Ecole Supérieure de Commerce

Deuxième Année Préparatoire

Février 2020

Examen en algèbre (Durée : 02 Heures)

Exercice 1 (5pts). Soit la matrice A suivante : $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

1) Montrer que $A^2 - 5A = -4I_3$ (où I_3 matrice identité (3,3))
2) En déduire la matrice inverse A^{-1}.
3) Soit le système $\begin{cases} mx+y+z=2 \\ x+my+z=4 \\ x+y+mz=6 \end{cases}$ …(1), où m est un paramètre réel.

   a) On suppose que m = 2, utiliser la matrice inverse de A pour résoudre le système (1).

   b) Dans le cas où m = -2, utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système.

   c) Pour quelles valeurs de m, le système (1) est-il de Cramer?

Exercice 2 (3 pts). Déterminer les solutions de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-3z=2 \\ x-y+2z=3 \\ x-2y-2z=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2):\begin{cases} x+y-3z=-2 \\ x+2y-4z=-3 \end{cases}$$

Exercice 3 (12 pts). Dans $\mathbb{R}^3$, soient les vecteurs $u_1=(2,-1,0)$, $u_2=(-1,2,3)$, $u_3=(5,-4,-3)$ et $u_4=(1,-1,0)$ et les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$, $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=1 \text{ et } y-z=0\}$, $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ |x|=y+z\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y-3z=0\}$.

1) E_1 et E_2 sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
2) Les familles suivantes sont-elles libres de $\mathbb{R}^3$? a) (u_1,u_2) b) (u_1,u_2,u_3).
3) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F. En déduire la dimension de F.
4) Soit le sous espace vectoriel $G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) La famille (u_1,u_2) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? est-elle une base de G ? Vérifier que $u_3\in G$.

   b) Définir le sous-espace vectoriel G.

   c) Donner une base de $F\cap G$.

5) Soit le sous espace vectoriel $H=\mathrm{Vect}(u_4)$. F et H sont-ils supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Corrigé de l'examen d'algèbre (Fevrier 2020)

Exercice 1

1) $A^2-5A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&5&5\\5&10&5\\5&5&10\end{bmatrix}$

$A^2-5A=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\to A^2-5A=-4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to A^2-5A=-4I_3$ (1)

2) $A^2-5A=-4I_3 \iff A(A-5I_3)=-4I_3 \iff A\left(-\frac{1}{4}(A-5I_3)\right)=I_3$

Donc $A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-5I_3)\to A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75&-0.25&-0.25\\-0.25&0.75&-0.25\\-0.25&-0.25&0.75\end{bmatrix}$ (1)

3) a) Pour $m=2$, le système (1) devient:

$$\begin{cases}2x+y+z=2\\x+2y+z=4\\x+y+2z=6\end{cases}\iff\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$ (1)

b) Dans le cas où $m=-2$, le système (1) devient

$$\begin{cases}-2x+y+z=2\ \dots (4)\\x-2y+z=4\ \dots (5)\\x+y-2z=6\ \dots (6)\end{cases}\to\begin{cases}-2x+y+z=2\ \dots (4)\\-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=3\ \dots (7)\ \ ((5)+\frac{1}{2}(2))\\\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=5\ \dots (8)\ \ ((6)+\frac{1}{2}(2))\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}-2x+y+z=2\ \dots (4)\\-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=3\ \dots (7)\\0=8\ \dots (9)\ \ ((7)+(8))\end{cases}$$ → le système (1) n'admet pas de solutions pour $m=-2$ (1)

noter que la méthode du pivot de Gauss peut se faire sous une autre forme

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&2\\1&-2&1&4\\1&1&-2&6\end{array}\right)\to\begin{matrix}L_1\\L_2+\frac{1}{2}L_1=L'_2\\L_3+\frac{1}{2}L_1=L'_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&2\\0&-3/2&3/2&3\\0&3/2&-3/2&5\end{array}\right)\to\begin{matrix}L_1\\L'_2\\L'_2+L'_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&2\\0&-3/2&3/2&3\\0&0&0&8\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}-2x+y+z=2\\-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=3\\0=8\end{cases}$$ → Le système (1) n'admet pas de solutions

c) $$\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}_{\underset{C_1\ \ C_2\ \ C_3}{}}=\begin{vmatrix}m-1&0&1\\1-m&m-1&1\\0&1-m&m\end{vmatrix}_{\underset{C_1-C_2\ \ C_2-C_3\ \ C_3}{}}\underset{L_2+L_1}{=}\begin{vmatrix}m-1&0&1\\0&m-1&2\\0&1-m&m\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}m-1&2\\1-m&m\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}=(m-1)\left[(m-1)m-2(1-m)\right]=(m-1)^2(m+2)$$ (1)

Le système (1) est de Cramer pour $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Exercice 2 $\boxed{3pts}$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-3z=2 \\ x-y+2z=3 \\ x-2y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-2z=1 \\ -2y+3z=2 \\ -3y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-2z=1 \\ -z=4 \\ -7z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-2z=1 \\ z=-4 \\ z=-1/7 \end{cases}$$

Donc le système (S_1) n'admet pas de solutions (1.5)

$$\begin{cases} x+y-3z=-2 \\ x+2y-4z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=-2 \\ y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+3z-2=-z+1+3z-2 \\ y=z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2z-1 \\ y=z-1 \end{cases} \Rightarrow (S_2) \text{ admet une infinité de solutions}$$

$$E=\{(2z-1,\ z-1,\ z)\ /\ z\in\mathbb{R}\} \quad (1.5)$$

Exercice 3 $\boxed{12pts}$

1) $(0,0,0)\notin E_1$ car $0\neq 1 \Rightarrow E_1$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (0.5)

