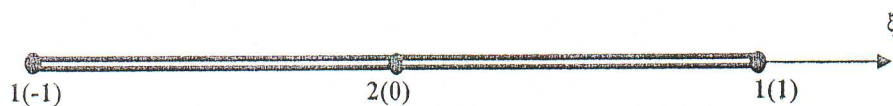


Nom et Prénom : Corrigé

Exercice 1: Approcher le champ de déplacement u d'un élément barre de traction-compression de référence à trois nœuds. (3.5 Points)

Déterminer le déplacement au milieu de chaque élément si les déplacements des nœuds 1, 2 et 3 sont respectivement : -0.0009 m , -0.0033 m et 0.0014 m (1.5 Points)



Solution :

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 = L \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

C.L.

$$\begin{aligned} u_1 = u(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 \\ u_2 = u(0) &\Rightarrow a_0 = u_2 \\ u_3 = u(1) &= a_0 + a_1 + a_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= u_2 \\ u_1 - u_2 &= -a_1 + a_2 \quad \text{--- (1)} \\ u_3 - u_2 &= a_1 + a_2 \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(1)} - \text{(2)} &\Rightarrow u_1 - u_3 = -2a_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_3}{2} \\ \text{(1)} + \text{(2)} &\Rightarrow u_1 - 2u_2 + u_3 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{u_1}{2} - u_2 + \frac{u_3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u = L \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$u = L \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} & 1 - \xi^2 & \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

déplacement au milieu de l'élément 1 $\Rightarrow \xi = -\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & 1 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} 0,375 & 0,75 & -0,125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$u\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,0030 \text{ m}$$

déplacement au milieu de l'élément 2 $\xi = \frac{1}{2}$

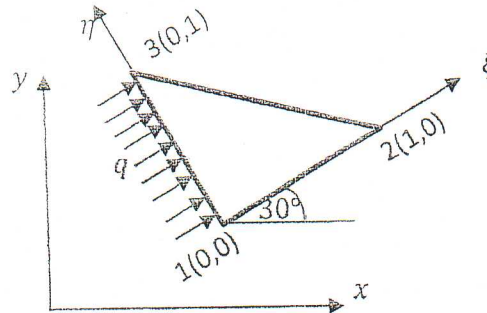
$$u\left(\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & 1 - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} -0,125 & 0,75 & 0,375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = -0,0018 \text{ m}$$

Nom et Prénom : Corrigé

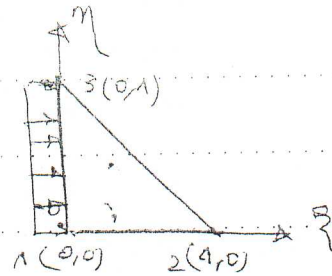
Exercice 2: L'élément plaque triangulaire à trois nœuds de l'élasticité plane, est chargé sur le bords 1-3 par une charge uniforme // à ξ d'intensité q , incliné de 30° par rapport à l'axe x du repère global



1. Dans le repère local de l'élément déterminer les charges nodales équivalentes. (4 Points)
2. Déterminer la matrice de transformation T de cet élément et écrire les charges nodales équivalentes précédemment déterminées en coordonnées globales. (2 Points)

Solution :

$$\{q^e\} = \int_{\Omega} [N]^T q d\Omega$$



Dans le plan de référence

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2A = 1$$

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta$$

Pour le bord chargé: $\xi = 0 \Rightarrow N_1 = 1 - \eta, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = \eta$

$$q = \begin{Bmatrix} q_{\xi} \\ q_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{q^e\} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta & 0 \\ 0 & 1-\eta \\ 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = q \begin{bmatrix} \eta - \frac{\eta^2}{2} \\ 0 \\ \frac{\eta^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u = L \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} & 1 - \xi^2 & \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

éplacement au milieu de l'élément 1 $\Rightarrow \xi = -\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & 1 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} 0,375 & 0,75 & -0,125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$u\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,0030 \text{ m}$$

éplacement au milieu de l'élément 2 $\xi = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & 1 - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = L \begin{bmatrix} -0,125 & 0,75 & 0,375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,0009 \\ -0,0033 \\ 0,0014 \end{Bmatrix}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = -0,0018 \text{ m}$$

Nom et Prénom : Corrigé

Exercice 3 :

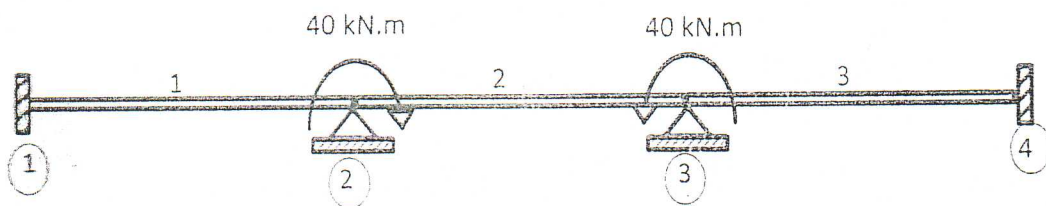
donner la matrice de rigidité écrite dans le repère global de chacun des éléments de la poutre continue de figure ci-dessous.

Former les vecteurs déplacements réduits de la structure et de chacun des deux éléments (2 Points)

Former la matrice de rigidité réduite de chaque élément, en introduisant les conditions aux limites. (3 Points)

Ecrire le vecteur force extérieur réduit de la structure. (1 Point)

Faire l'assemblage par l'une des deux méthodes et écrire le système global permettant de déterminer les déplacements du nœud intermédiaire. (3 Points)



$$[K^1] = [K^2] = [K^3] = \begin{bmatrix} 96 & -192 & -96 & -192 \\ -192 & 512 & 192 & 256 \\ -96 & 192 & 96 & 192 \\ -192 & 256 & 192 & 512 \end{bmatrix} \times 10^5$$

Solution :

élément 1 : (1-2) : $w_1 = \theta_1 = w_2 = 0 \Rightarrow \{\Delta^1\} = \{\theta_2\}$

élément 2 : (2-3) : $w_2 = w_3 = 0 \Rightarrow \{\Delta^2\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$

élément 3 : (3-4) : $w_3 = 0, w_4 = \theta_4 = 0 \Rightarrow \{\Delta^3\} = \{\theta_3\}$

structure : $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$