TP 01 : Séries de Fourier et Transformée de Fourier des signaux discrets

Note

Chaque groupe doit rédiger un compte rendu. Pour se faire, chaque groupe doit copier toutes les figures dans un document Word. De plus, un compte rendu doit contenir tous les programmes, le calcul analytique, les commentaires, les démonstrations, les résultats, ainsi que les conclusions. Les comptes rendus doivent être dressé à l'enseignent lors de la prochaine séance de TP.

1- Représentation d'un signal discret en fonction des séries de Fourier.

Le développement en série de Fourier d'un signal discret est donné par :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k \, e^{j2\pi kn/N} \, , avec:$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \, e^{-j2\pi k \;\; /N}$$

$\{c_k\}$: sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier de $s(n)$.

1. Ecrire un programme pour représenter graphiquement la séquence $s_1(n)$ (définie sur une période ci-dessous) et son développement en série de Fourier pour *M=4* (nombre d'harmoniques):

$$s_1(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cos\left(2\pi\dfrac{n}{41}\right) & pour \quad -20 \le n \le 20 \\ 0 \quad pour & -40 \le |n| \le -21 \end{cases},$$

2. Représenter graphiquement le développement de la série de Fourier (pour *M=8, 16, 32, 64, 128, 512* et *1024*) de la séquence $s_1(n)$,

3. Répéter 1 et 3 pour les séquences suivantes :

- $s_2(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos\left(\pi \frac{n}{41}\right) & pour \quad -20 \le n \le 20 \\ 0 \quad pour & -40 \le |n| \le -21 \end{cases}$,
- $s_3(n) = rect_{21}(n) \qquad -50 \le n \le 50$,
- $s_4(n) = rect_{61}(n) \qquad -50 \le n \le 50$,
- $s_5(n) = tri_{31}(n), \qquad -50 \le n \le 50$
- $s_6(n) = tri_{61}(n), \qquad -50 \le n \le 50$

4. Commentez vos résultats.

5. Quelle est votre conclusion ?

3. Transformée de Fourier d'un signal discret.

Soit *x(n)* une séquence discrète. La transformée de Fourier de cette séquence est donnée par :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

1. Ecrire un programme permettant la représentation graphique du spectre d'amplitude et du spectre de phase de la transformée de Fourier de la séquence discrète $x(n)$ pour $\omega_{max} = 2\pi(f_{max} = 1)$ et *pas=0.01, N=20.*
$$x(n) = \begin{cases} 1 & pour \quad -N \le n \le N \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$
2. Répéter la procédure pour respectivement ω_{max}=4π, 6π, 8π $(f_{max} = 2, 3, 4)$
3. Commentez vos résultats.
4. Quelle est votre conclusion ?
5. Répéter la procédure pour les ***pas*** suivants : *pas=0.1*, *pas=0.01* et *pas=0.0001.*
6. Comparez et commentez ces résultats.
7. Quelles conclusions peut-on tirer ?
8. Calculer analytiquement les transformées de Fourier des signaux suivants :

$$x(n) = \begin{cases} a^{|n|} & pour \quad \text{n} = 0,1,2,\dots,\text{N - 1.} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

- $x(n) = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{1}{10} n\right) & -N \leq n \leq N \\ 0 & \end{cases}.$

- $x(n) = \begin{cases} n & -N < n < N \\ 0 & \text{Ailleurs.} \end{cases}$

N=20.
Utiliser pour ce calcul la règle de la progression géométrique ainsi que la formule d'Euler.

Règle de la progression géométrique

$$\sum_{l=0}^{N-1} r^l = \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

Formule d'Euler

$$\exp(j\phi) = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \qquad ;\sin(\phi) = \frac{\exp(j\phi) - \exp(-j\phi)}{2j}$$

9. Répéter la procédure (1 à 7) pour les séquences ci-dessus (Créer une fonction pour faciliter la procédure).

Programme 1

```
clear all
close all
clc
% Déclarer le vecteur temps, n, correspondant à une période:
n=-40:40;
% Déclarer la séquence s1(n)
s1=[zeros(1,20)   (pi/2)*sin(2*pi*(-20:20)/41)   zeros(1,20)] ;
% Calculer et représenter graphiquement la somme des M premières
harmoniques de s1(n)
% Pour M=4 par exemple ;
M=4;
N=length(s1);
i=1;
ss=0;
for k=-M/2:M/2
    psi=exp(j*2*pi*k*n/N);
    Sk(i)=(1/N)*sum(s1.*conj(psi));
    ss=ss+(Sk(i)).*psi;
    i=i+1;
end
subplot 211
stem(n,s1,'bo')
xlabel('Temps')
ylabel('Amplitude du signal')
legend('Signal original')
subplot 212
stem(n, ss,'rs');
xlabel('Temps discret')
ylabel('Amplitude du signal')
legend('Signal reconstitué')
```

Programme 2

```
clear all
close all
clc
% Déclarer le vecteur temps, n:
N=20 ;
n=-N:N;
% Déclarer la séquence s1(n)
s1=[ones(1,length(n))] ;
w_max=6*pi ;
fmax=w_max/(2*pi) ;
pas=0.001;
% Calculer et représenter graphiquement la transformée de Fourier  .
N1=length(s1);
i=1;
for f=-fmax/2:pas:fmax/2
    psi=exp(j*2*pi*n*f);
    X_f(i)=sum(s1.*conj(psi));
    i=i+1;
end

figure(1)
f1=-fmax/2:pas:fmax/2;
plot(f1,abs(X_f));
xlabel('Fréquence continue')
ylabel('spectre d''emplitude')

figure(2)
plot(f1,angle(X_f));
xlabel('Fréquence continue')
ylabel('spectre de phase')
```