$(2,1,1)\in E_2$ mais $(-1)(2,1,1)=(-2,-1,-1)\notin E_2$ car $|-2|=2\neq -1-1$

Donc E_2 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (0.5)

2) a) $\alpha u_1+\beta u_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=0 \\ -\alpha+2\beta=0 \\ 3\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$ (0.5)

(u_1,u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

b) $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+5\gamma=0 \\ -\alpha+2\beta-4\gamma=0 \\ 3\beta-3\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+5\gamma=0 \\ \frac{3}{2}\beta-\frac{3}{2}\gamma=0 \\ 3\beta-3\gamma=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+5\gamma=0 \\ 3\beta-3\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=\beta-5\gamma=\gamma-5\gamma=-4\gamma \\ \beta=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2\gamma \\ \beta=\gamma \end{cases}$

Il existe une solution (α,β,γ) non nulle qui vérifie $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0$ par exemple, $\alpha=-2$; $\beta=1$; $\gamma=1$

Donc (u_1,u_2,u_3) est une famille liée (1)

Autre méthode :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}_{C_1\ C_2\ C_3} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}_{C_1\ C_2+C_3\ C_3} = (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (u_1,u_2,u_3) \text{ est une famille liée}$$

3) *) $0+2(0)-3(0)=0 \Rightarrow (0,0,0)\in F$

**) $(x,y,z)\in F$ et $(x',y',z')\in F$

$x+x'+2(y+y')-3(z+z')=(x+2y-3z)+(x'+2y'-3z')=0+0=0$

$\Rightarrow (x+x',\ y+y',\ z+z')\in F \Rightarrow (x,y,z)+(x',y',z')\in F$ (1)

***) $(x,y,z)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow x+2y-3z=0 \Rightarrow \lambda x+2\lambda y-3\lambda z=0$

$\Rightarrow (\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in F \Rightarrow \lambda(x,y,z)\in F$ Donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$

noter qu'on peut démontrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$ en utilisant une autre méthode. Par exemple,

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -2y+3z\} = \{(-2y+3z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$F = \{y\underbrace{(-2,1,0)}_{u} + z\underbrace{(3,0,1)}_{v},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u,v) \Rightarrow$ F est un sev de $\mathbb{R}^3$

2) $\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow (u,v)$ est une famille libre

1

(u,v) est une famille génératrice et libre de G $\Rightarrow (u,v)$ est une base de F

3) $\dim F = 2$ 0.5

4) a) (u_1,u_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ ... (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = x \\ -\alpha + 2\beta = y \\ 3\beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta + x}{2} \\ \alpha = 2\beta - y = \frac{2}{3}z - y \\ \beta = z/3 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = (z+3x)/6 \\ \alpha = \frac{2}{3}z - y \\ \beta = z/3 \end{cases}$

pour $u = (1,0,0)$. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \alpha = 0. \\ \beta = 0 \end{cases}$ donc il n'existe pas de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie (1) et donc (u_1,u_2) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ 1

(u_1,u_2) est une famille génératrice de G par définition

(u_1,u_2) est une famille libre (d'après la question (2-a))

Par conséquent, (u_1,u_2) est une base de G 1

$u_3 \in G \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ -\alpha + 2\beta = -4 \\ 3\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$u_3 = 2u_1 - u_2 \Rightarrow u_3 \in G$ 0.5

b) $u = (x,y,z) \in G \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u = \alpha u_1 + \beta u_2$ ... (2)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = x \\ -\alpha + 2\beta = y \\ 3\beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = x. \\ \alpha = 2\beta - y = 2z/3 - y \\ \beta = z/3 \end{cases}$

$2(2z/3 - y) - z/3 = x \Leftrightarrow 4z/3 - 2y - z/3 = x \Leftrightarrow 4z - 6y - z = 3x$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + 6y - 3z = 0\}$ 1.5

ou $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0.\}$

3/

$u = (x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$

$u \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0. \end{cases}$

$F \cap G = \{(-2y, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\} = \{-y(2, -1, 0) / y \in \mathbb{R}\}$

$F \cap G = \mathrm{Vect}(u_1)$ 1

5) $u_4 = (1, -1, 0) \notin F$ car $1 + 2(-1) - 3(0) = -1 \neq 0$

Donc tous les vecteurs de H (sauf $(0,0,0)$) n'appartiennent à F

Ce qui nous donne $F \cap H = \{(0,0,0)\}$

D'autre part, $\dim F + H = \dim F + \dim H - \dim F \cap H = 2 + 1 - 0 = 3.$

$\left.\begin{array}{l} \dim F + H = 3 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow F + H = \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} F + H = \mathbb{R}^3. \\ F \cap H = \{(0,0,0)\} \end{array}\right\} \Rightarrow$ F et H sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

1,5

Autre méthode :

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & +3 & 1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & +3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ C_1 + C_2 \quad C_2 \quad C_3 \end{array} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\left.\begin{array}{l} (u, v, u_4) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (u, v, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

En reunissant les vecteurs de base de F à savoir u et v et le vecteur de base de H u_4, on obtient (u, v, u_4) une base de $\mathbb{R}^3$

Donc $F \oplus H = \mathbb{R}^3$

Remarque : Concernant la question 2-a, l'étudiant peut utiliser le résultat suivant :

le nombre de vecteurs d'une famille generatrice de $\mathbb{R}^3$ doit être supérieur ou égal à $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

et donc (u_1, u_2) ne peut pas être une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$