Corrigé Examen TDS

1er décembre 2005

1 QCM

Barème : réponse exacte +1, réponse incomplète +0.5, pas de réponse 0, mauvaise réponse -1

1.1 Q1 : Quels sont les signaux de type discret et causal

– discret $\Rightarrow$ fonction définie sur N ou Z (on ne connait la valeur du signal qu'en un certain nombre de points)
– causal $\Rightarrow$ signal dont la valeur est nulle pour $t < 0$

Réponse : seul le signal du cas *a* vérifie ces deux conditions

1.2 Q2 : Filtre anti-repliement

Selon Shannon la fréquence d'échantillonage doit être choisie au moins deux fois plus grande que la fréquence bornant le spectre du signal continu. Dans le cadre des signaux à spectre non-borné, il est nécessaire d'inclure un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure vérifie la condition de Shannon. En théorie, il faut donc que la fréquence de coupure du filtre anti-repliement soit inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonage.

Réponse : *c*

1.3 Q3 : Signal continu périodique dans le domaine temporel

Ce signal est développable en séries de Fourier donc sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales. Le spectre du signal est donc un spectre de raies (la transformée de Fourier d'un sinus étant une somme de 2 diracs). Le spectre du signal est donc discret. De plus, on est ici dans le cas général où aucune supposition n'est faite sur le caractère réel ou complexe du signal : on ne peut donc pas tirer de conclusion quant au caractère réel ou complexe de son spectre.

Réponse : *b*

1.4 Q4 : Transformée de Fourier d'un signal réel

1. Propriété de conjugaison de la transformée de Fourier : si $\forall t, y\left(t\right) = \overline{x\left(t\right)}$ alors $Y\left(f\right) = \overline{X\left(-f\right)}$
2. Un signal réel : $\forall t, x\left(t\right) = \overline{x\left(t\right)}$
3. De 1 et 2 on a : pour un signal réel $X\left(f\right) = \overline{X\left(-f\right)}$
   $\Rightarrow$ $Re\left(X\right)$ paire, $Im\left(X\right)$ impaire

Réponse : *a* et *d*

1.5 Q5 : Quantum d'une voix d'acquisition +/- 5V codée sur 2 octets

- +/- 5V $\Rightarrow$ plage de $A = 10V$ à coder
- 2 octets = 16 bits = $2^{16} = 65536$ pas de codage
  $\Rightarrow$ Quantum : $Q = A/2^n \simeq 0.15mV \simeq 153\mu V$

Réponse : ***c* et *d***

2 Exercice 1 : Echantillonnage

Soit le signal : $s(t) = a_0 + a_1.cos(2.\pi.f_1.t) + a_2.cos(2.\pi.3.f_1.t)$
On a $f_1 = 20$Hz, $a_0 = a_2 = 1, a_1 = 2$ d'où :

$$s(t) = 1 + 2.cos(40.\pi.t) + cos(120.\pi.t)$$

2.1 Q1 : périodicité de s

s est la somme d'un signal constant (qui possède donc une infinité de périodes) et de deux signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont proportionnelles. s est donc périodique et sa période correspond à la plus grande période des signaux qui le composent.

Réponse : s **est périodique de période** $1/f_1 = 0.05s$

2.2 Q2 : Transformée de Fourier de s(t)

$$S(f) = TF[s(t)] = a_0.\delta(f) + \frac{a_1}{2}(\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1)) + \frac{a_2}{2}(\delta(f+3.f_1) + \delta(f-3.f_1))$$

$$S(f) = \delta(f) + \delta(f+f_1) + \delta(f-f_1) + \frac{1}{2}(\delta(f+3.f_1) + \delta(f-3.f_1))$$

$$S(f) = \delta(f) + \delta(f+20) + \delta(f-20) + \frac{1}{2}(\delta(f+60) + \delta(f-60))$$

2.3 Q3 : Transformée de Fourier de $s_n(t)$

$s_n(t)$ représente le signal échantilloné pendant $\tau = 0.2s$

- observation pendant une durée finie $\Rightarrow$ multiplication de s par une porte temporelle
- échantillonage du signal $\Rightarrow$ multiplication de s par un peigne de Dirac

$$s_n(t) = s(t).\Pi_\tau(t).⧢_{T_e}(t)$$

avec :

- $\Pi_\tau(t)$ le signal *porte* d'amplitude égale à 1 et de durée (ouverture) τ
- $⧢_{T_e}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_e)$ le peigne de Dirac de période T_e

On sait :

- la transformée de Fourier d'un produit de fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions
- la transformée de Fourier d'un signal *porte* est un sinus cardinal
- la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (période Te) est un peigne de Dirac de période 1/Te

