Université Mohamed-Boudiaf Msila. Faculté de Technologie

Département ST Module math 3 **Durée 1:30mn** 2016-2017.

Barème: (4pts+8pts+9pts)!

Exercice1: **(4pts)**

Etudier la nature des séries suivantes:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\ln n}$; c) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{e^{-n}}{n^n n!}$. (1+1+2pts)

Exercice2: **(8pts)**

Soit f une fonction periodique de periode 2π donnée par

$$f(t)=\begin{cases} 1-\frac{|t|}{\alpha}, & \text{si } -\alpha\leq t\leq \alpha, \\ 0, & \text{si } t\in[-\pi,-\alpha[\cup]\alpha,\pi]. \end{cases}, \text{ où } \alpha>0..$$

1) Montrer que la série de Fourier associée à f est donnée par:

$$\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{2}{\pi\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos n\alpha}{n^2}\cos nt \qquad \textbf{(1+1+2pts)}$$

2) a) Calculer la somme de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$, sachant que $\sum\limits_{1}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. (1pt)

b) Déduire << sans faire des calculs>>la série de Fourier en série de cosinus sur $(0,\pi)$ de la fonction $g(t)=\frac{\pi t}{2}-\frac{t^2}{4}$ **(2pts)**

c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ **(1pt)**

Exercice3: **(9pts)**

Trouver l'image par la transformée de Laplace de:

a) $f_1(t)=(\cos 2t+\sin 2t)^2$, $t\geq 0$. **(1pt)**

b) $f_3(t)=e^{-at}\cos(\alpha t+\beta)\times\sin(\alpha t+\beta)$. $t\geq 0$, **(2pts)**

2) Trouver l'origine <<l'inverse>> de :

a) $F_1(s)=\frac{1}{(s+1)^3}$, $\operatorname{Re}s>-1$ **(1.5pts)**

b) $F_2(s)=\frac{s+3}{(s^2+s+1)(s+1)^3}$ $\operatorname{Re}s>\frac{-1}{2}$ **(1.5pts)**

En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :$u''(t)+2u'(t)+u(t)=e^{-t}$, on donne $u(0)=\alpha$, $u'(0)=\beta$. (3pts)

Responsables de Module: Memou A.