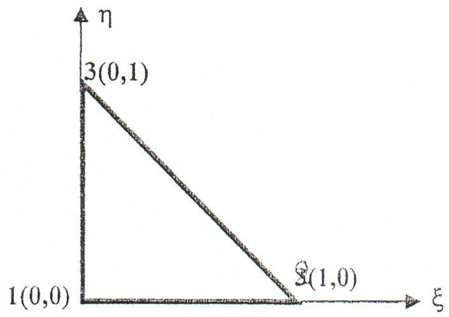
Nom et Prénom : Corrigé

xercice 1: Approcher le champ de déplacement Δ *de composantes* $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ d'un élément plaque triangulaire e référence conçu pour l'étude des problèmes de l'élasticité plane. **(3.5 Points)**

éterminer le déplacement au point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ si les déplacements des nœuds 1,2 et 3 sont spectivement : $\begin{Bmatrix} 0.0023 \\ -0.0011 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -0.0009 \\ 0.0018 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0.0014 \\ -0.0033 \end{Bmatrix}$ **(1.5 Points)**



olution :

$\Delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, $u = [N]\{U\} = \lfloor N_1 \; N_2 \; N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$,

de même $v = [N]\{V\} = \lfloor N_1 \; N_2 \; N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

tilisons des polynômes pour approcher u ou v

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta = \lfloor 1 \quad \xi \quad \eta \rfloor \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

C.L : Noeud 1 : $(\xi, \eta) = (0,0)$, $u = U_1 \Rightarrow U_1 = a_0$

Noeud 2 : $(\xi, \eta) = (1,0)$, $u = U_2 \Rightarrow U_2 = a_0 + a_1 \Rightarrow a_1 = U_2 - U_1$

Noeud 3 $(\xi, \eta) = (0,1)$, $u = U_3 \Rightarrow U_3 = a_0 + a_2 \Rightarrow a_2 = U_3 - U_1$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi-\eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

$$p^L = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

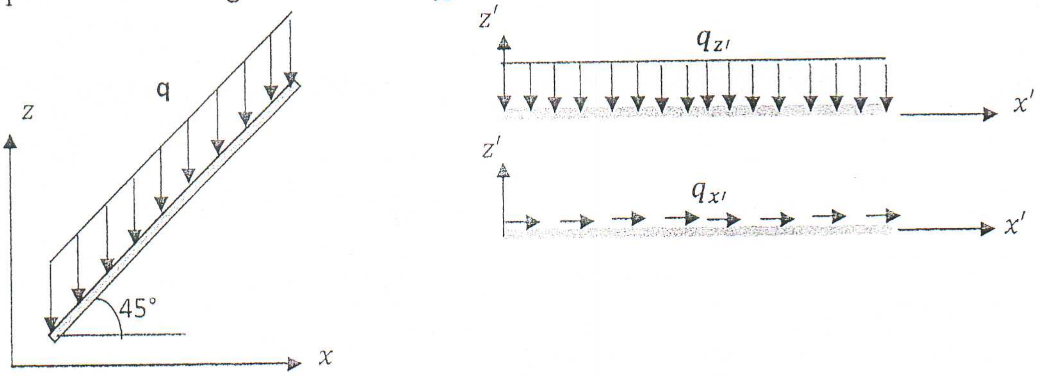
$$\Delta\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0023 \\ -0{,}0009 \\ 0{,}0014 \\ -0{,}0011 \\ 0{,}0018 \\ -0{,}0033 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{3} \times \left[0{,}0023 - 0{,}0005 + 0{,}0014 - 0{,}0011 + 0{,}0018 - 0{,}0033\right]$$

$$\Delta = 0{,}0002$$

Nom et Prénom : Corrigé

ercice 2: Pour l'élément barre de flexion et de traction compression (élément portique) de longueur L, iné de 45° par rapport à l'axe x global et chargé par une charge verticale uniforme q qu'on peut omposer en une charge transversale $q_{z'}$ et axiale $q_{x'}$



1. Dans le repère local de l'élément déterminer les charges nodales équivalentes. **(4 Points)**
2. Déterminer la matrice de transformation T de cet élément et écrire les charges nodales équivalentes précédemment déterminées en coordonnées globales. **(2 Points)**

---

ution : $\{q^e\} = \int_\Omega [N]^T q \, d\Omega \;, \quad q'_z = q'_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} q.$

$\{q^e_{z'}\} = \int_0^L [N]^T q_{z'} \, dx'$: élément de flexion

$q^e_{x'} = \int_0^L [N]^T q_{x'} \, dx'$: élément de Traction compression

$$\{q^e_{z'}\} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x'^2}{L^2} + \frac{2x'^3}{L^3} \\ -x' + \frac{2x'^2}{L} - \frac{x'^3}{L^2} \\ \frac{3x'^2}{L^2} + \frac{2x'^3}{L^3} \\ \frac{x'^2}{L} - \frac{x'^3}{L^2} \end{bmatrix} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} q\right) dx' = \frac{\sqrt{2}}{2} q \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ -\frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q'_1 \\ M'_1 \\ Q'_2 \\ M'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{q^e_{x'}\} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x'}{L} \\ \frac{x'}{L} \end{bmatrix} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} q\right) dx' = \frac{\sqrt{2}}{2} q \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{q'^e\} = \{q'_{z'}\} + \{q'_x\}$$

$$\{q'^e\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Pour cet élément : $\alpha = 45° \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{2} = S$

