Université de M'sila

Faculté de technologie **SOCLE COMMUN**

Corrigé du contrôle de Phys.01 (2016/2017)

Questions générales

1°- Relation entre coordonnées : cartésiennes et sphériques :

Cartésiennes et sphériques: $\begin{cases} x = r.sin\theta.cos\varphi \\ y = r.sin\theta.sin\varphi \\ z = r.cos\theta \end{cases}$ 0.75

Cartésiennes et cylindriques: $\begin{cases} x = \rho.cos\theta \\ y = \rho.sin\theta \\ z = z \end{cases}$ 0.75

2°- les modules de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ ***ne changent pas*** 0.75

3°- Les vecteurs $\vec{v} \perp \vec{a}$ dans le mouvement ***circulaire uniforme*** 0.75

4°- les conséquences d'un moment cinétique $\vec{L}$ constant

$$\sum \overrightarrow{M}_{/o}^{ex} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} |\vec{r}| = 0 \Rightarrow & \textit{système au repos} \\ |\vec{F}| = 0 \Rightarrow & \textit{système isolé ou en équilibre} \\ \vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow & \textit{système soumis à des forces centrales} \end{cases}$$ 1

Exercice 01 (06pts)

1°- Vitesse au point "B" :

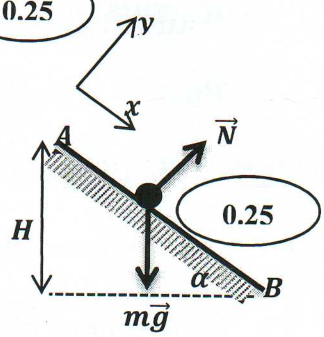
Le système part du repos ($v_0 = v_A = 0$) sur un plan incliné lisse ($\mu = 0$)

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{(masse ponctuelle).} \Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$ 0.25

On fait la projection sur la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: \; mgsin(\alpha) = ma_x & (1) \\ \overrightarrow{oy}: \; N - mgcos(\alpha) = ma_y & (2) \end{cases}$$ 0.5 0.5



Puisqu'il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{oy} \Rightarrow a_y = 0$ et $a_x = a$

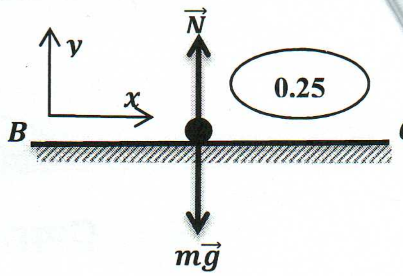
$(1) \Rightarrow \boxed{gsin\alpha = a = constante}$ (3) 0.25

$\Rightarrow$ Le mouvement est uniformément varié (accéléré) : $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ (4)

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) \Rightarrow \boxed{v_B^2 = 2gH}$ car $sin\alpha = \frac{H}{x_B - x_A} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gH}}$ 0.5

2°- Vitesse au point "C" :

$$\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad \text{(masse ponctuelle).}$$



On fait la projection sur la base $(\vec{i};\vec{j})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: \ 0 = ma_x & (5) \quad 0.5 \\ \overrightarrow{oy}: \ N - mg = 0 & (6) \quad 0.5 \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{oy} \implies a_y = 0$ et $a_x = a$

$(5) \implies 0 = ma_x = a \implies$ Le mouvement est uniforme : $\boxed{v_C = v_B = \sqrt{2gH}}$ 0.25

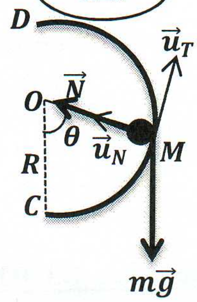
2°- Vitesse au point "C" :

$$\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad \text{(masse ponctuelle).}$$

Sur la base $(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$: $\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N$ 0.25

On fait la projection sur cette base $(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$:

0.25



$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ -mg\sin\theta = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} & (7) \quad 0.5 \\ \vec{u}_N: \ N - mg\cos\theta = ma_N = m\dfrac{v^2}{R} & (8) \quad 0.5 \end{cases}$$

Sachant que : $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ or $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}$

$$(7) \implies -g\sin\theta = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{R} \implies \int_0^{\theta_M} -Rg\sin\theta d\theta = \int_{v_C}^{v_M} v dv$$

$$\boxed{v_M = \sqrt{2g[(H-R) + R\cos\theta]}} \quad 0.5$$

- Pour arriver au point "D" l'angle "$\theta = \pi$" et la vitesse en ce point est nulle $v_D = 0$.

  $v_D = 0 \implies 2g[(H-R) + R\cos\theta] = 0 \implies \boxed{H = 2R}$ 0.25

Exercice 02 (05 pts)

1°- Le mouvement exécuter est un mouvement composé

- Mouvement circulaire dans le plan "xoy" d'équation : $x^2 + y^2 = R^2$
- Mouvement rectiligne le long de " oz " d'équation : $z = a.t$ 1

La combinaison de ces deux mouvements donne une **hélice circulaire**.

