Examen de Traitement du Signal (TDS)

Novembre 2007

Enseignants : **J.L. Dion – I. Tawfiq - G. Hiet** **Note : /20**
Classe : **3ème année**
Durée : **2h00**

Aucun document autorisé
Calculatrice ESTACA autorisée

Nom de l'étudiant : Prénom :

NE PAS DEGRAPHER LE SUJET

Le barème est donné à titre indicatif
Pour chaque question à choix multiples, sauf mention contraire : réponse juste et complète 1 point, incomplète ½ point, fausse ou absence de réponse 0 point.

Notation :

- $*$: produit de convolution
- $.$: multiplication « scalaire »
- $\delta(t)$: impulsion de Dirac
- $\coprod_{T_e}(t)$: peigne de Dirac
- $\prod_{\tau}(t)$: signal « porte » d'amplitude 1 et de largeur τ

Question de cours (QCM) : 5 pt

1 – Soit le signal porte $x(t) = A.\prod_T(t)$, centré sur l'origine, d'amplitude A et de durée T. L'autocorrélation de x est :

~~a) Un sinus cardinal~~
b) Une fonction triangle
~~c) Impaire et maximale en $\tau = 0$~~
d) Majorée par $A^2.T$
~~e) aucune des réponses précédentes ne convient~~

2 – Le spectre d'un signal réel continu périodique calculé à partir de la Transformée de Fourier généralisée est :

~~a) périodique~~
b) discret
c) de module pair
~~d) de module et de phase pairs~~
~~e) aucune des réponses précédentes ne convient~~

3 – On considère une opération de quantification linéaire centrée sur une plage de 0 à 10V sur 8 bits. On suppose que l'erreur suit une loi uniforme. Soit $E_{err} = \sigma_{err}^2$ l'énergie du bruit de quantification et *Rsb* le rapport signal à bruit :

a) $E_{err} = 127.10^{-6}\ V^2$
~~b) $E_{err} = 39.10^{-3}\ V^2$~~
c) Rsb augmente de 6 dB lorsque la résolution augmente d'un bit
~~d) Rsb diminue de 6 dB lorsque la résolution augmente d'un bit~~
~~e) aucune des réponses précédentes ne convient~~

4 – Pour respecter le théorème de Shannon lors de l'échantillonnage d'un signal x(t) à une fréquence d'échantillonnage f_e il faut:

~~a) choisir f_e inférieure à la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné~~
b) vérifier que la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné soit inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage
~~c) filtrer au préalable le signal échantillonné par un filtre passe-bas numérique~~
d) utiliser un filtre anti-repliement
~~e) aucune des réponses précédentes ne convient~~

5 – Le signal $x(t)=A.\sin(2.\pi.f_0.t)$, $A>0$, $f_0 > 0$ possède :

a) une énergie totale infinie
~~b) une énergie totale finie~~
~~c) une puissance totale nulle~~
d) un spectre s'annulant en f=0 (ou n=0)
~~e) aucune des réponses précédentes ne convient~~

