Correction d' Épreuve du 1ère semestre

Module : Mathématiques 01 | Le 08 /01/ 2022

1ère année Énergies renouvelables | Durée : $\frac{3}{2}h$

Exercice 01 : (3pts)

Soit f une fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

① (1pt) Déterminer D_f (le domaine de définition de f).

$$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

1

② (1pt) Calculer $f'(x)$ et déduire le sens de variations de f sur D_f, la fonction f est dérivable sur D_f e

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)'}{1+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2+x^2} < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$$ alors f est strictement décroissante.

1

③ (1pt) En utilisant la règle de l'Hospital calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{(x-1)^2+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{3x^2((x-1)^2+x^2)} = -\infty$$

1

Exercice 02 (5pts)

Soit U l'application de $\mathbb{R}$, dans $]-1;+\infty[$ définie par

$$U(x) = e^{-2x+2} - 1$$

1. Déterminer $U([-1;1])$, $U^{-1}(\{0\})$ (2pts).

$\bullet U([-1;1]) = \{U(x),\ -1 \leq x \leq 1\} = \{U(x),\ 0 \leq -2x+2 \leq 4\}$

$$= \{U(x),\ 0 \leq e^{-2x+2} - 1 \leq e^4 - 1\}$$
$$= \{U(x),\ 0 \leq U(x) \leq e^4 - 1\}$$
$$= [0; e^4 - 1]$$

1

$\bullet U^{-1}\{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ U(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ e^{-2x+2} - 1 = 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R},\ e^{-2x+2} = 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R},\ -2x+2 = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R},\ x = 1\} = \{1\}$$

1

2. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1} (3pts).

- (1pt) U est injective: soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} U(x_1) = U(x_2) &\Longrightarrow e^{-2x_1+2} - 1 = e^{-2x_2+2} - 1 \\ &\Longrightarrow e^{-2x_1+2} = e^{-2x_2+2} \\ &\Longrightarrow -2x_1 + 2 = -2x_1 + 2 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

1

donc U est injective

- (1pt) U est surjective: soit $y \in]-1;+\infty[\Longrightarrow ?\exists x \in \mathbb{R} tq; U(x) = y$

$$\begin{aligned} U(x) = y &\Longrightarrow e^{-2x+2} - 1 = y \\ &\Longrightarrow e^{-2x+2} = y + 1 \\ &\Longrightarrow x = \frac{-\ln(y+1)+2}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1

donc U est surjective. U est injective et surjective donc U est bijective

- (1pt) Détermination de U^{-1}.

$$U^{-1} :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \frac{-\ln(y+1)+2}{2}$$

1

Exercice 03 : (4pts)

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} + 2; & si\ x < 1 \\ 4; & si\ x = 1 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}; & si\ x > 1 \end{cases}$$

① Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$. (2pts)

On a

$\star f(1) = 4$

$\star \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \sqrt{x+3} + 2 = 4$

on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en $x_0 = 1$ à gauche.

$\star \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{(x^2+2x-3)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{2x+2}{1} = 4$

on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en $x_0 = 1$ à droite, alors f est continue en $x_0 = 1$.

② Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$. (2pts)

$$\begin{aligned} \star \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} &= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)'}{(x-1)'} \\ &= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\star \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\frac{[illegible]}{x-1} - 4}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x^2-2x+1)'}{((x-1)^2)'}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2x-2}{2(x-1)} = 1$$

1

On a $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc f est n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

Exercice 04 : (8pts)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\ln(1+3x)}$$

① Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $\ln(1+3x)$.(2pts) on

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, d'ou

$$\star \ln(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = \boxed{3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3)}$$

2

② Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $e^{\sin(3x)}$.(2pts)

on a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ d'ou: $\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) = \boxed{3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)}$

$$\star e^{\sin(3x)} = e^{3x - \frac{9}{2}x^3} + o(x^3) = 1 + \left(3x - \frac{9}{2}x^3\right) + \frac{1}{2!}\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + 3x - \cancel{\frac{9}{2}x^3} + \frac{9}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{3!}(3x)^3} + o(x^3) = \boxed{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)}$$

2

③ Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$. (3pts)

$$\star f(x) = \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\ln(1+3x)} = \frac{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 - 1}{3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3)} + o(x^2)$$

$$= \frac{\cancel{3x}\left(1 + \frac{3}{2}x\right)}{\cancel{3x}\left(1 - \frac{3}{2}x + 3x^2\right)} + o(x^2)$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{2}x}{1 - \frac{3}{2}x + 3x^2} + o(x^2)$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2}x\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{2}x - 3x^2\right)} + o(x^2)$$

$$= \left(1+\frac{3}{2}x\right) \times \left(1+\frac{3}{2}x-3x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2\right)+o(x^2)$$

$$= \left(1+\frac{3}{2}x\right) \times \left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2\right)+o(x^2)$$

$$= 1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+o(x^2)$$

$$= \boxed{1+3x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}$$

3 pts

④ Calculer $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. (0.5pt)

0,5

⑤ Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangent au voisinage de 0

0,5

L'équation de la tangente en $x=0$ est $y=1+3x$, alors $f(x)-y=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)>0$ alors la courbe de f est au-dessus de la tangente. (0.5pt)