On a donc :

$$S_n(f) = TF[s_n(t)] = f_e.\tau.[S(f) * sinc(f.\tau) * ⧢_{f_e}(f)]$$

avec :

$$sinc(f.\tau) = \frac{sinc(\pi.f.\tau)}{\pi.f.\tau}$$

$$
\begin{aligned}
S_n(f) &= f_e.\tau.\left[a_0.\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f-k.f_e\right)\right)\right.\\
&+\frac{a_1}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f-f_1-k.f_e\right)\right)+\frac{a_1}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f+f_1-k.f_e\right)\right)\\
&\left.+\frac{a_2}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f-3.f_1-k.f_e\right)\right)+\frac{a_2}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f+3.f_1-k.f_e\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n(f) &= 20\left[\sum_{k\in Z} sinc\left(0,2\left(f-100k\right)\right)\right.\\
&+\sum_{k\in Z} sinc\left(0,2\left(f-20-100.k\right)\right)+\sum_{k\in Z} sinc\left(\tau\left(f+20-100.k\right)\right)\\
&\left.+\frac{1}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(0,2\left(f-60-100.k\right)\right)+\frac{1}{2}\sum_{k\in Z} sinc\left(0,2\left(f+60-100.k\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

2.4 Q4 : Allure du module de $S(f)$ et de $S_n(f)$

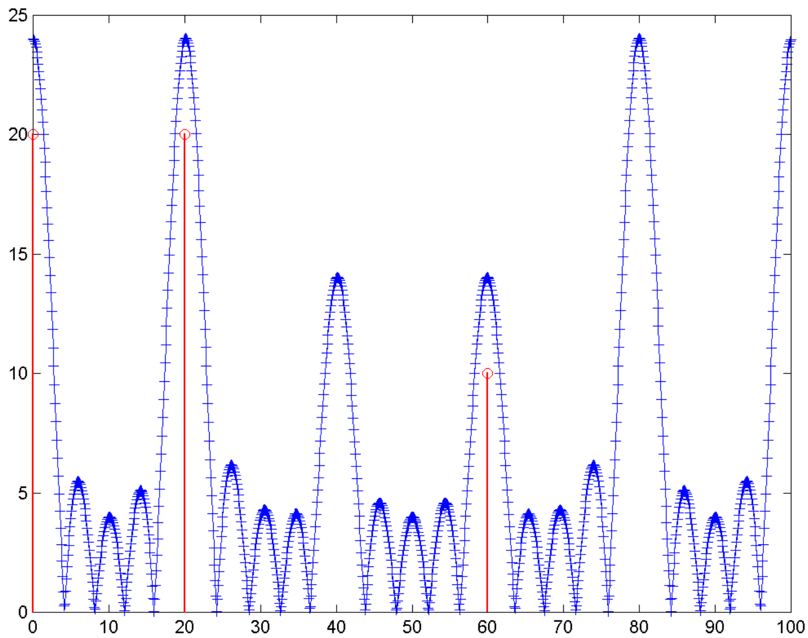

FIG. 1 – Représentation fréquentielle

2.5 Q5 : Principaux artefacts (différence entre $S(f)$ et $S_n(f)$)

- f_e ne respecte pas Shannon $\Rightarrow$ repliement spectrale : apparition de composantes ou raies *fantômes* entre 0 et $f_e/2$. Exemple : lobe à 40Hz issu du repliement du lobe à 60Hz
- fenêtre d'acquisition (durée finie d'observation) $\Rightarrow$ raies transformées en lobes principaux et apparitions de lobes secondaires (sinus cardinal)

3 Exercice 2 : Développement en série de Fourier

Soit f, fonction 2π périodique définie par :

$$f(t) = t, \forall t \in]-\pi, \pi[$$

3.1 Représentation temporelle

cf annexe A

3.2 Développement en série

f est continue par morceaux donc développable en série de Fourier.
Sur une période, f est impaire $\Rightarrow \forall n \in N, a_n = 0$
Calcul des coefficients :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \,.\, \sin(n.\omega_0.t)\, dt$$

$$T = 2\pi, \omega_0 = 1 \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(n.t)\, dt$$

par IPP :

$$b_n = -\frac{2}{n}.\cos(\pi.n) = \frac{2}{n}.(-1)^{n+1}$$

Donc :

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(n.t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}.(-1)^{n+1}.\sin(n.t)$$

3.3 Représentation fréquentielle

Représentation de la phase et du module de $c_n = \frac{a_n - j.b_n}{2} = -j\frac{b_n}{2}$

