



# Introduction aux Communications Numériques

Master M1 ISIM

March 19, 2012

Iryna ANDRIYANOVA

[iryna.andriyanova@u-cergy.fr](mailto:iryna.andriyanova@u-cergy.fr)

# Contenu du cours

<b>1</b>	<b>Chaîne de la communication numérique</b>	<b>5</b>
1.1	Chaîne de communication . . . . .	5
1.2	Modules de la chaîne de communication . . . . .	6
1.2.1	Brève description . . . . .	6
1.2.2	Diagramme détaillé du module mise-en-forme de signal . . . . .	7
1.2.3	Modeles des canaux de communications à considerer . . . . .	7
1.2.4	Diagramme détaillé du détecteur de signal . . . . .	8
1.3	Messages et signaux dans la chaîne de communication . . . . .	9
1.4	Débit de transmission . . . . .	12
1.5	Messages dans le domaine spectrale . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Transmission en absence du bruit</b>	<b>16</b>
2.1	Interférence entre symboles (IES) . . . . .	16
2.2	Annulation de l'IES : conditions de Nyquist . . . . .	18
2.2.1	Condition de Nyquist dans le domaine temporel . . . . .	18
2.2.2	Condition de Nyquist dans le domaine spectral . . . . .	19
2.2.3	Egalisation . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Détection en présence du bruit</b>	<b>24</b>
3.1	Probabilité d'erreur . . . . .	24
3.1.1	Définitions . . . . .	24
3.1.2	Cas des symboles binaires . . . . .	26
3.1.3	Cas des symboles $M$ -aires . . . . .	29
3.2	Récepteur optimal . . . . .	31
3.2.1	Filtre adapté . . . . .	31

3.2.2	Réponse du filtre adapté . . . . .	33
3.2.3	Partage optimal du canal de Nyquist . . . . .	34
3.3	Performances du schéma de transmission . . . . .	36
3.3.1	Probabilité d'erreur minimal, rapport signal-à-bruit . . . . .	36
3.3.2	Taux d'erreurs binaires . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Transmission en bande transposée</b>	<b>40</b>
4.1	Quelques notions utiles sur la transformée de Fourier . . . . .	41
4.2	Détection en absence du bruit: équivalent du signal en bande transposée dans la bande de base . . . . .	43
4.3	Conversion bande de base/bande transposée . . . . .	44
4.4	Bruit du canal équivalent en bande de base . . . . .	45
4.4.1	Bruit additif équivalent en bande de base . . . . .	46
4.5	Exemple important . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Modulations numériques</b>	<b>50</b>
5.1	Compromis entre l'efficacité spectrale, la puissance et le taux d'erreurs . . . . .	50
5.2	Modulation/démodulation dans la chaîne de communication . . . . .	52
5.3	Types des modulations . . . . .	53
5.4	Etiquetage des points de constellation . . . . .	55
5.5	Comparaison des modulations diverses . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Détection vectorielle</b>	<b>59</b>
6.1	Cas binaire sur le canal gaussien vectoriel . . . . .	59
6.2	Cas $M$ -aire sur le canal gaussien vectoriel . . . . .	62
6.2.1	Borne de l'union (des événements) . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Codage de canal et de source</b>	<b>65</b>
7.1	Codage de canal: quelques schémas de base . . . . .	65
7.1.1	Théorie de codage classique . . . . .	67
7.1.2	Théorie de codage moderne . . . . .	68
7.2	Codage de source . . . . .	68
7.2.1	Codes à longueur variable . . . . .	69
7.2.2	Code à longueur fixe . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Canaux de transmission dans les systèmes des communications sans fils</b>	<b>71</b>

8.1	Modèles des canaux de transmission sans fils . . . . .	71
8.1.1	Espace libre, émetteur et récepteur fixes . . . . .	72
8.1.2	Espace libre, récepteur mobile . . . . .	72
8.1.3	Emetteur et récepteur fixes, obstacle fixe . . . . .	72
8.1.4	Récepteur mobile, obstacle fixe . . . . .	73
8.2	Reflection du sol, effet de la distance et des grands obstacles . . . . .	74
8.3	Modèle mathématique du canal sans fil . . . . .	74
8.3.1	Canal sans fil comme un système linéaire variant en temps . . . . .	74
8.3.2	Modèle équivalent en bande de base . . . . .	75
8.3.3	Modèle du canal après l'échantillonnage . . . . .	75
8.3.4	Présence du bruit blanc additif gaussien . . . . .	75
8.4	Performance sur le canal de Rayleigh . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Exercices</b>	<b>78</b>

## Section 1

# Chaîne de la communication numérique

Dans cette section nous allons voir la chaîne de communication point-à-point et la plupart de ses modules. Nous allons aussi étudier les différents types de canaux de transmission et des méthodes de transmission adaptées à chacun des types. Nous allons voir le modèle de communication entre le source et le destinataire et la transformation des signaux avec la communication.

### 1.1 Chaîne de communication

Nous avons tous utilisés un téléphone portable ou un ordinateur pour communiquer une certaine information. Dans ce cours nous allons voir les mécanismes qui permettent à ces communications d'avoir lieu. La chaîne de communication totale est donnée sur Figure 4.3.

Cette chaîne de communication représente la communication appelée "point-à-point", c'est-à-dire d'une seule source à un seul destinataire, et est la base pour les autres modèles des communications, comme

- communication multi-utilisateurs (plusieurs sources - un destinataire),
- communication broadcast (un source - plusieurs destinataires)
- reseaux adhoc (plusieurs sources - plusieurs destinataires)

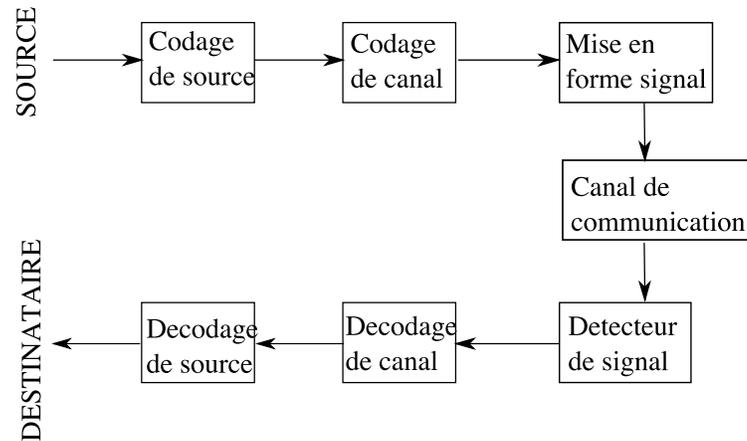


Figure 1.1: Chaîne de communication

## 1.2 Modules de la chaîne de communication

### 1.2.1 Brève description

*Canal de communication* : Un canal de communication donne une possibilité de communiquer à grandes distances. Ce module représente les signaux extérieurs et le bruit qui affectent la transmission. Evidemment, chaque système de communication a un modèle de canal approprié. L'objectif principal de ce cours est de comprendre les techniques du traitement du signal permettant de communiquer sous différents types de canaux.

Exemples des canaux de communication différents: lignes téléphoniques, câbles TV, réseaux sans fils, liens satellitaires.

*Codage de source* : Le but de communiquer est d'être capable de parler, écouter la musique, regarder un video, regarder une page web par Internet etc. Dans tous ces cas le "signal" étant respectivement la voix, la musique, le video, les graphiques sont à convertir en une suite des bits. Un tel appareil est appelé le quantificateur. Il existent plusieurs méthodes de quantification qui convertissent et compriment le signal en bits.

*Codage de canal* : Le codeur de canal ajoute une redondance pour protéger l'information contre les erreurs introduites par un canal de communication bruité.

*Mise en forme du signal* : ceci une partie de la chaîne que nous allons étudier le plus en détail. Ce module convertit les bits en signal approprié pour le canal de communication, qui est typiquement

analogique. Alors les messages (les groupes de bits) sont convertis en ondes de transmission qui seront envoyés par le canal.

*Détecteur de signal* : se basant sur l'observation bruitée du signal, le détecteur doit décider quel message a été émis. La procédure de détection dépend des techniques de mise-en-forme utilisés, aussi que du canal de communication. Dans ce cours nous allons discuter de plusieurs techniques de détection.

### 1.2.2 Diagramme détaillé du module mise-en-forme de signal

Voici le schéma détaillé du module de mise-en-forme du signal:

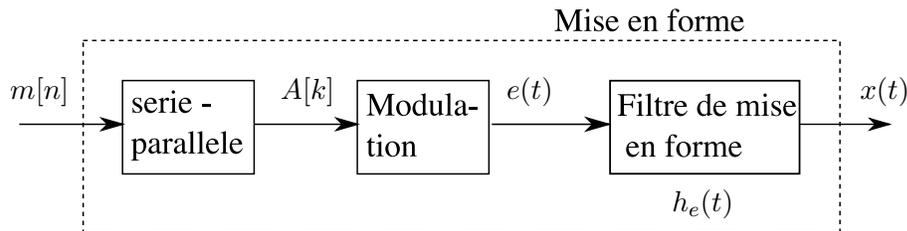


Figure 1.2: Mise en forme de signal

La notation utilisée:

- $m[n]$ : un message binaire émis constitué de  $n$  bits
- $A[k]$ :  $k$  vecteurs, chacun contenant  $n/k$  bits
- $e(t)$ : un signal modulé obtenu par la transformation des symboles en signaux
- $h_e(t)$ : filtre de mise-en-forme
- $x(t)$ : signal numérique émis

### 1.2.3 Modeles des canaux de communications à considerer

Figure 1.3 représente un modele général d'un canal de communication.

Notation utilisée:

- $h_c(t)$  : réponse impulsionnelle du canal

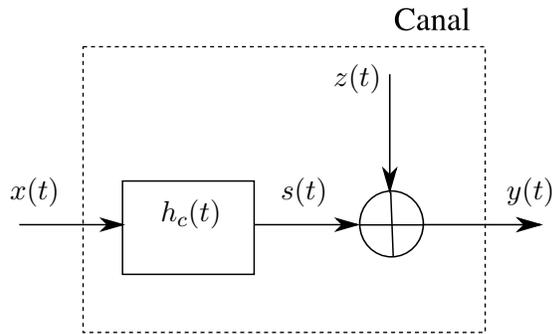


Figure 1.3: Modèle général du canal de communication

-  $z(t)$  : bruit additif gaussien

-  $y(t)$ : signal à la sortie du canal / à l'entrée du détecteur de signal

Nous allons considérer les types de canaux suivants:

- canal du bruit additif gaussien (AWGN):  $y(t) = x(t) + z(t)$
- canal invariant:  $h_c(t)$  constant
- canal sélectif en fréquence:  $h_c(t) = h_c(t, f_0)$
- canal sélectif en temps:  $h_c(t) = h_c(t, T_0)$
- canal variant en temps et en fréquence:  $h_c(t) = h_c(t, f_0, T_0)$

#### 1.2.4 Diagramme détaillé du détecteur de signal

Figure 1.4 présente le schéma du détecteur de signal.

