

Examen Semestriel
 Algèbre II
 2^{ème} année Cla-Prépa

28 mars 2021

9^h → 10^h

Exercice 1:

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par: $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$
 avec: $a_{ij} = 2i - j$

- ✓ a) Expliciter A
 ✓ b) Déterminer la matrice $B = A - I_3$
 ✓ c) Déterminer $\text{tr}(B)$; ${}^t B$, $\det(B)$, $\widetilde{B} = \text{com}(B)$, B^{-1}

Exercice 2:

Résoudre par la méthode d'échelonnement
 le système linéaire:

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

Remarque^(*): Détailler vos calculs.

Exercice 3:

Soit E l'espace vectoriel: $E = \mathbb{R}_2[X]$ ^{polynôme}

- ✓ a) On considère les vecteurs de E : $p = X^2 + 2X + 5$

$$u = X^2 + 1, v = X^2 - 1, w = X + 1$$

p est-il combinaison linéaire de u, v et w ?

- ✓ b) Soit $F \subseteq E$, la partie définie par:

$$F = \{p \in E : p(1) = p'(1)\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Examen Semestriel (Résumé du Corrigé)
 ALGÈBRE II
 2^{ème} Année Cla-Prépa

Exercice N° 1: $\frac{7}{7}$

(pour avoir les notes
 complètes les étapes
 de calcul sont exigées)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\star \text{tr}(B) = 0 + 1 + 2 = 3$

$\star {}^t B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\star \det(B) = -1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7$

$\star \tilde{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\star B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t \tilde{B} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice N°2: 6%

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

Ecriture matricielle: $(S) \Leftrightarrow AX = b$

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array} \right)$

$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -14 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -15 & -8 \end{array} \right)$

① $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ (nombres inconnus)
alors (S) admet une seule solution.

① $(S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \rightarrow x = 1 - 2y - 2z = -\frac{23}{15} \\ -2y - z = -2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}z + 1 = \frac{11}{15} \\ -15z = -8 \rightarrow z = \frac{8}{15} \end{cases}$

ainsi $(x, y, z) = \left(-\frac{23}{15}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15} \right)$

Exercice N°3: $\left(\frac{7}{7}\right)$

$$E = \mathbb{R}_2[X].$$

$$P(X) = X^2 + 2X + 5$$

$$u = X^2 + 1$$

$$v = X^2 - 1$$

$$w = X + 1.$$

(a) P est C.L. de u, v et w ssi

$$\textcircled{1} \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : P = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

$$P = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} X^2 + 2X + 5 &= \alpha(X^2 + 1) + \beta(X^2 - 1) + \gamma(X + 1) \\ &= (\alpha + \beta)X^2 + \gamma X + (\alpha - \beta + \gamma) \end{aligned}$$

ainsi

$$\textcircled{1} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \gamma = 2 \\ \alpha - \beta + \gamma = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 3 \\ \gamma = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\text{ainsi } P = 2u - v + 2w$$

$\textcircled{2}$ et P est Combinaison Linéaire de u, v et w .

⑥ $E \subset E$

$$F = \{P \in E : P(1) = P'(1)\}$$

Est ce que F est un S.F.V.

① $0_E = P_0 : P_0(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P_0'(x) = 0 \forall x,$

ainsi $P_0(1) = P_0'(1) = 0 \Rightarrow P_0 = 0_E \in F$
 $\Rightarrow F \neq \emptyset$

② Soit $P \in F$ et $Q \in F$.

$$(P+Q) \in F ?$$

$$P \in F \Rightarrow P(1) = P'(1)$$

① $Q \in F \Rightarrow Q(1) = Q'(1)$

$$\begin{aligned}(P+Q)(1) &= P(1) + Q(1) \\ &= P'(1) + Q'(1) \\ &= (P+Q)'(1).\end{aligned}$$

ainsi $(P+Q)(1) = (P+Q)'(1) \Rightarrow (P+Q) \in F$

③ Soit $P \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda P) \in F ?$$

① $P \in F \Rightarrow P(1) = P'(1)$

$$(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda P'(1) = (\lambda P)'(1)$$

ainsi $(\lambda P)(1) = (\lambda P)'(1)$

D'après ①) ②) ③) F est un S.F.V