- $phase(c_n) = +/- \frac{\pi}{2}$ selon le signe de c_n
- $||c_n|| = \frac{1}{n}$

cf annexe A

4 Exercice 3 : Développement en série de Fourier

Soit f, fonction périodique de période $T = a$ définie sur une période par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in]-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}[\\ 0 & \text{ailleurs sur la période} \end{cases}$$

4.1 Représentation temporelle

cf annexe B

4.2 Développement en série

f est continue par morceaux donc développable en série de Fourier.
Sur une période, f est paire $\Rightarrow \forall n \in N, b_n = 0$
Calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \,.\, \cos(n.\omega_0.t)\, dt$$

$$T = a, \omega_0 = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow a_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} \cos\left(\frac{2.\pi.n.t}{a}\right) dt$$

par IPP :

$$a_n = \frac{2}{n.\pi}. \sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} 1dt = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$f(t) \simeq a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \cos(n.\omega_0.t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n.\pi}. \sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right). \cos\left(\frac{2.\pi.n.t}{a}\right)$$

4.3 Représentation fréquentielle

Représentation de la phase et du module de $c_n = \frac{a_n - j.b_n}{2} = \frac{a_n}{2}$

- $phase(c_n) = 0$ ou π selon le signe de c_n
- $||c_{2p+1}|| = \frac{1}{(2p+1)\pi}$