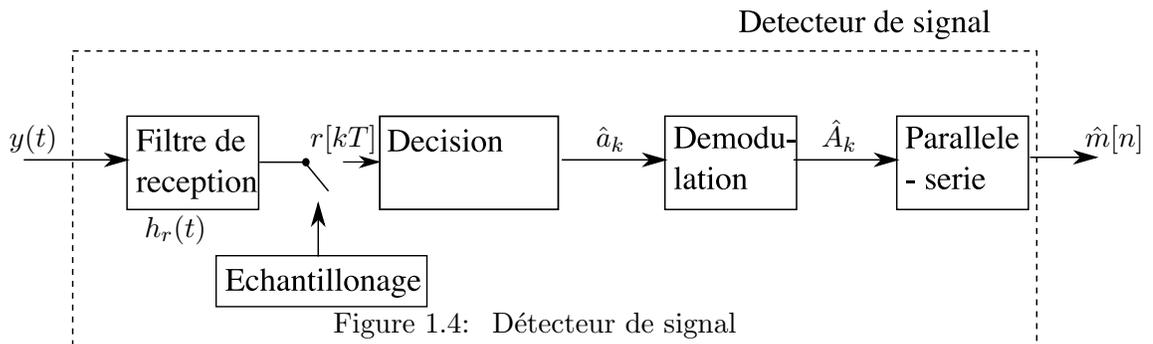


Figure 1.4: Détecteur de signal

Notation utilisée:

- $h_r(t)$ : filtre de réception
- $r[kT]$ : signal filtré échantillonné
- $\hat{a}_k$  : symboles détectés
- $\hat{A}_k$  : vecteurs de bits demodulés
- $\hat{m}[n]$  : message binaire estimé

### 1.3 Messages et signaux dans la chaîne de communication

Considérons la transformation des signaux dans la chaîne de communication.

Supposons que nous avons un paquet de  $v$  bits à l'entrée du codeur du canal. Ce paquet de bits utiles (ne contenant que l'information) est encodé par le codeur de canal en message (encodé) de  $n$  bits, noté comme  $m[n]$ . Ensuite la conversion série-parallèle est réalisée: on obtient  $k$  vecteurs de  $n/k$  bits chacun, noté comme  $A[k]$ .

Le modulateur effectue la transformation des vecteurs  $A$  en symboles  $a_k$ , qui peuvent prendre comme les valeurs réelles ainsi que complexes.

**Exemple :** Dans Figure 1.5, la génération d'un signal émis est présenté. Pour cet exemple, la longueur des vecteurs  $A$  est égale à 2, et la transformation suivante est effectuée:

$$\begin{array}{rcl} A[k] & \rightarrow & a_k \\ 00 & \rightarrow & -3 \\ 01 & \rightarrow & -1 \\ 11 & \rightarrow & 1 \\ 10 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

Dans le cas des valeurs réelles, chaque symbole  $a_k$  peut prendre une valeur parmi  $M$ . Les symboles  $a_k$  donc sont les symboles M-aires. Les symboles  $\{a_k\}$  M-aires "normalisés" prennent des valeurs situées symétriquement de part et d'autre du zéro :  $a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm M/2\}$ . Chaque symbole  $a_k$  d'information transporte à lui seul  $\log_2 M$  bits.

Le signal à la sortie du modulateur est constitué d'une suite d'impulsions réalisant le support physique de symboles d'information  $\{a_k\}$ . Le signal  $e(t)$  est donc obtenu de façon équivalente avec un filtre de mise-en-forme de réponse impulsionnelle excité par le train d'impulsions de Dirac

:

$$e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s),$$

avec une période de répétition  $T_s$  comme c'est montré dans Figure 1.5.

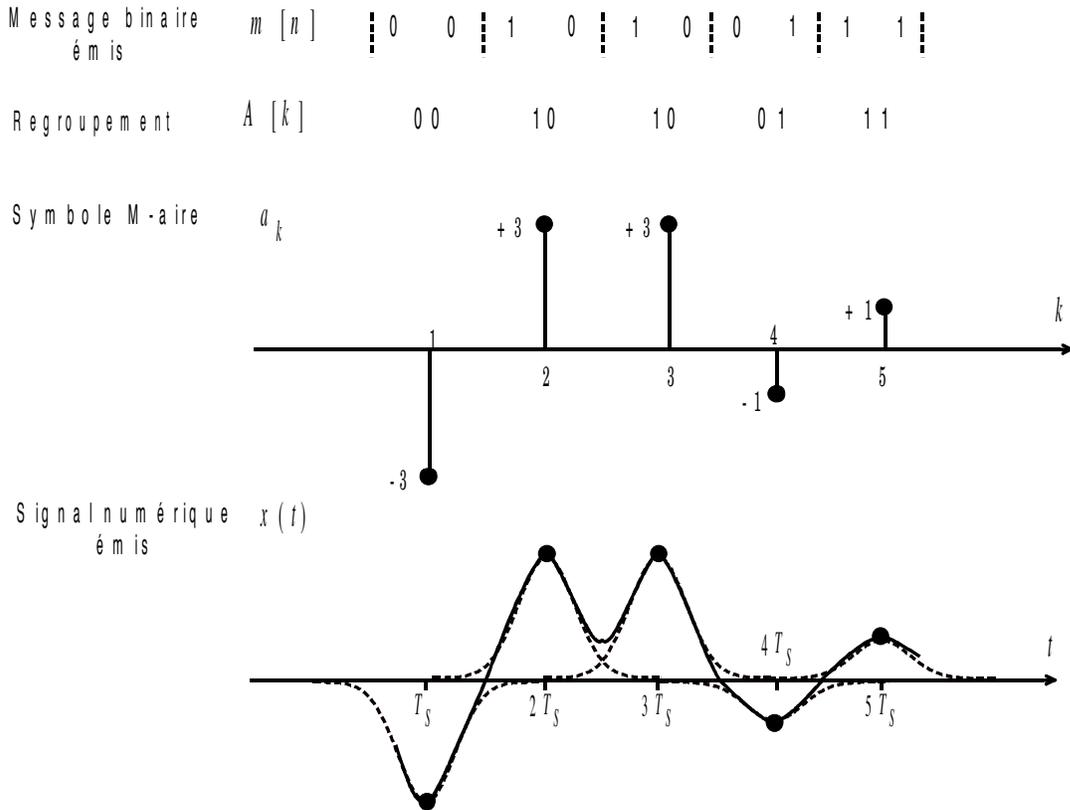


Figure 1.5: Signal numérique émis  $x(t)$

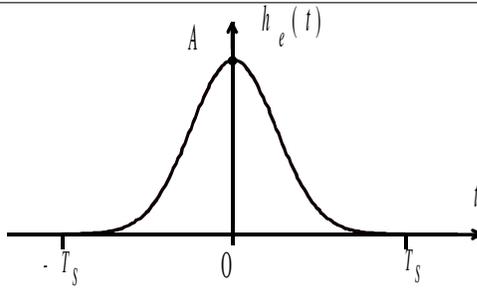
Chaque impulsion est un multiple d'une forme d'impulsion de base, comme par exemple celui présenté dans Figure 1.6. La forme de l'impulsion de base est donnée par la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme  $h_e(t)$ .

L'expression générale d'un signal numérique émis est donc :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\delta * h_e)(t - kT_s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s)$$

.

Le modèle du canal de communication comprend un terme de filtrage linéaire et du bruit additif


 Figure 1.6: Impulsion de base  $h_e(t)$ 

gaussien. Le signal à la sortie du canal est

$$y(t) = s(t) + z(t),$$

où  $z(t)$  est le bruit gaussien. La composante  $s(t)$  est donnée par :

$$s(t) = (x * h_c)(t) = (e * (h_e * h_c))(t) = (e * h)(t).$$

Alors nous avons

$$y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) + z(t).$$

Le canal introduit une déformation de l'impulsion de base émise.

A la réception, le signal  $y(t)$  passe par le filtre de réception. Nous avons à la sortie du filtre

$$r(t) = (y * h_r)(t) = (e * h * h_r)(t) + (z * h_r)(t) = (e * g)(t) + b(t).$$

A l'échantillonnage, la valeur instantanée de l'amplitude de l'impulsion est capturée à l'instant de décision  $t = kT_s$ . Cette opération suppose une cohérence locale avec l'horloge cadencant les symboles, la synchronisation requise étant effectuée à partir du signal reçu lui-même (récupération de rythme symbole). Le signal soumis à échantillonnage s'écrit :

$$r[kT_s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(kT_s - nT_s) + b[kT_s].$$

Ensuite, la valeur estimée  $\hat{a}_k$  du symbole transmis est déterminée à partir de la valeur échantillonnée à l'instant de décision, soit  $r(kT_s)$ . On opère par comparaison avec  $M$  seuils de décision. La présence de distorsion et/ou de bruit peut évidemment conduire à une erreur de symbole.

**Exemple** Organe de décision pour  $M = 4$ .

Le démodulateur estime les vecteurs des bits  $\hat{A}[k]$  à partir des symboles estimés  $a_k$ .  $A[k]$  sont ensuite reconvertis en paquet  $\hat{m}[n]$  étant une estimation du paquet  $m[n]$ . Finalement, le paquet est décodé par le décodeur du canal afin d'obtenir une estimation des bits utiles d'information.