Exercice 1 : 5 pts

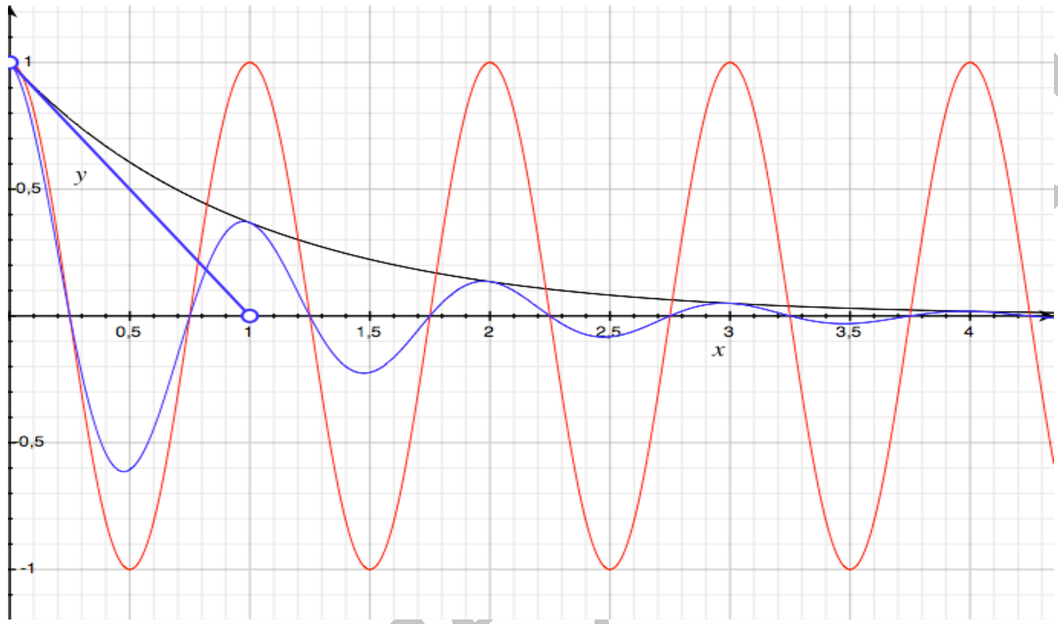
Soit les signaux suivants :

$$x(t) = e^{-a.t}.\varepsilon(t), a > 0$$

$$y(t) = \cos(2.\pi.f_0.t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \text{ échelon de Heaviside}$$

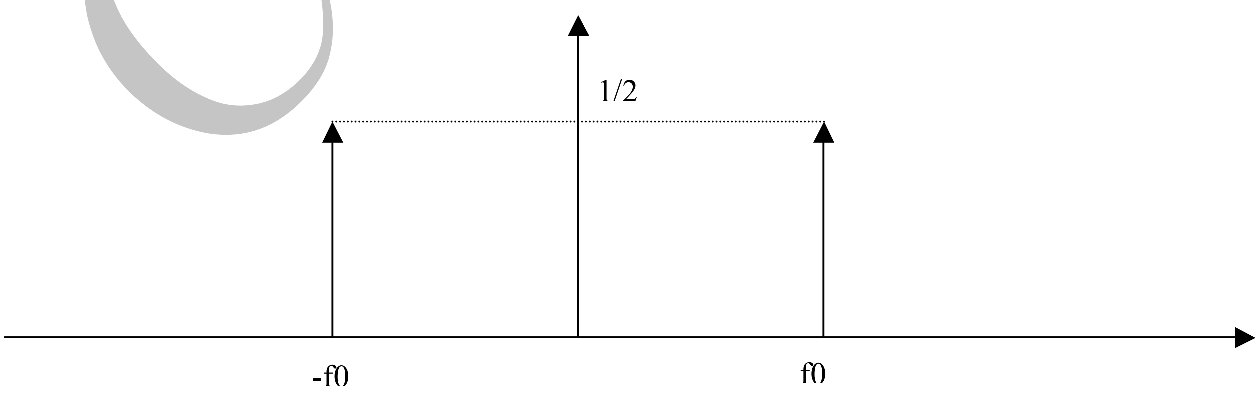
$$z(t) = y(t).x(t)$$

Question 1 : En prenant a = 1 et fo = 1Hz, tracer l'allure de x, y et z sur le même graphique



Question 2 : Déterminer Y(f), la transformée de Fourier de y(t) et tracer l'allure du spectre de y (en module)