2°- vecteur position $\overrightarrow{OM}$

- Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = R\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right) + at\vec{k}}$ 0.5

- Dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$: $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = R\vec{u}_\rho + at\vec{k}}$ car $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R$ 0.5

3°- Vecteur vitesse et vecteur accélération

- Vecteur vitesse : par définition $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

1- Dans la base cartésienne :

$$\vec{v} = \frac{d\left[R\left(cos\omega t\vec{i} + sin\omega t\vec{j}\right) + at\vec{k}\right]}{dt} = R\omega\left(-sin\omega t\vec{i} + cos\omega t\vec{j}\right) + a\vec{k}$$ 0.5

2- Dans la base cylindrique :

$$\vec{v} = \frac{d\left[R\vec{u}_\rho + at\vec{k}\right]}{dt} = R\omega\vec{u}_\theta + a\vec{k} \quad \text{car} \quad \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = \omega$$ 0.5

- Vecteur accélération : par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

1- Dans la base cartésienne :

$$\vec{a} = \frac{d\left[R\omega\left(-sin\omega t\vec{i} + cos\omega t\vec{j}\right) + a\vec{k}\right]}{dt} = -R\omega^2\left(cos\omega t\vec{i} + sin\omega t\vec{j}\right)$$ 0.5

2- Dans la base cylindrique :

$$\vec{a} = \frac{d\left[R\omega\vec{u}_\theta + a\vec{k}\right]}{dt} = -R\omega^2\vec{u}_\rho$$ 0.5

4°- L'abscisse curviligne s

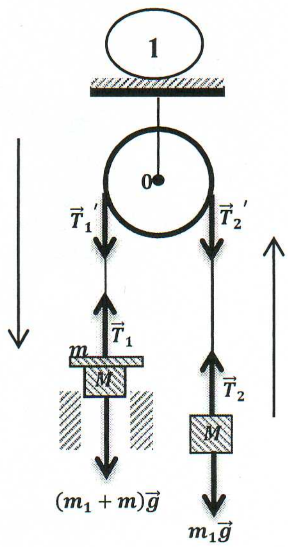
Sachant que : $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ or $\theta = \omega t \Rightarrow d\theta = \omega dt$

$$\Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int v\,dt = \int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{R^2 + (a/\omega)^2}\,d\theta \Rightarrow \boxed{s = \sqrt{R^2 + (a/\omega)^2}\,\theta}$$ 1

Exercice 03 (05pts)

1°- le principe fondamental de la dynamique appliqué au deux masses et la surcharge.

On a : $m_1 = m_2 = M$; $m = 0.05M$; $h_1 = 1\,m$; $h_2 = 0.69\,m$



Le principe fondamental de la dynamique $\left(\sum\vec{F}^{ex} = m\vec{a}\right)$ nous donne :

$$\begin{cases} \text{pour } m_1 : & (m_1 + m)g - T_1 = (m_1 + m)a & (1) \\ \text{pour } m_2 : & T_2 - m_1 g = m_1 a & (2) \end{cases}$$ 0.5 0.5

Puisque le fil est inextensible et la poulie de masse négligeable et sans frottements :

$$\boxed{T_1 = T_1' \quad T_2 = T_2' \quad T_1' = T_2'}$$ 0.5

Ce qui donne :
$$\begin{cases} (M + m)g - T = (M + m)a & (3) \\ T - Mg = Ma & (4) \end{cases}$$ 0.25 0.25

Ajoutant les deux équations (3) et (4) membre à membre, on aura :

$mg = (2M + m)a \quad \Rightarrow a = \frac{m}{2M+m} \cdot g$ si $m = 0.05M$ alors

$$\boxed{a = 24.4.10^{-3} g \quad (5)}$$ 0.5

2°- les vitesses juste avant l'enlèvement de la surcharge et après, sont égales

- avant l'enlèvement de la surcharge :

  $v_1^2 - v_{01}^2 = 2a(h_1 - h_{10})$ or $h_{10} = 0 = v_{10} \quad \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2ah_1}}$ (6) 0.5

- après l'enlèvement de la surcharge le mouvement devient uniforme $(m_1 = m_2 = M)$

$$\boxed{v_2 = \frac{h_2}{\Delta t} \quad (7)}$$ 0.5

utilisant (5), (6) et(7) en sachant que : $h_1 = 1m,\ h_2 = 0.69m$ et $\Delta t = 1s$

$v_1 = v_2 \Rightarrow \quad \sqrt{2ah_1} = \frac{h_2}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = 9.75\ {}^{m}/_{s^2}}$ 0.5