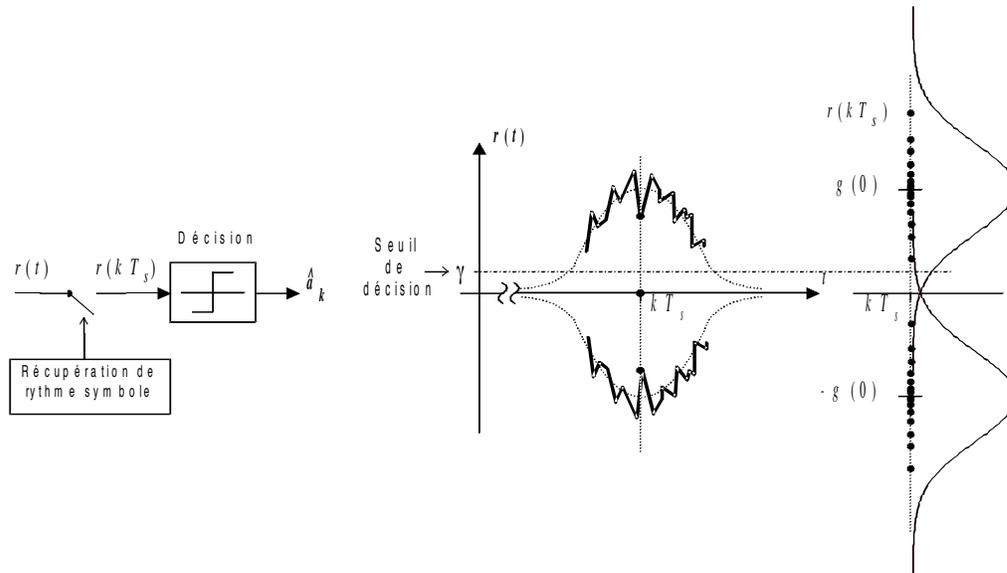


Figure 1.7: Exemple des seuils de décision

## 1.4 Débit de transmission

Le débit de transmission se mesure entre l'entrée du module de mise en forme et la sortie du détecteur de signal.

Le débit de symboles en symboles/s:

$$D_s = \frac{1}{T_s},$$

Le débit binaire en bits/s:

$$D_b = \frac{\log_2 M}{T_s}.$$

## 1.5 Messages dans le domaine spectrale

Rappelons-nous que les signaux ont la représentation temporelle et la représentation spectrale, qui sont équivalentes. La représentation spectrale est beaucoup utilisée lors de la description des méthodes de transmission.

Considérons le signal émis  $x(t)$ . La densité spectrale de puissance (DSP) de  $x(p)$  peut s'écrire comme

$$\hat{\gamma}_x(f) = \hat{\gamma}_e(f) |\hat{h}_e(f)|^2.$$

Le spectre dépend donc à la fois des caractéristiques du signal  $e(t)$  transportant les symboles et de la forme de l'impulsion de base. La DSP du signal  $e(t)$  est donnée par l'expression :

$$\hat{\gamma}_e(f) = \frac{1}{T_s} \left( \sigma_a^2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_a[p] \cos 2\pi p f T_s + \frac{m_a^2}{T_s} \right)$$

avec :

- $m_a$  : valeur moyenne des symboles
- $\gamma_a[p]$  : fonction d'autocorrélation des symboles
- $\sigma_a^2$  : variance des symboles

On en déduit que le spectre du signal numérique possède une partie continue et éventuellement, si  $m_a \neq 0$ , une partie constituée de raies. Dans le cas simplifié où les symboles ont une valeur moyenne nulle ( $m_a = 0$ ) et sont non corrélés ( $\gamma_a[p] = 0$  pour  $p=1,2,\dots$ ), on obtient que

$$\hat{\gamma}_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |\hat{e}(f)|^2.$$

La puissance moyenne du signal (variance), obtenue par intégration de cette expression, vaut

$$\sigma_x^2 = \sigma_a^2 \frac{E_h}{T_s}.$$

où  $E_h = \int_{-\infty}^{\infty} h_e^2(t) dt$  est l'énergie de l'impulsion de base  $h_e(t)$ .

**Exemple** : signal NRZ  $M$ -aire

La forme de l'impulsion de base est:

Les symboles  $a_k = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1)\}$  sont supposés non corrélés et équiprobables, alors la moyenne  $m_a = 0$ , la variance est

$$\sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{3}.$$

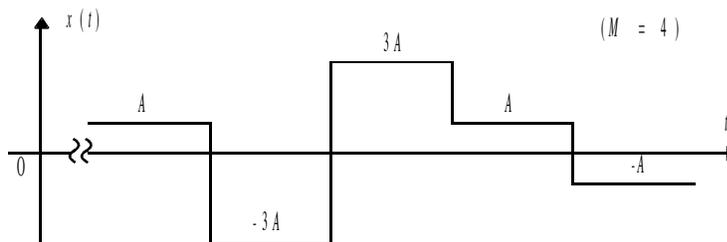


Figure 1.8:  $x(t)$  - signal NRZ  $M$ -aire

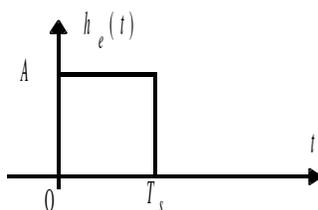


Figure 1.9: Impulsion de base NRZ

Nous obtenons donc la densité spectrale de puissance suivante:

$$\hat{\gamma}_x(f) = \frac{M^2 - 1}{3} A^2 T_s \sin^2 f T_s.$$

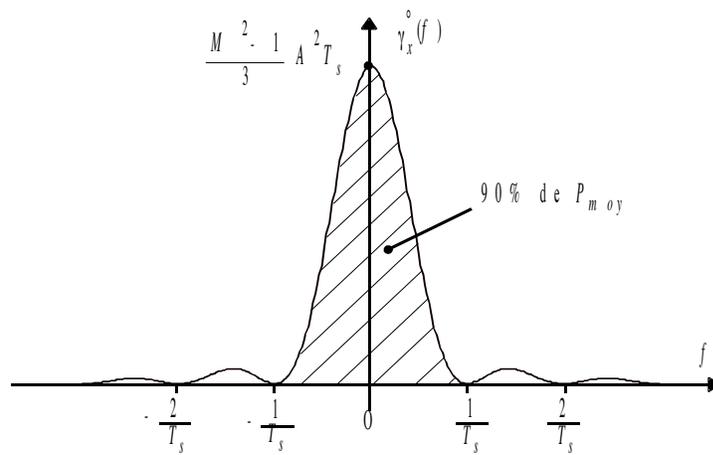


Figure 1.10: DSP obtenue

## Section 2

# Transmission en absence du bruit

Considérons le cas le plus simple de transmission: le canal est parfait, donc le bruit est absent. Il s'avère que même dans telles conditions favorables la transmission correcte peut être impossible...si votre filtre de mise en forme est mal choisi!

### 2.1 Interférence entre symboles (IES)

Ce phénomène se produit si l'amplitude de l'impulsion soumise à échantillonnage en réception dépend, à l'instant de décision, de symboles voisins :

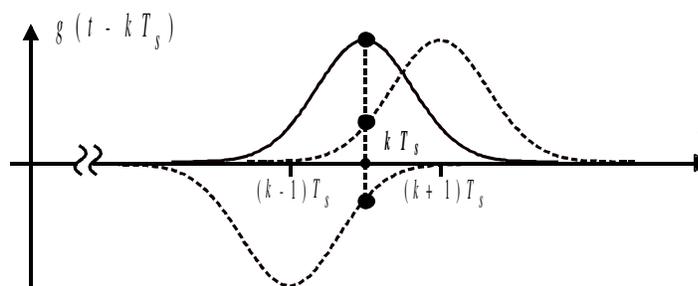


Figure 2.1: Exemple de l'interférence entre symboles

Le contrôle au niveau temporel du degré d'IES s'effectue de façon très simple sur un oscilloscope par le diagramme de l'oeil (Figure ??). En l'absence d'IES, l'oeil est complètement "ouvert" a

l'instant de décision: tous les trajets passent par deux points seulement en binaire (par  $M$  points en  $M$ -aire).

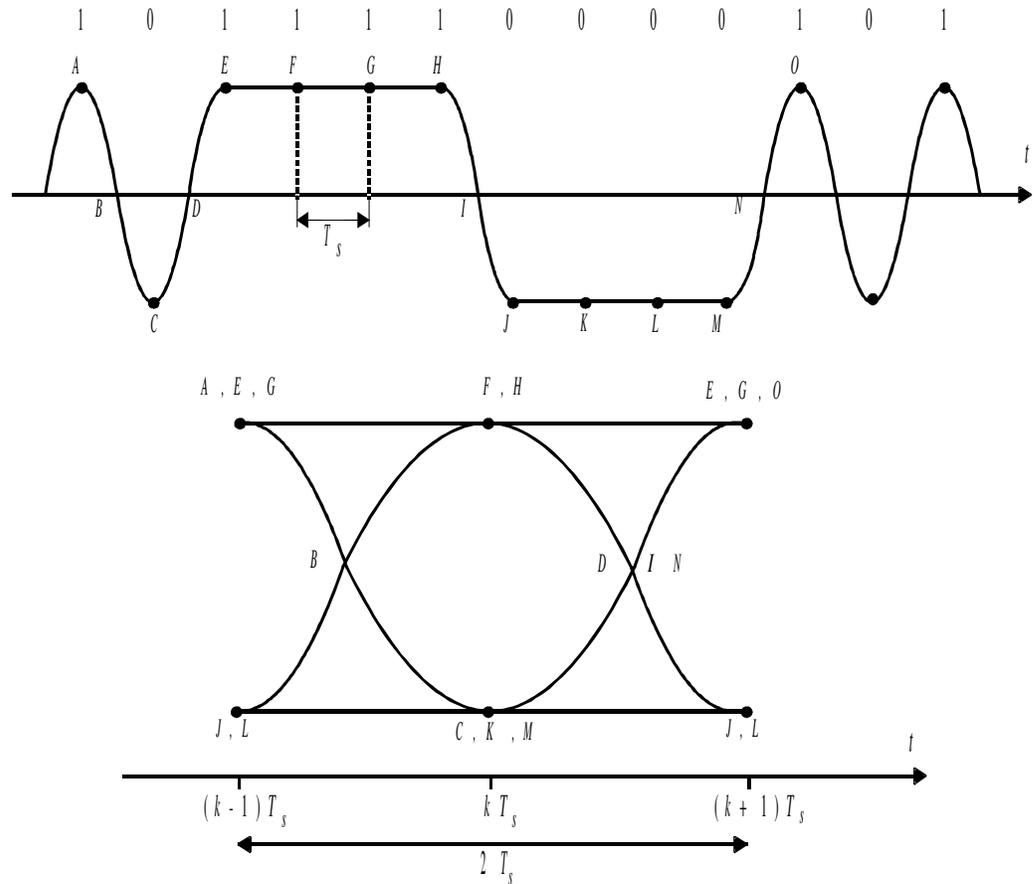


Figure 2.2: Diagramme de l'oeil

**Exemple** Voici les exemples des diagrammes de l'oeil pour la transmission binaire et  $M$ -aire:

Le diagramme de l'oeil met en évidence une ouverture verticale **a** (immunité au bruit), une ouverture horizontale **b** (immunité au déphasage de l'horloge), une pente **c** (immunité à la gigue d'horloge) et une fluctuation **d** (amplitude de la gigue du point de passage par zéro) (Figure 2.4)