$$\mathbf{Y(f)} = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

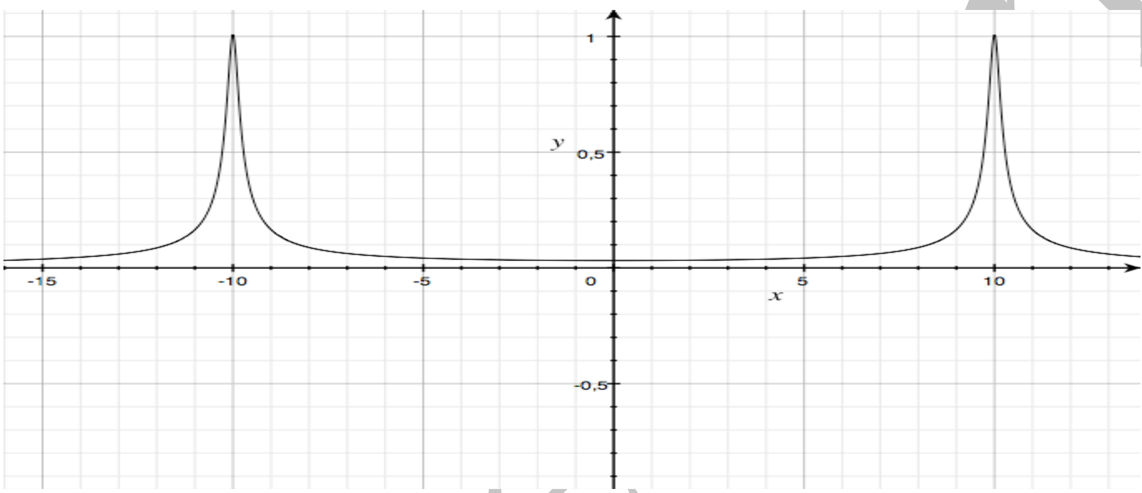


Question 3 : Déterminer Z(f), la transformée de Fourier de z(t) et tracer l'allure du spectre de z (en module) en supposant $f_0 >> a$

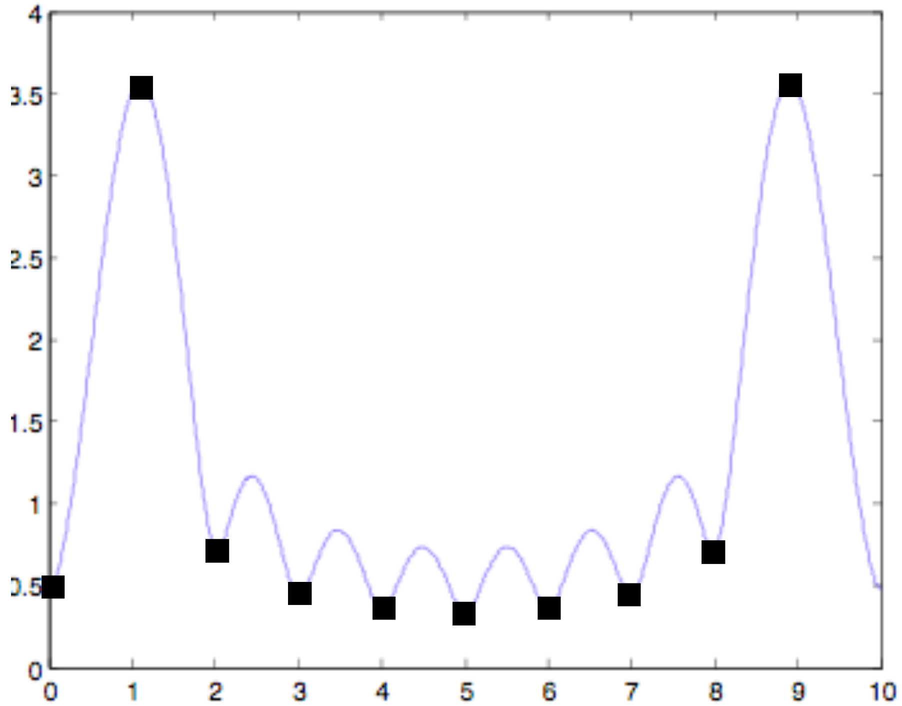
$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f) = \frac{X(f)}{2} \otimes \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-a.t}.e^{-j.2.\pi.f.t}dt = \frac{1}{a + j.2.\pi.f}$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{a + j.2.\pi.(f + f_0)} + \frac{1}{a + j.2.\pi.(f - f_0)}\right]$$



Question 4 : On numérise le signal z(t) (f_0 = 1Hz) pendant τ = 1s à une fréquence d'échantillonnage f_e=10Hz. On note $z_{oe}(t)$ le modèle du signal échantillonné pendant τ. Expliquer l'allure du spectre de z_{oe}



