psi = \frac{E_\psi}{\eta}$$

Convertir ψ en coordonnées sphériques

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}} \cdot \hat{a}_r \right)^2}$$



$$\frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}} \cdot \hat{a}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x + \hat{a}_y) \cdot (\hat{a}_x \sin \theta \cos \phi + \hat{a}_y \sin \theta \sin \phi + \hat{a}_z \cos \theta)$$

$$i \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta (\cos \phi + \sin \phi)$$

$$\cos^2 \psi = \left(\frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}} \cdot \hat{a}_r \right)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2$$

Donc

$$E_\psi = j\eta \frac{k I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \psi = j\eta \frac{k I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2}$$

$$H_\chi = j \frac{k I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \psi = j \frac{k I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2}$$

Exercice n°9

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H$$

$$\text{Avec : } H_r = H_\theta = 0, H_\phi = j \frac{k I_0 l \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr}$$

Puisque H n'est pas une fonction de ϕ

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \sin \theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) + \hat{a}_\phi (0) \right\}$$

qui se réduit en utilisant la forme de H_ϕ ci-dessus en

$$E_r = \eta \frac{I_0 l \sin \theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr}$$

$$E_\theta = j\eta \frac{k I_0 l \sin \theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr}$$

$$E_\phi = 0$$

Exercice n°10

$$W_{ave} = \frac{1}{2} \Re [E \times H^i] = \frac{1}{2} \Re [\hat{a}_\theta E_\theta \times \hat{a}_\phi H_\phi^i] = \frac{1}{2} \Re \left[\hat{a}_\theta E_\theta \times \hat{a}_\phi \frac{E_\theta^i}{\eta} \right] = \hat{a}_r \frac{1}{2\eta} \Re (|E_\theta|^2) = \hat{a}_r \frac{|E_\theta|^2}{2\eta} = \hat{a}_r W_r$$

$$W_r = \left[\frac{\eta}{2} \left| \frac{k I_0 l}{4\pi} \right|^2 \right] \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = W_0 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \text{ avec } W_0 = \frac{\eta}{2} \left| \frac{k I_0 l}{4\pi} \right|^2$$

$$P_{rad} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} W_{ave} \cdot \hat{a}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi W_0 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 2\pi W_0 \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$P_{rad} = \frac{8\pi}{3} W_0 = \eta \left(\frac{\pi}{3} \right) \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2$$

Exercice n°11

$$A = \hat{a}_z A_z = \hat{a}_z \frac{\mu I_0 l}{4 \pi r} e^{-jkr} \Rightarrow A_z = \frac{\mu I_0 l}{4 \pi r} e^{-jkr}$$

En utilisant (4-6a)-(4-6c)

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi r} \cos \theta = A'_r(\theta) \frac{e^{-jkr}}{r} \Rightarrow A'_r(\theta) = \frac{\mu I_0 l}{4 \pi} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = \frac{-\mu I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi r} \sin \theta = A'_\theta(\theta) \frac{e^{-jkr}}{r} \Rightarrow A'_\theta(\theta) = \frac{-\mu I_0 l}{4 \pi} \sin \theta$$

$$A_\phi = 0 \Rightarrow A'_\phi(\theta) = 0$$

Substituant celles-ci dans (3-57) et (3-57a) se réduit à

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = -j\omega \frac{e^{-jkr}}{r} A'_\theta = j \frac{\omega \mu I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi r} \sin \theta = j\eta \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi r} \sin \theta$$

$$E_\phi = -j\omega \frac{e^{-jkr}}{r} A'_\phi = 0$$

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = j \frac{\omega}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{r} A'_\phi = 0$$

$$H_\phi = -j \frac{\omega}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{r} A'_\theta = j \frac{\omega \mu I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi \eta r} \sin \theta = j \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4 \pi r} \sin \theta$$

qui sont identiques à (4-26a)-(4-26c).