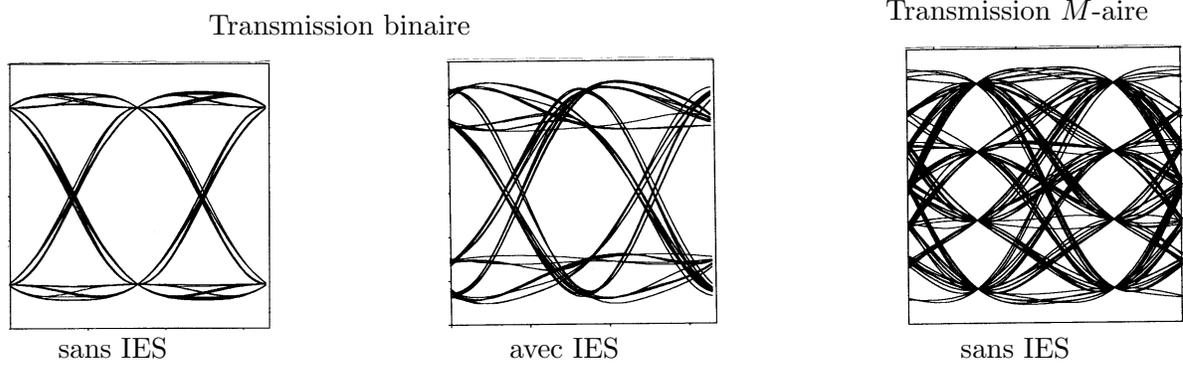


Figure 2.3: Exemples

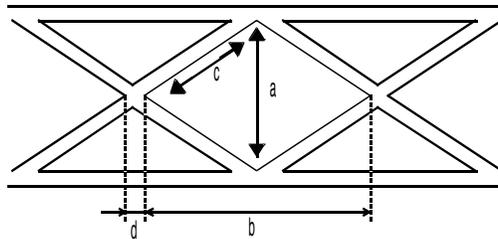


Figure 2.4: Caractéristiques du diagramme de l'oeil

## 2.2 Annulation de l'IES : conditions de Nyquist

### 2.2.1 Condition de Nyquist dans le domaine temporel

Le signal soumis à échantillonnage en réception  $r(t)$  ne comprend qu'une partie "signal", la partie "bruit" étant absent.  $r(t)$  donc s'écrit comme:

$$r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - kT_s) = a_k g(t - kT_s) + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k} a_n g(t - kT_s)$$

La valeur échantillonnée à l'instant de décision  $t = kT_s$  vaut :

$$r[kT_s] = a_k g(0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g((k - n)T_s)$$

où  $a_k g(0)$  est l'amplitude de l'impulsion "utile" attendue et le deuxième terme est le terme parasite d'IES. L'IES est nulle si l'on vérifie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g((k - n)T_s), \quad \forall a_n.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour ne pas avoir d'IES est que l'impulsion de base  $g(t) = (h_e * h_c * h_r)(t)$  possède la propriété :

$$g(kT_s) = g(0)\delta[k].$$

Les impulsions suivantes vérifient la condition de Nyquist dans le domaine temporel :

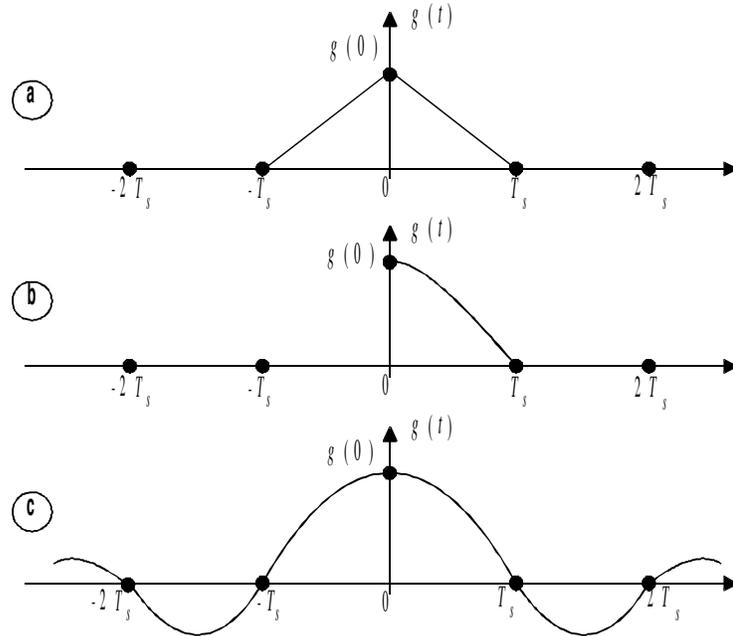


Figure 2.5: Exemples des impulsions vérifiant la condition de Nyquist (domaine temporel)

### 2.2.2 Condition de Nyquist dans le domaine spectral

Si la condition de Nyquist dans le domaine temporel est vérifiée, l'échantillonnage avec une période  $T_s$  de l'impulsion de base  $g(t)$  conduit alors à un seul Dirac en zéro :

$$g(t) \dots = g(0)\delta(t).$$

En prenant la transformée de Fourier (TF) des deux membres, on en déduit la condition dans le domaine spectral :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s g(0).$$

Des exemples de spectres d'impulsions de base vérifiant cette condition sont présentés dans Figure 2.6. Notons que les spectres 1, 2 et 3 des exemples ont un support fréquentiel borné alors que le spectre 4 possède un support fréquentiel infini.

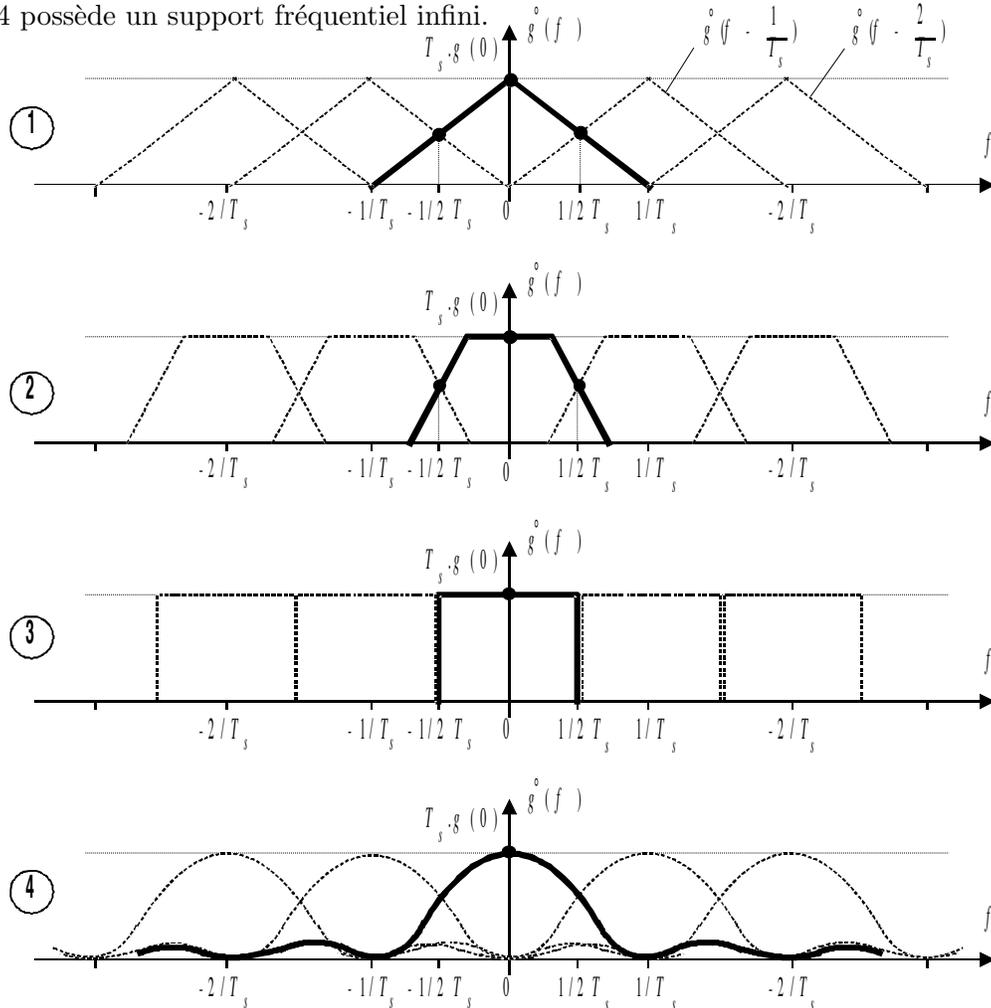


Figure 2.6: Exemples des impulsion vérifiant la condition de Nyquist (domaine spectral)

Compte-tenu des propriétés de la TF, il est impossible d'avoir un support borné à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. En pratique, le choix est imposé : la transmission doit s'effectuer dans un canal à bande passante limitée  $[-B, B]$ . On suppose que la TF de l'impulsion de base a un support fréquentiel borné, avec

$$\hat{g}(f) = 0 \text{ pour } |f| \geq \frac{1}{T_s}.$$

Cette situation est observée dans les exemples de spectres 1, 2 et 3 précédents. On vérifie alors facilement que la condition dans le domaine spectral conduit à la condition ci-dessous, de laquelle

découle le critere spectral de Nyquist :

$$\dot{g}\left(\frac{1}{2T_s} + \Delta f\right) + \dot{g}\left(\frac{1}{2T_s} - \Delta f\right) = \dot{g}(0)$$

**Critere spectral de Nyquist : l'IES est nulle si le point  $\left(\frac{1}{2T_s}, \frac{\dot{g}(0)}{2}\right)$  de la réponse en fréquence globale  $\dot{g}(f)$  est un centre de symétrie (voir Figure 2.8 pour a demonstration).**