-répétition du spectre tous les fe

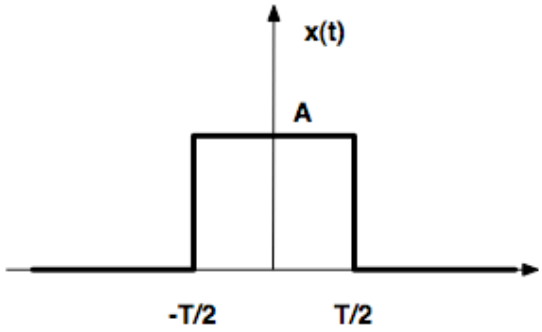
-convolution par un sinus cardinal due à la fenêtre d'observation (rectangle)

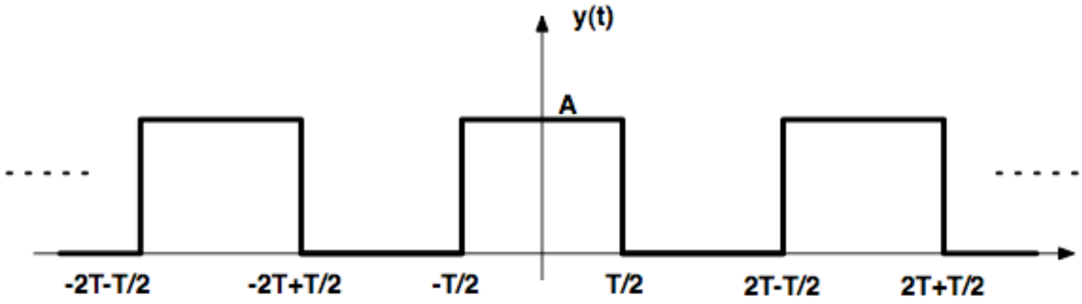
Question 5 : On décide de déterminer numériquement le spectre de z_{oe} en calculant la $Z_{oe}[k]$, TFD du signal numérisé. Donner l'expression de $Z_{oe}[k]$ en fonction de $Z_{oe}(f)$, de τ et de f_e. Tracer $Z_{oe}[k]$ sur le graphique précédent.

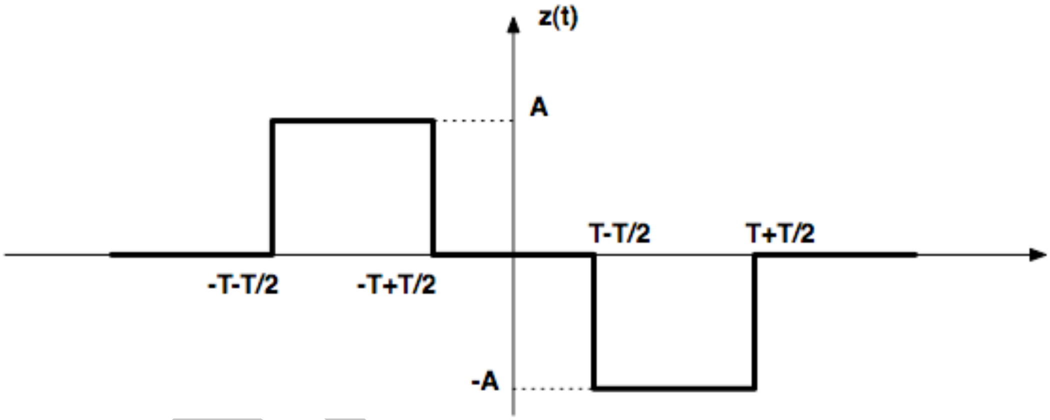
$$Z_{oe}[k] = Z_{oe}\,(k.fe/N)$$

Exercice 2 : 10 pts

Soit les signaux suivants (y(t) est périodique de période 2T) :







Question 1 : Déterminer la puissance totale et l'énergie totale des signaux x(t) et y(t).