$$\Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\{q'^e\} = [T]\{q^e\} \Longrightarrow \{q^e\} = [T]^{-1}\{q'^e\} \quad \text{or ici } [T]^{-1} = [T]^T$$

$$\Rightarrow \{q^e\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

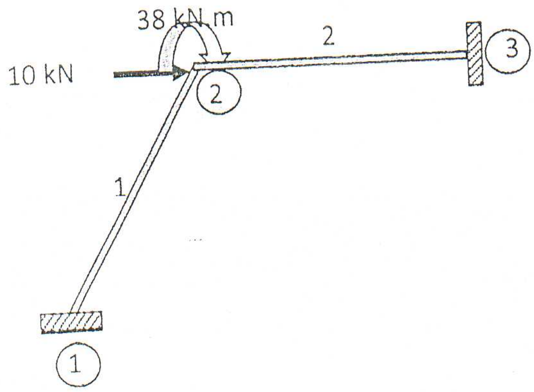
$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\,qL^2}{24} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\cdot}\,qL^2 \end{Bmatrix}$$

Nom et Prénom : Corrigé

Exercice 3 :

On donne la matrice de rigidité écrits dans le repère global de chacun des deux éléments de la structure de la figure ci-dessous.

1. Former les vecteurs déplacements réduits de la structure et de chacun des deux éléments **(3 Points)**
2. Former la matrice de rigidité réduite de chaque élément, en introduisant les conditions aux limites. **(2Points)**
3. Ecrire le vecteur force extérieur réduit de la structure. **(1 Point)**
4. Faire l'assemblage par l'une des deux méthodes et écrire le système global permettant de déterminer les déplacements du nœud intermédiaire. **(4 Points)**



$$[K^1] = \begin{bmatrix} 0.6303 & 2.1708 & 0.1753 & -0.6303 & -2.1708 & 0.1753 \\ 2.1708 & 8.7707 & -0.0438 & -2.1708 & -8.7707 & -0.0438 \\ 0.1753 & -0.0438 & 0.4967 & -0.1753 & 0.0438 & 0.2484 \\ -0.6303 & -2.1708 & -0.1753 & 0.6303 & 2.1708 & -0.1753 \\ -2.1708 & -8.7707 & 0.0438 & 2.1708 & 8.7707 & 0.0438 \\ 0.1753 & -0.0438 & 0.2484 & -0.1753 & 0.0438 & 0.4967 \end{bmatrix} \quad [K^2] = \begin{bmatrix} 7.6800 & 0.0000 & 0.0000 & -7.6800 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0492 & -0.1220 & 0.0000 & -0.0492 & -0.1229 \\ 0.0000 & -0.1229 & 0.4096 & 0.0000 & 0.1229 & 0.2048 \\ -7.6800 & 0.0000 & 0.0000 & 7.6800 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0492 & 0.1229 & 0.0000 & 0.0492 & 0.1229 \\ 0.0000 & -0.1229 & 0.2048 & 0.0000 & 0.1229 & 0.4096 \end{bmatrix}$$

Solution :

élément 1 $\quad u_1 = w_1 = \theta_1 = 0 \Rightarrow \{\Delta^1\}^* = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

élément 2 $\quad u_3 = w_3 = \theta_3 = 0 \Rightarrow \{\Delta^2\}^* = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

structure $\quad u_1 = w_1 = \theta_1 = u_3 = w_3 = \theta_3 = 0 \Rightarrow \{\Delta\}^* = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

$$[K^{1}]^{*} = \begin{bmatrix} 0,6303 & 2,1708 & -0,1753 \\ 2,1708 & 8,7707 & 0,0438 \\ -0,1753 & 0,0438 & 0,4967 \end{bmatrix} \qquad [K^{2}]^{*} = \begin{bmatrix} 7,6800 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0492 & -0,1220 \\ 0 & -0,1220 & 0,4096 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}^{*} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 38 \end{Bmatrix}$$

Assemblage par la méthode directe

$$[K^{*}] = \begin{bmatrix} 0,6303 + 7,6800 & 2,1708 + 0 & -0,1753 + 0 \\ 2,1708 + 0 & 8,7707 + 0,0492 & 0,0438 + -0,1220 \\ -0,1753 + 0 & 0,0438 + -0,1220 & 0,4967 + 0,4096 \end{bmatrix} \Rightarrow [K^{*}] = \begin{bmatrix} 8,3103 & 2,1708 & -0,1753 \\ 2,1708 & 8,8199 & -0,0782 \\ -0,1753 & -0,0782 & 0,9063 \end{bmatrix}$$

Assemblage par la méthode de la Transf. de Congruences

$$[C]^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K^{e}]^{*} = \begin{bmatrix} [K^{1}]^{*} & \\ & [K^{2}]^{*} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[K]^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,6303 & 2,1708 & -0,1753 & 0 & 0 & 0 \\ 2,1708 & 8,7707 & 0,0438 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1753 & 0,0438 & 0,4967 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 7,6800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0492 & -0,1220 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1220 & 0,4096 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^{*}] = \begin{bmatrix} 8,3103 & 2,1708 & -0,1753 \\ 2,1708 & 8,8199 & -0,0782 \\ -0,1753 & -0,0782 & 0,9063 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

le système est donc

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 38 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,3103 & 2,1708 & -0,1753 \\ 2,1708 & 8,8199 & -0,0782 \\ -0,1753 & -0,0782 & 0,9063 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$