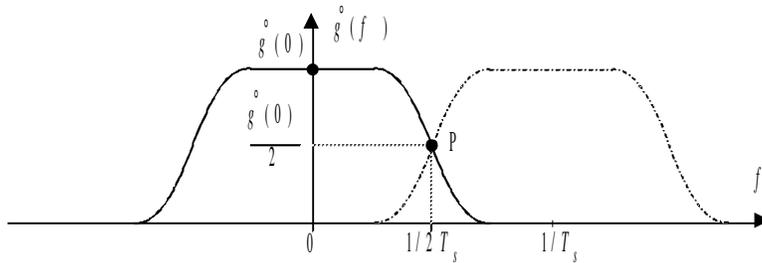


Figure 2.7: Demonstration du critere spectral de Nyquist

Lorsque les conditions de Nyquist sont vérifiées, l'ensemble du systeme constitue un "canal de Nyquist". Notons que la transmission sans IES est impossible si la bande passante  $B$  du canal est inférieure a la limite appelée la "fréquence de Nyquist":

$$B < \frac{1}{2T_s} = \frac{D_s}{2};$$

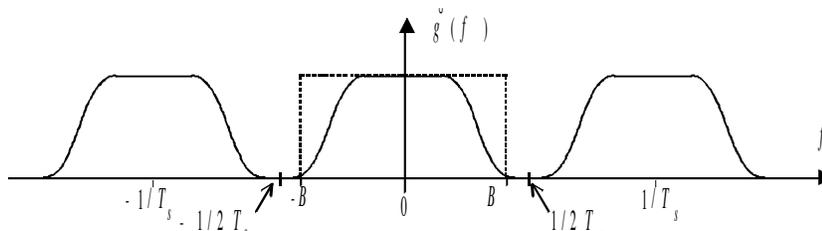


Figure 2.8: Bande passante inférieure a  $1/2T_s$

Présentons un exemple tres important de filtre en cosinus surélevé. **Exemple:** filtre de Nyquist en cosinus surélevé (raised cosine filter)

$$\dot{g}(f) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} [2|f|T_s - 1]\right)\right), & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s}, \\ T_s, & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s}, \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases}$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Dans le domaine temporel

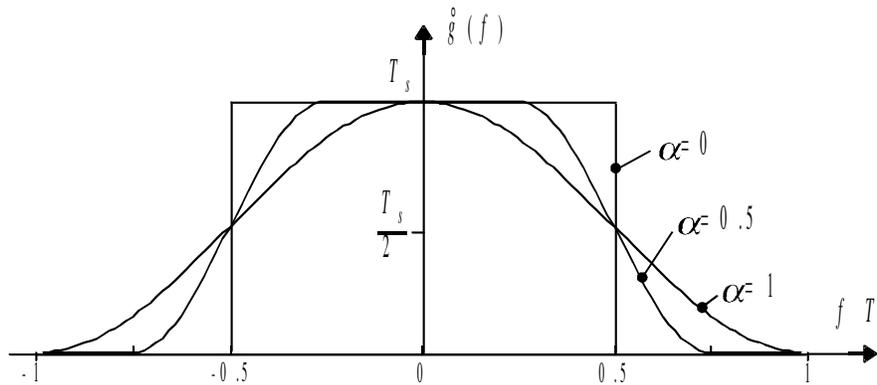


Figure 2.9: Cosinus surélevé dans le domaine spectral

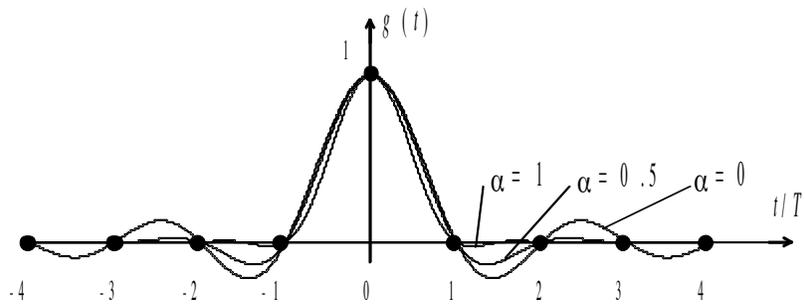


Figure 2.10: Cosinus surélevé dans le domaine temporel

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{(\pi t/T_s)} \frac{\cos(\pi \alpha t/T_s)}{1 - (\pi \alpha t/T_s)^2}$$

Le paramètre est appelé le coefficient d'arrondi ou parfois facteur de retombée (roll-off factor). La largeur spectrale est donnée par

$$B = \frac{1 + \alpha}{2T_s} = (1 + \alpha) \frac{D_s}{2}, \quad \text{donc } \frac{D_s}{2} \leq B \leq D_s.$$

### 2.2.3 Egalisation

En présence du bruit, le filtre de réception, de réponse en fréquence équivalente  $\hat{h}_r(f)$ , doit corriger, éventuellement de façon adaptative, la distorsion linéaire responsable de l'IES introduite par le canal. Le canal est dit égalisé lorsque la réponse globale vérifie le critère de Nyquist. En pratique, on y parvient à l'aide d'un filtre supplémentaire appelé égaliseur placé derrière le (les) filtre(s) d'entrée du récepteur, après échantillonnage (réalisation sous forme numérique). Plus d'information sur les techniques d'égalisation va être présentée plus tard dans le cours.

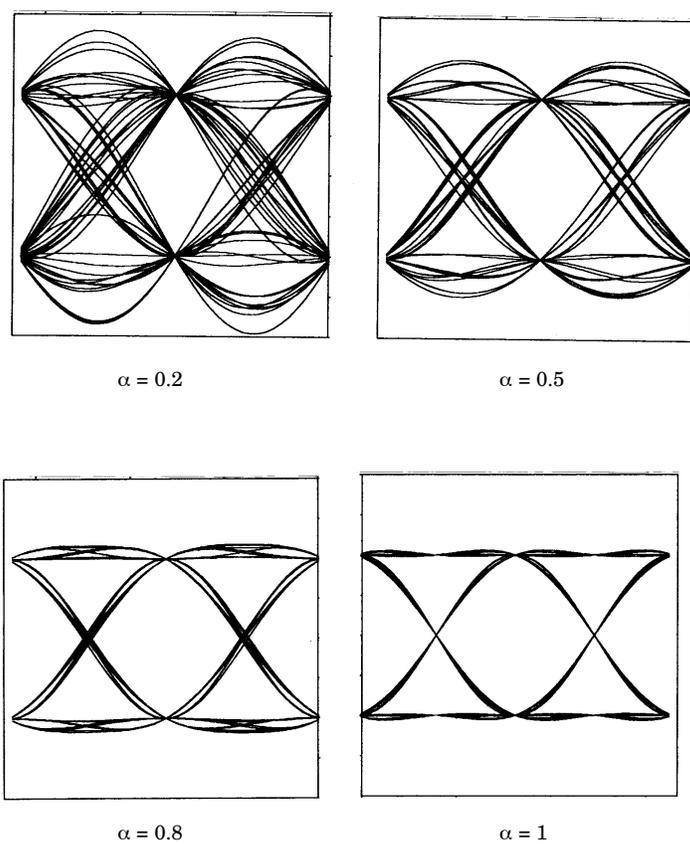


Figure 2.11: Filtre de Nyquist en cosinus surélevé : influence du coefficient d'arrondi

## Section 3

# Détection en présence du bruit

Dans ce cours nous allons considérer le module du détecteur du signal à la réception et allons introduire les mesures de performances d'un système de communication - taux d'erreurs par bit et taux d'erreurs par symbole. Supposons que le canal de transmission est le canal de Nyquist, c'est-à-dire l'interférence entre symboles du paquet est nulle. Plaçons-nous dans le cas quand le canal introduit un bruit au paquet transmis et considérons le fonctionnement du module de décision dans la chaîne de réception. Dans toute la section, le bruit est supposé d'être le **bruit blanc additif gaussien**.

### 3.1 Probabilité d'erreur

#### 3.1.1 Définitions

Le module de décision estime le  $k$ -ème symbole transmis  $a_k$  à partir de la valeur échantillonnée à l'instant de décision  $t = kT_s$ .

**Exemple:** La prise de décision dans le cas binaire s'effectue comme c'est démontré dans Fig.3.1. Le bit 0 correspond à  $a_k = -1$ , le 1 - à  $a_k = 1$ .

Dans le cas  $M$ -aire, la variable aléatoire "du signal" prend  $M$  valeurs ( $a_k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M/2$ ).

Nous avons

$$r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(t - kT_s) + b(t),$$

ce qui se traduit en (à cause de l'IES nulle)

$$r(kT_s) = a_k g(0) + b(kT_s).$$

La valeur échantillonnée  $r(kT_s)$  contient deux valeurs aléatoires:

- partie "signal"  $a_k g(0)$ , comme  $a_k = \pm 1$ ;
- partie "bruit"  $b(kT_s)$  - variable aléatoire centrée, de variance  $\sigma^2$ , non corrélée avec la partie "signal", ayant la densité de probabilité  $f_b(x)$ .

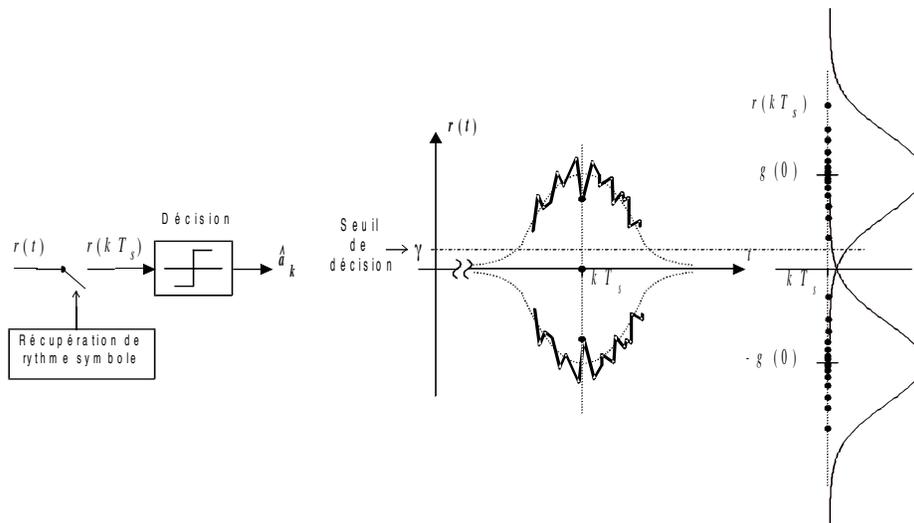


Figure 3.1: Prise de décision dans le cas binaire

$r(kT_s)$  est donc une variable aléatoire, avec la densité de probabilité

$$f_r(x) = \sum_{i=\pm 1, \pm M/2} \text{Prob}(a_k = i) f_r(x|a_k = i).$$

La densité conditionnelle de  $r[kT_s]$  s'écrit comme

$$f_r(x|a_k = i) = f_b(x - ig(0)).$$

**Exemple:** Dans Fig.3.1, nous avons l'illustration de deux densités conditionnelles de  $r[kT_s]$ , correspondant aux symboles émis  $+1$  et  $-1$ .