$$E_{tot}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T \qquad \Rightarrow P_{tot}(x)=0$$

$$E_{tot}(y) = \lim_{N\to\infty}\left(N.E_{tot}(x)\right) = +\infty$$

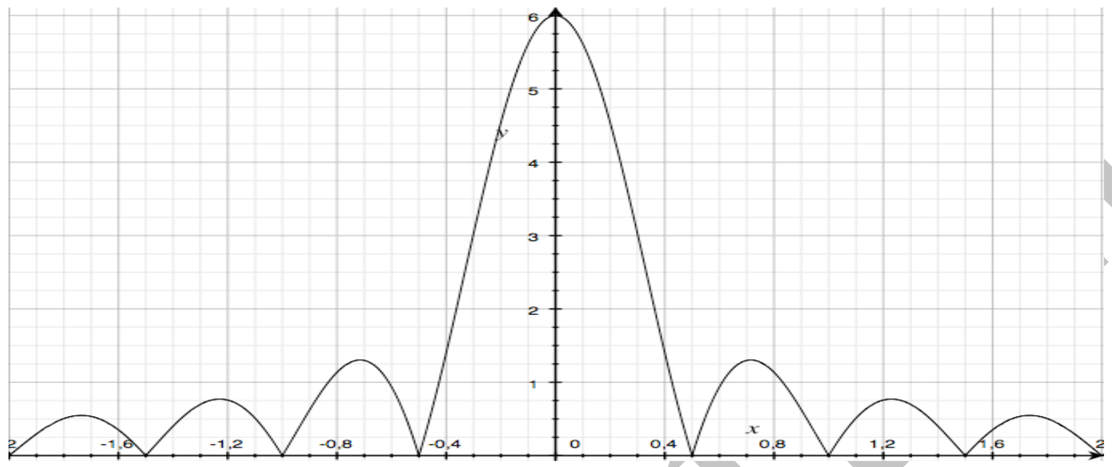
$$P_{tot}(y) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt = \frac{A^2}{2}$$

$$E_{tot}(z) = 2.E_{tot}(x) = 2.A^2.T \qquad \Rightarrow P_{tot}(z)=0$$

Question 2 : Déterminer X(f) la transformée de Fourier de x(t)

$$X(f)= A.T.\frac{\sin(\pi.f.T)}{\pi.f.T} = A.T.\sin c(f.T)$$

Question 3 : Tracer le spectre en module de x avec A=3 et T=2.



Question 4 : Déterminer Y(f) à partir de X(f)