cf annexe B

A Etude du signal triangulaire

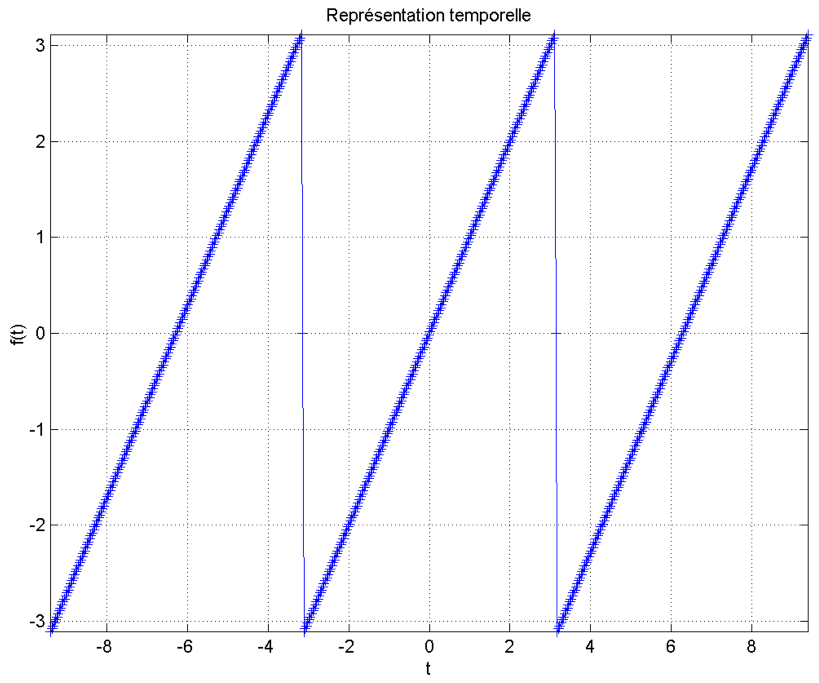

FIG. 2 – Représentation temporelle

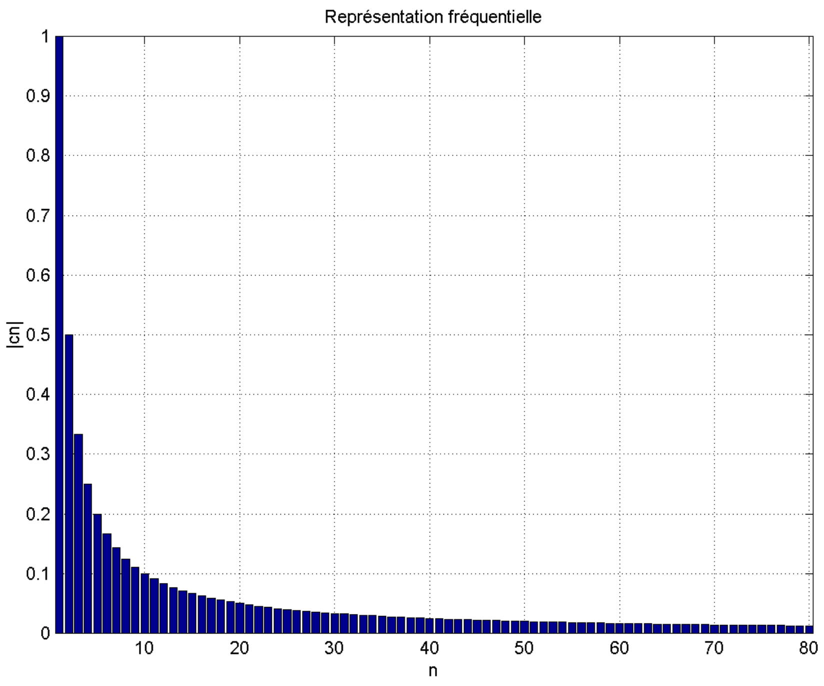

FIG. 3 – Représentation fréquentielle

B Etude du signal rectangulaire

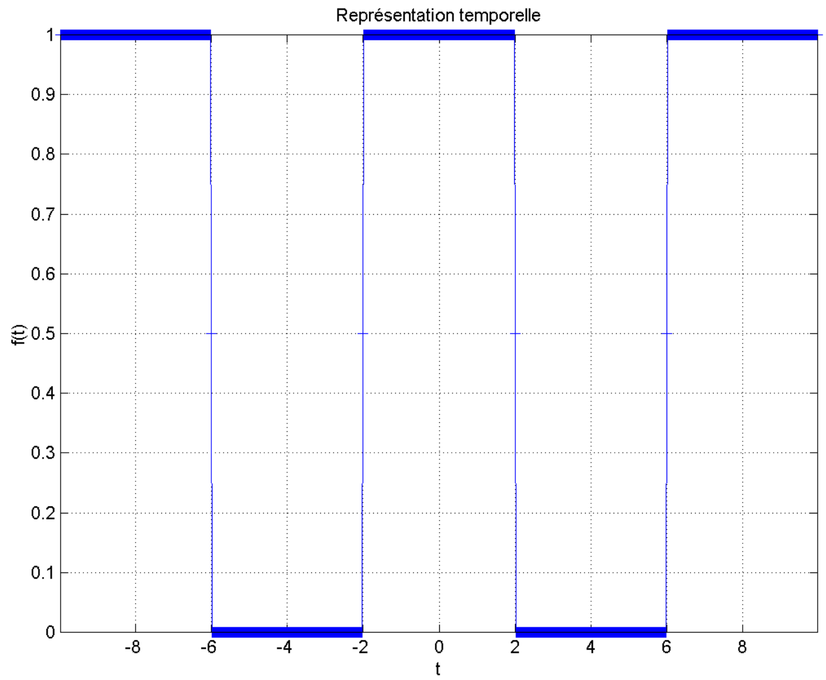

FIG. 4 – Représentation temporelle

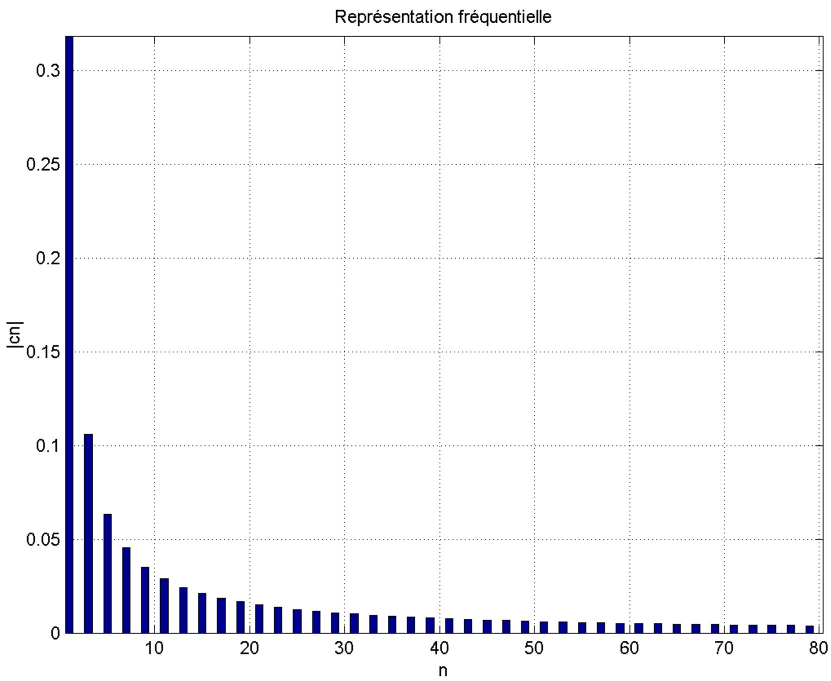

FIG. 5 – Représentation fréquentielle