**Definition:** La probabilité d'erreurs par symbole est définie comme

$$P_s = \text{Prob}(\hat{a}_k \neq a_k).$$

**Definition:** La probabilité d'erreurs par bit est définie comme

$$P_b = \text{Prob}(\hat{b} \neq b).$$

Il existe une relation entre  $P_s$  et  $P_b$ :

$$\frac{P_s}{\log_2 M} \leq P_b \leq P_s.$$

La valeur minimale de  $P_b$  est atteinte quand un bit erroné conduit au symbole erroné, la valeur maximale - quand tous les bits dans un symbole sont estimés d'une manière incorrecte.

### 3.1.2 Cas des symboles binaires

Dans le cas binaire,  $a_k = \{\pm 1\}$ . En plus,  $P_s = P_b$ . Considérons deux hypothèses:

$$H_0 : a_k = -1$$

$$H_1 : a_k = +1$$

avec les probabilités  $\text{Prob}(a_k = -1) = p_0$  et  $\text{Prob}(a_k = +1) = p_1$ ,  $p_0 + p_1 = 1$ .

Soit  $\gamma$  est le seuil de décision, alors la règle de décision est:

$$r[kT_s] \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \gamma.$$

Une question importante est: quel est le choix optimal de  $\gamma$ , celui qui minimiserait la probabilité d'erreur? Pour trouver la réponse, considérons deux densités de probabilités conditionnelles, présentées dans Fig.3.2. Rappelons que

$$\begin{aligned} P_b &= p_0 P_b(\text{erreur} | 0) + p_1 P_b(\text{erreur} | 1) \\ &= p_0 \int_{-\infty}^{\gamma} f_r(x|0) dx + p_1 \int_{\gamma}^{\infty} f_r(x|1) dx; \\ \frac{dP_b}{d\gamma} &= -p_0 f_r(x|0) + p_1 f_r(x|1) = 0; \\ \frac{f_r(x|1)}{f_r(x|0)} &= \frac{p_0}{p_1}. \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{d^2 P_b}{d\gamma^2} = -p_0 \frac{df_r(x|0)}{dx} \Big|_{x=\gamma} + p_1 \frac{df_r(x|1)}{dx} \Big|_{x=\gamma} > 0,$$

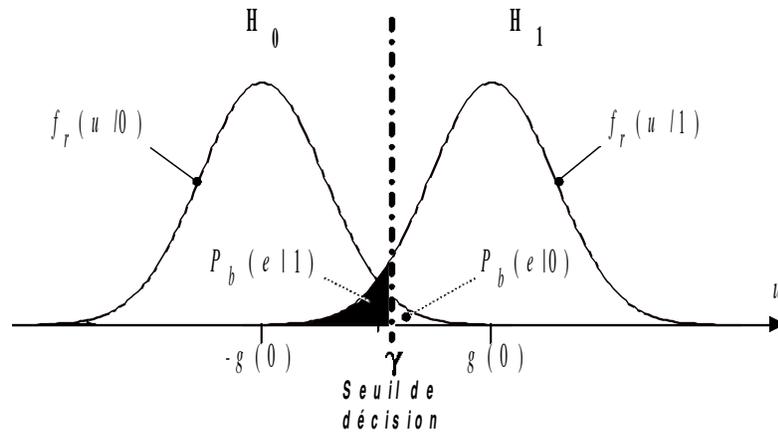


Figure 3.2: Densités de probabilités conditionnelles pour deux hypothèses.

alors la solution trouvée est bien l'optimum. Remarquez que la seuil de correction dépend des probabilités d'avoir les valeurs de bits 0 et 1.

**Exemple** Considérons le cas du bruit additif gaussien. Nous avons alors les densités de probabilité conditionnelles de type loi normale:

$$f_r(x|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(x+g(0))^2}{2\sigma_b^2}}; \quad f_r(x|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(x-g(0))^2}{2\sigma_b^2}}.$$

Alors, le seuil optimal de décision est

$$\gamma = \frac{\sigma_b^2}{2g(0)} \ln \frac{p_0}{p_1}.$$

Conclusion: le seuil de décision a tendance de s'éloigner du symbole le plus probable, ce qui augmente sa région de décision.

Dans les systèmes des communications, nous avons (presque) toujours le probabilités  $p_0 = p_1 = 1/2$ . En tenant compte pour le cas du bruit gaussien, nous obtenons que le seuil optimal est

$$\gamma = 0.$$

Nous avons donc

$$P_b(\text{erreur} | 0) = P_b(\text{erreur} | 1) = P_b = \int_0^\infty f_r(x|0) dx.$$

En substituant  $z = (x + g(0))/\sigma_b$ , nous avons que

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{g(0)/\sigma_b}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

**Définition:** La fonction d'erreur  $Q(x)$  ou "la queue de gaussienne" est la fonction suivante:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

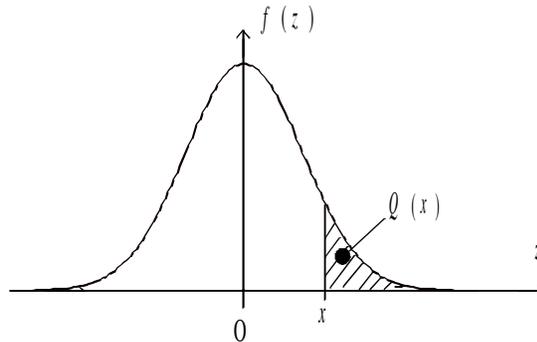


Figure 3.3: Fonction d'erreur  $Q$ .

C'est une fonction monotone et décroissante. Nous avons

$$Q(-\infty) = 1, \quad Q(0) = 1/2, \quad Q(\infty) = 0, \quad Q(-x) = 1 - Q(x).$$

$Q(x)$  peut être approximée de manière suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2},$$

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}.$$

Pour la programmation,  $Q(x)$  peut être exprimée en termes de la fonction d'erreur complémentaire *erfc*:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 2Q(x\sqrt{2}).$$

En revenant à  $P_b$ , nous avons

$$P_b = Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right); \left(= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{g(0)}{\sigma_b\sqrt{2}}\right)\right)$$

Un exemple de la courbe de  $P_b$  est donné dans Fig.3.4. Ici les valeurs  $\frac{g(0)}{\sigma_b}$  sont exprimés en décibels (dB), c'est-à-dire en  $20 \log \frac{g(0)}{\sigma_b}$ .

**Définition** Le rapport  $g(0)/\sigma_b$  est appelé le *rapport signal-à-bruit* et est une mesure importante des performances des systèmes des communications. Habituellement il se mesure en dB. L'abréviation en anglais est SNR (signal-to-noise ratio).

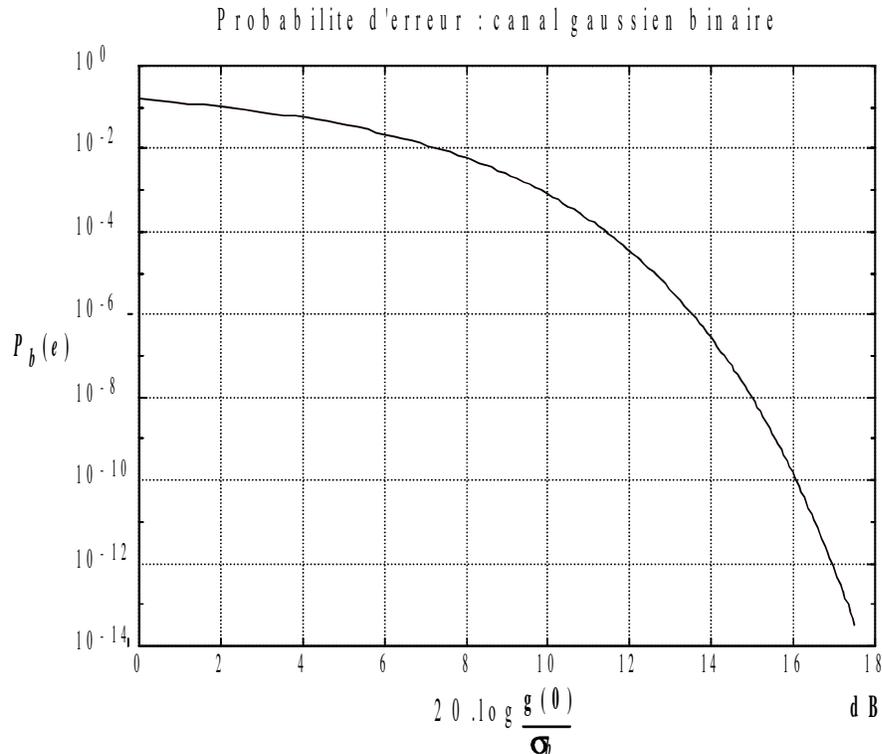


Figure 3.4: Probabilité d'erreur binaire pour le canal gaussien.

**Exemple:** Quelques valeurs de  $P_b$  sont données dans le tableau de Fig.3.5. Pour "sentir" les ordres des grandeurs, voici un petit calcul: au débit de 100 Mbit/s,  $P_b = 10^{-8}$  correspond à une erreur par seconde,  $P_b = 10^{-12}$  - à une erreur par 2h45 min!