$$y(t) = rep_{2.T}\left(x(t)\right) = x(t) \otimes \coprod_{2.T}(t)$$

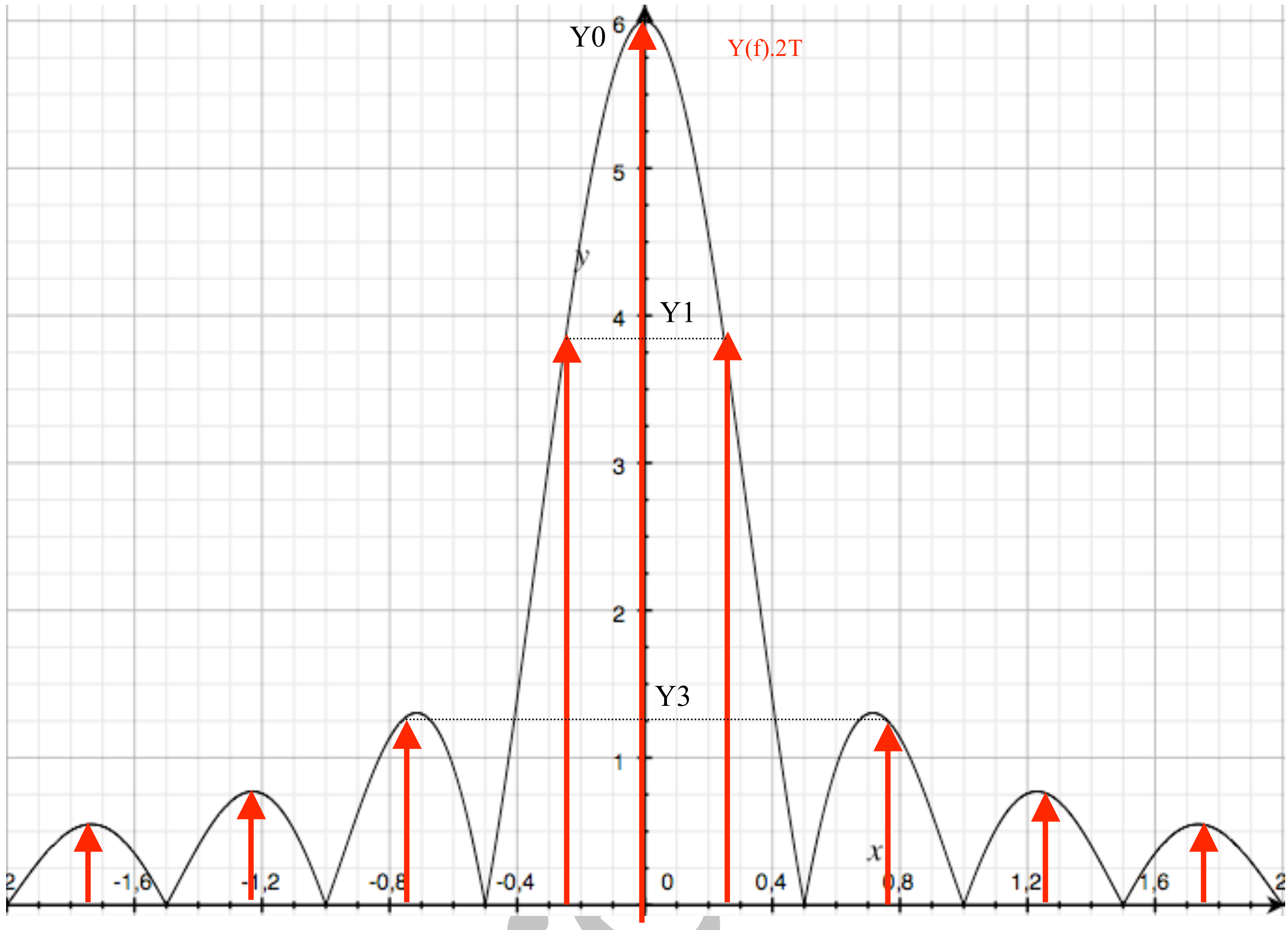
$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{2.T} X(f).\coprod_{\frac{1}{2.T}}(f) = \frac{1}{2.T}\sum_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{2.T}\right).\delta\left(f-\frac{k}{2.T}\right) = \frac{A}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\sin c(\frac{k}{2}).\delta(f-\frac{k}{2.T})$$

Question 5 : Développer y(t) en série de Fourier à coefficients complexes. Comparer avec les résultats de la question 4.

$$Y_n = \frac{1}{2.T}\int_{-T}^{T} x(t).e^{-j.n.\omega.t}dt = \frac{A}{2}\sin c(\frac{n}{2})$$

On remarque : $Y(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_n.\delta(f-\frac{n}{2.T})$

Question 6 : Tracer le spectre en module de y. Faire apparaître l'allure du spectre de x et les valeurs des coefficients du développement en séries.



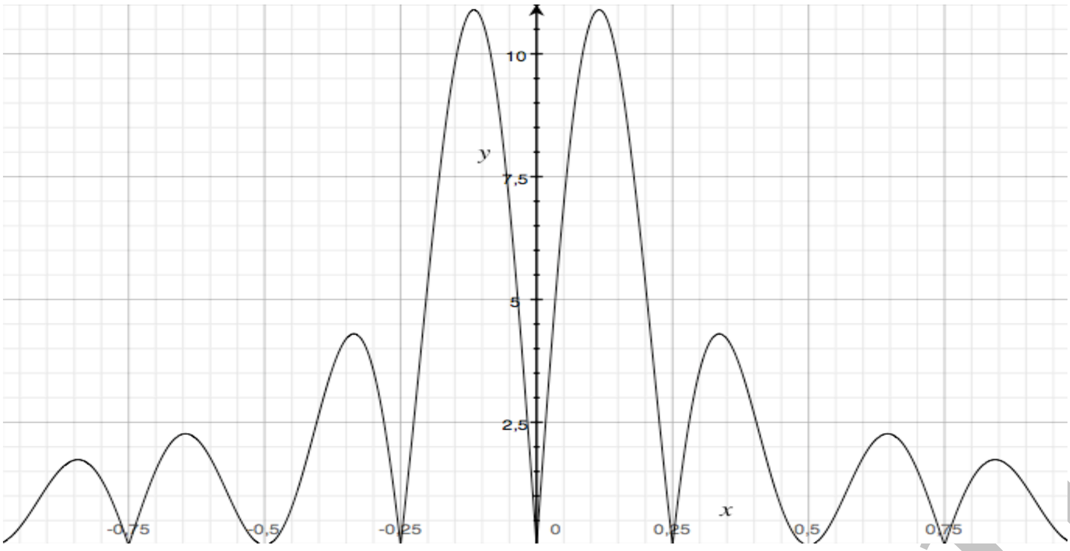
Corrigé

Question 7 : Déterminer Z(f) et tracer le spectre en module de z.

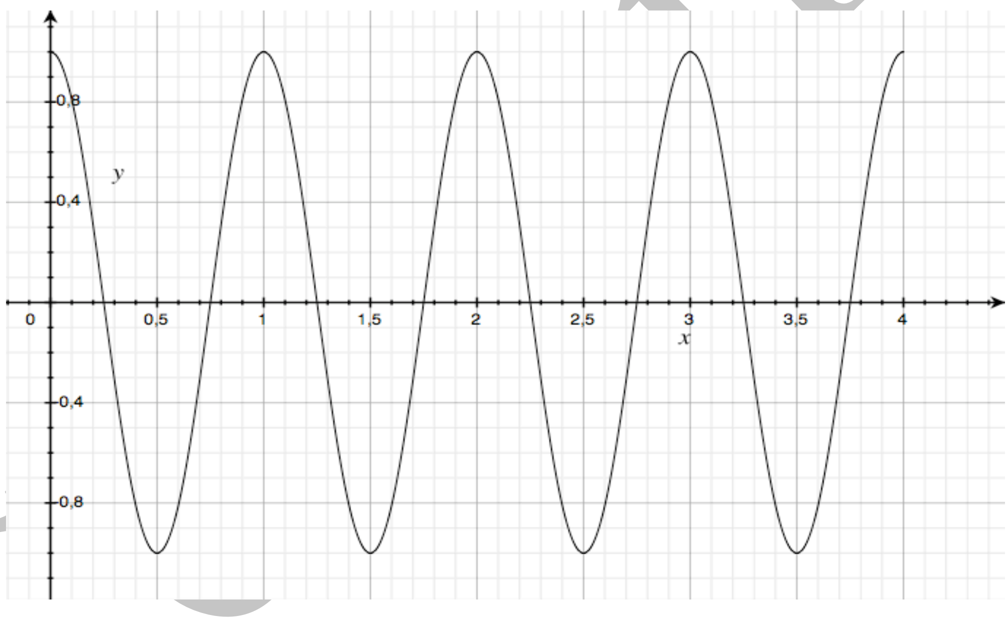
$z(t) = x(t+T) - x(t-T)$

$Z(f) = X(f).\left(e^{j.2.\pi.f.T} - e^{-j.2.\pi.f.T}\right) = X(f).\sin(2.\pi.f.T).2.j$