### 3.1.3 Cas des symboles $M$ -aires

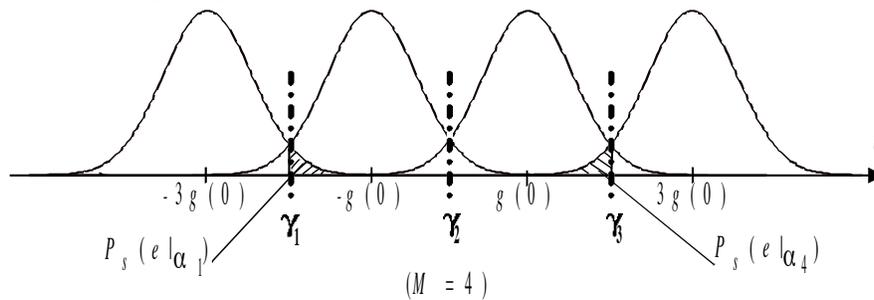
Le symbole  $a_k$  peut prendre  $M$  valeurs différentes:

$$a_k = \{\pm 1, \dots, \pm M/2\}.$$

$P_b(e) = Q\left[\frac{g(0)}{\sigma_b}\right]$	$\frac{g(0)}{\sigma_b}$	$\frac{g(0)}{\sigma_b} \Big _{(dB)}$
$10^{-2}$	2.33	7.35
$10^{-3}$	3.09	9.80
$10^{-4}$	3.71	11.4
$10^{-5}$	4.26	12.6
$10^{-6}$	4.75	13.5
$10^{-7}$	5.19	14.3
$10^{-8}$	5.61	15.0
$10^{-9}$	5.99	15.5
$10^{-10}$	6.36	16.1
$10^{-11}$	6.70	16.5
$10^{-12}$	7.03	16.9

Figure 3.5: Probabilité d'erreur binaire pour le canal gaussien: table.

La probabilité d'erreur par symbole se calcule par:


 Figure 3.6: Exemple pour  $M = 4$ .

$$P_s = \sum_{i=-M/2}^{M/2} P_s(\text{erreur}, i) = \sum_{i=-M/2}^{M/2} \text{Prob}(i) P_s(\text{erreur}|i).$$

Les seuils optimaux de décision dépendent donc de toutes les probabilités des symboles  $i$ . Dans le cas des *symboles équiprobables*, quand  $\text{Prob}(i) = \frac{1}{M}$ , nous avons que

$$P_s = \frac{1}{M} \sum_{i=-M/2}^{M/2} P_s(\text{erreur}|i),$$

et il est possible de démontrer (le calcul similaire au cas binaire) que les seuils optimaux de décision se trouvent au milieu de chaque intervalle. Nous avons aussi que

$$P_s(\text{erreur} \mid -M/2) = P_s(\text{erreur} \mid M/2) = Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right),$$

$$P_s(\text{erreur} \mid i) = 2Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \text{ pour } -M/2 + 1 < i < M/2 - 1.$$

On en déduit l'expression de la probabilité d'erreur par symbole:

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right).$$

Sachant que  $2 \leq M < \infty$ , on constate que la probabilité d'erreur par symbole varie du simple au double, la valeur minimale étant obtenu dans le cas binaire:

$$Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \leq P_s < 2Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right).$$

La probabilité d'erreur par bit devient donc:

$$P_b = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right).$$

A probabilité  $P_b$  fixe, la puissance du signal augmente rapidement avec  $M$ , donc  $M$  ne doit pas être pris trop grand:

$$v(kT_s) = a_k g(0) \rightarrow \sigma_v^2 = \sigma_a^2 g(0)^2 = \frac{M^2 - 1}{3} g(0)^2.$$

## 3.2 Récepteur optimal

### 3.2.1 Filtre adapté

*Remarque importante :* Nous avons pu voir dans la partie précédente que la probabilité d'erreur est une fonction décroissante du rapport signal-à-bruit  $g(0)/\sigma_b$ . Pour un émetteur et un canal donnés, ce rapport devient donc la caractéristique du filtre de réception, qu'on cherche à optimiser.

**Définition:** *Le filtre adapté est un filtre linéaire qui rend maximal le rapport  $g(0)/\sigma_b$  à l'instant de décision.*

La valeur de l'impulsion de base (réponse impulsionnelle globale) échantillonné à l'instant de décision s'écrit :

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(f) \dot{h}_r^*(f) df.$$

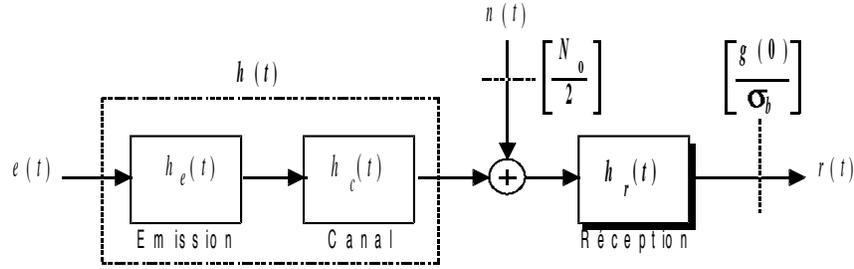


Figure 3.7: Chaîne de transmission.

La densité spectrale de puissance bilatérale du bruit  $n(t)$  ramenée en entrée du récepteur valant  $N_0/2$ , la variance du bruit  $b(t)$  en sortie du filtre de réception est donnée par :

$$\sigma_b^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{h}_r(f)|^2 df.$$

Alors, nous en déduisons

$$\frac{g(0)^2}{\sigma_b^2} = \frac{2}{N_0} \frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(f) \dot{h}_r(f) df \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{h}_r(f)|^2 df}.$$

Nous allons utiliser l'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v^*(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx$$

pour obtenir le maximum du SNR. Notons que l'inégalité devient l'égalité quand  $u(x) = \lambda v(x)$ .

Alors nous avons

$$\frac{g(0)^2}{\sigma_b^2} \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{h}(f)|^2 df,$$

le maximum du SNR étant atteint quand

$$\dot{h}_r(f) = \lambda \dot{h}^*(f).$$

On en déduit la réponse impulsionnelle optimale du filtre de réception :

$$h_r(t) = \lambda h^*(-t).$$

Pour les signaux réels la conjugaison est omise.

**Définition:** Le rapport  $g(0)/\sigma_b$  en sortie du filtre de réception est maximal lorsque celui-ci possède une réponse impulsionnelle proportionnelle à l'impulsion de base reçue retournée : un tel filtre est dit adapté à la forme  $h(t)$ .

La constante  $\lambda$  constitue un terme de gain sans effet sur la valeur du SNR : on prendra donc dans la suite  $\lambda = 1$  pour simplifier. Maintenant, soit  $E_h$  l'énergie de l'impulsion de base reçue à l'entrée du filtre de réception :

$$E_h = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{h}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2 dt,$$

alors la valeur du SNR maximale est

$$\frac{g(0)}{\sigma_b} \leq \sqrt{\frac{2E_h}{N_0}}.$$

*Conclusion:* la valeur maximale du SNR ne dépend pas de la forme de l'impulsion de base reçue mais seulement de son énergie.

### 3.2.2 Réponse du filtre adapté

La réponse à l'impulsion  $h(t)$  du filtre adapté est donnée la convolution :

$$g(t) = (h * h_r)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\tau - t)d\tau = \gamma_h(t),$$

c'est-à-dire, la réponse du filtre adapté à l'impulsion  $h(t)$  est égale à la fonction d'autocorrélation de l'impulsion  $h(t)$ .

*Remarques :*

- La réponse  $h(t)$  étant normalement causale, la réponse impulsionnelle  $h_r(t)$  du filtre adapté est alors non causale à cause du retournement. En pratique, on rend cette réponse causale en ajoutant un retard  $T$  suffisant :

$$h_r(t) = h(T - t) \quad g(t) = \gamma_h(t - T).$$

La fonction d'autocorrélation  $\gamma_h(\tau)$  de l'impulsion  $h(t)$  étant maximum pour  $\tau = 0$ , on en déduit que l'instant de décision optimal est  $t = T$ .

- Notons que la réponse en fréquence du canal global est purement réelle :

$$\dot{g}(f) = |\dot{h}(f)|^2;$$

la présence du retard  $T$  conduit à un facteur supplémentaire  $e^{-2j\pi fT}$ .

**Exemple:** impulsion  $h(t)$  triangulaire, avec retard  $T = T_s$  (période de symbole).

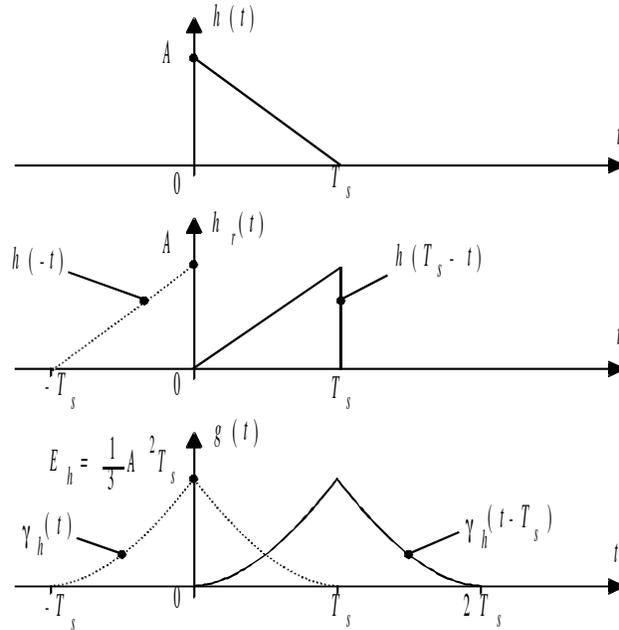


Figure 3.8: Exemple de l'impulsion triangulaire.

En présence de bruit, pour un symbole isolé et affecté d'un retard  $t_0$ , le signal d'entrée du filtre adapté vaut

$$y(t) = h(t - t_0) + n(t).$$

Le signal de sortie du filtre adapté se met alors sous la forme

$$r(t) = (h(t - t_0) * h_r(t) + (n * h_r)(t) = \gamma_h(t - t_0 - T) + b(t).$$

La valeur échantillonnée à l'instant de décision optimal est donnée par :

$$r(t_0 + T) = \gamma_h(0) + b(t_0 + T) = E_h + b(t_0 + T).$$

C'est le SNR de cette variable que l'on a rendu maximum.

**Exemple:** signal NRZ avec  $T = T_s$ .

### 3.2.3 Partage optimal du canal de Nyquist

Un optimum est atteint si l'on peut obtenir simultanément un SNR maximum à l'instant de décision (filtre adapté) et une IES nulle (canal de Nyquist) : on a alors un *récepteur optimal*. On fait abstraction pour la suite des divers retards purs qui interviennent dans la chaîne de transmission.