$Z(f) = A.T.2.j.\sin c(f.T).\sin(2.\pi.f.T)$



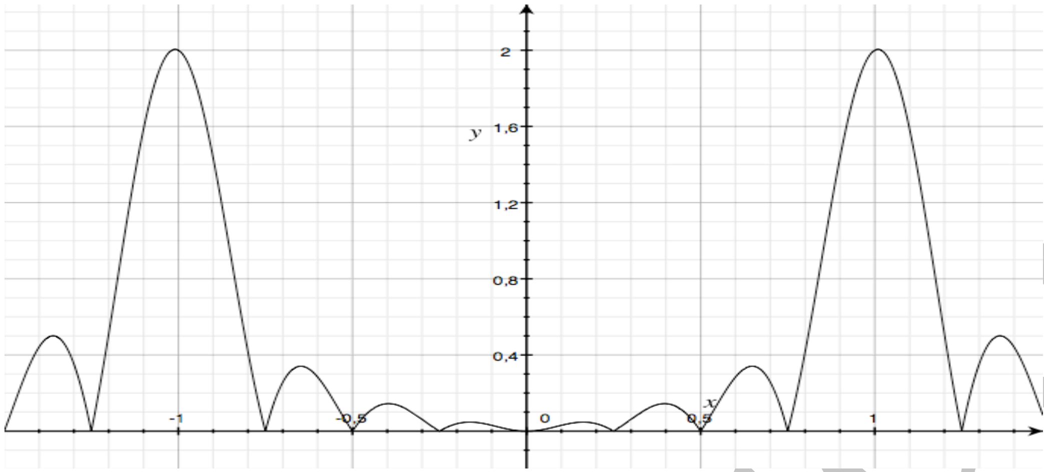
Question 8 : Soit le signal s(t) = cos(2.π.f_0.t). x(t). Tracer l'allure de s(t). Quel phénomène « physique » est modélisé par la multiplication par x(t) ?



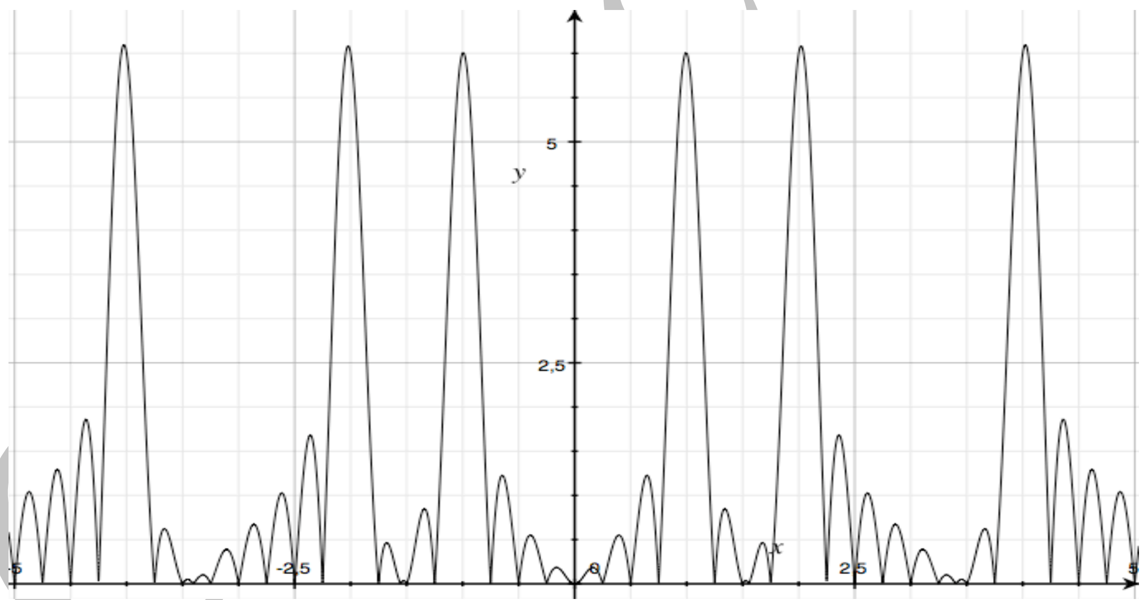
Muliplication par une fonction porte -> modélisation de l'observation ou mesure de durée finie.

Question 9 : Déterminer S(f) et tracer le spectre en module de s.

$$S(f) = \frac{1}{2}.\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] \otimes X(f) = \frac{T}{2}.\left[\mathrm{sin}c\left[T(f - f_0)\right] + \mathrm{sin}c\left[T(f + f_0)\right]\right]$$



Question 10 : On échantillonne s à la fréquence d'échantillonnage f_e. On suppose l'échantillonnage idéal. Donner l'allure du spectre du signal échantillonné. Commentez.



Echantillonnage -> répétition du spectre. Observation de durée finie -> multiplication par sinus cardinaux.

Développements complémentaires ….