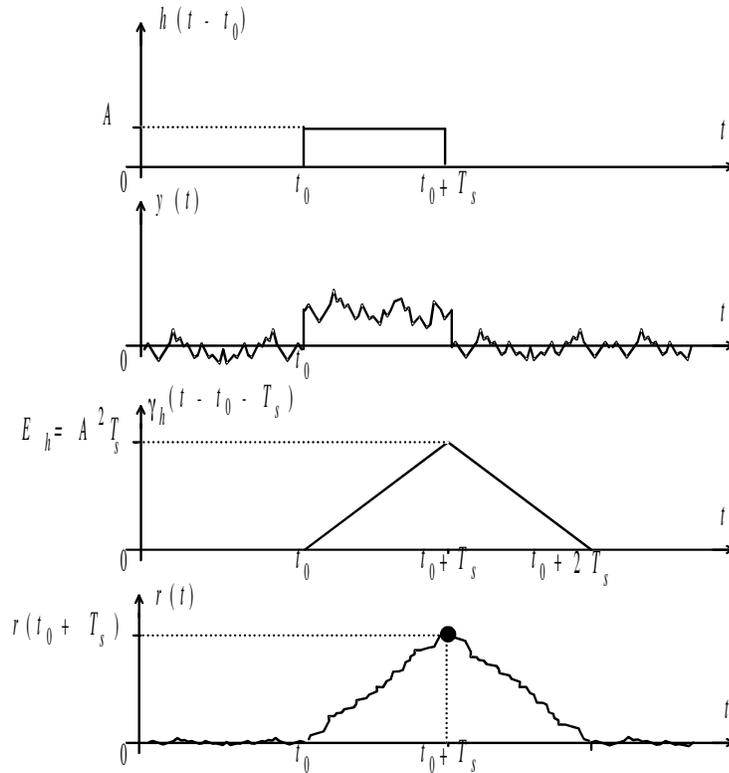


Figure 3.9: Exemple du signal NRZ.

Dans le cas où la réponse en fréquence  $\hat{h}_c(f)$  du canal peut être considérée comme "plate" dans la bande utile, c'est-à-dire, indépendant de la fréquence (ce qui est notre cas pour le moment) et qui peut être exprimée simplement comme  $h_c(t) = G_c$ , la réponse en fréquence du filtre global devient alors :

$$\hat{g}(f) = G_c \hat{h}_e(f) \hat{h}_r^*(f).$$

Il existe une solution simple avec une réponse en fréquence purement réelle (réalisable avec un retard supplémentaire). Elle consiste à prendre le **même** filtre pour l'émission et la réception, soit

$$\hat{h}_e(f) = \hat{h}_r(f) = \sqrt{\hat{N}(f)},$$

où  $\hat{N}(f)$  est une fonction réelle positive vérifiant le critère spectral de Nyquist (réponse en fréquence d'un filtre de Nyquist) :

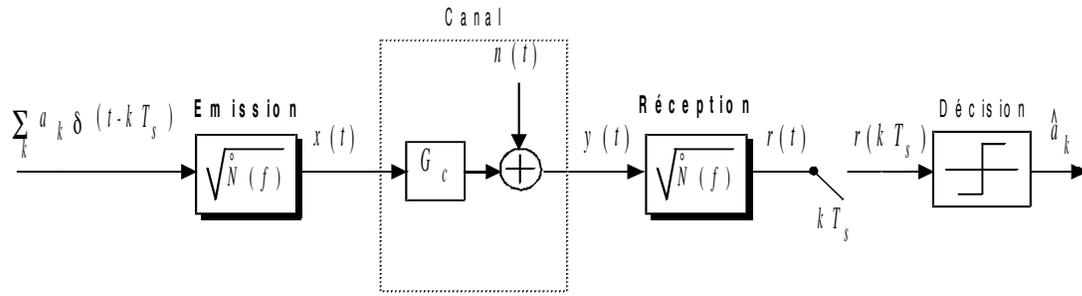


Figure 3.10: Partage optimal.

Nous obtenons ainsi

$$\hat{g}(f) = G_c \hat{N}(f).$$

Le partage présenté est un partage optimal du canal de Nyquist. Les filtres d'émission et de réception sont des "filtres demi-Nyquist". En pratique, on utilise couramment un filtrage global en "cosinus surélevé": les filtres d'émission et de réception sont alors en "racine de cosinus surélevé" (root raised cosine filters).

**Remarque:** si le canal ne peut pas être assimilé à une simple atténuation (avec un retard de propagation) mais possède véritablement un caractère sélectif en fréquence, une égalisation devient alors nécessaire pour réduire le plus possible l'IES résultante.

### 3.3 Performances du schéma de transmission

#### 3.3.1 Probabilité d'erreur minimal, rapport signal-à-bruit

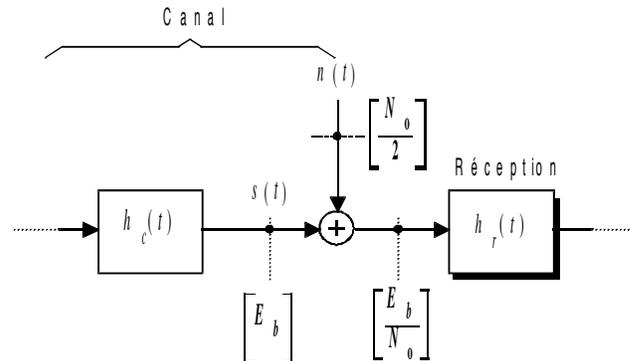
Dans le cas *optimal*, la probabilité d'erreur binaire est *minimale*,

$$P_b = P_{b(\min)} = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right).$$

Il s'avère plus intéressant d'exprimer cette probabilité d'erreur en fonction de l'énergie moyenne par bit  $E_b$  définie par :

$$E_b = P_s T_b = \frac{P_s}{D_b},$$

où  $P_s$  est la puissance moyenne de signal utile,  $T_b$  est la période bit et  $D_b$  et le débit binaire. Les grandeurs qui interviennent ici sont définies à l'entrée du récepteur :


 Figure 3.11: Illustration pour  $E_b$ .

Dans le cas de symboles non corrélés équiprobables, on peut déduire la puissance moyenne de signal reçu :

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_s(f) df = \frac{M^2 - 1}{T_s} E_h,$$

d'où

$$E_b = \frac{M^2 - 1}{\log_s M} E_h.$$

On en déduit la probabilité d'erreur binaire minimale en fonction du rapport signal-à-bruit  $E_b/N_0$  et du paramètre  $M$  :

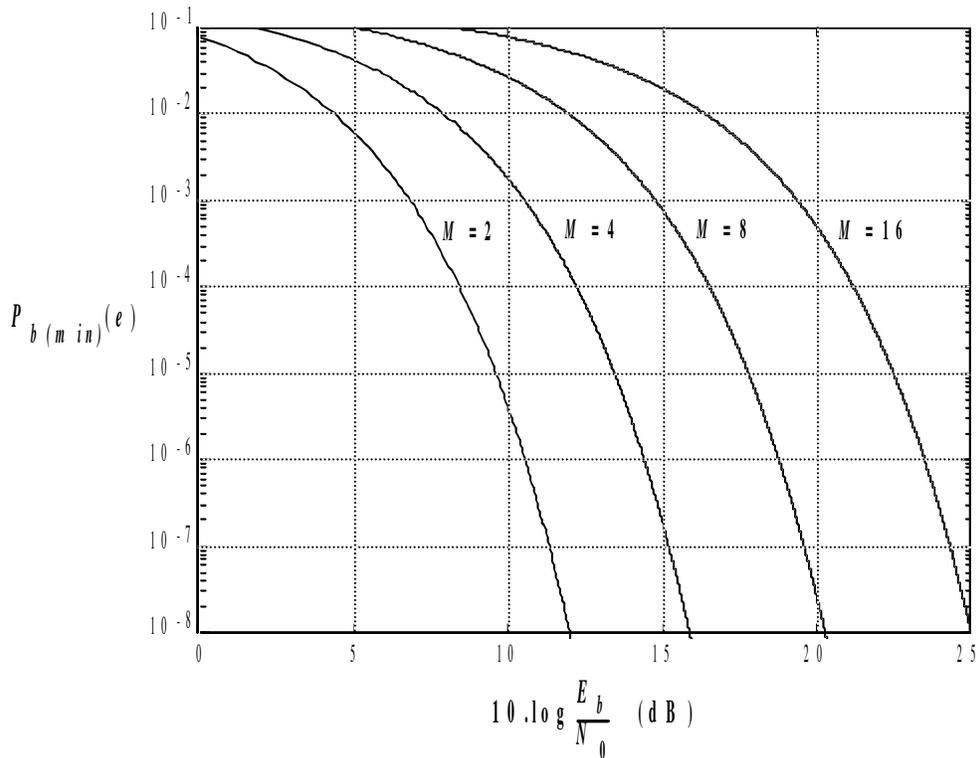
$$P_{b(\min)} = 2 \frac{M - 1}{M \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{2E_b}{N_0}} \right).$$

*Remarques*

- Dans le cas de symboles binaires ( $M = 2$ ), l'expression devient :

$$P_{b(\min)} = Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right).$$

- La probabilité d'erreur binaire minimale est d'autant plus faible que l'on consacre une énergie moyenne par bit  $E_b$  élevée : il faut pour cela augmenter la puissance moyenne  $P_s$  du signal ou/et diminuer le débit binaire  $D_b$ .
- L'augmentation du nombre de bits par symbole permet une réduction de la bande passante et donc du bruit. Néanmoins, pour un  $E_b/N_0$  fixé, cet effet positif ne suffit pas et l'augmentation de  $M$  conduit globalement à une dégradation des performances en terme de probabilité d'erreur.


 Figure 3.12:  $P_b$  en fonction du SNR pour différents  $M$ .

- Inversement, le maintien d'une probabilité d'erreur constante requiert une augmentation du  $E_b/N_0$  lorsque  $M$  croît : pour un même débit binaire, le passage, par exemple, de  $M = 2$  à  $M = 4$  nécessite une augmentation de la puissance d'environ 4 dB et, asymptotiquement, de 6 dB pour chaque doublement  $M$ .

### 3.3.2 Taux d'erreurs binaires

En pratique, la probabilité d'erreur est estimée par une mesure du Taux d'Erreur Binaire (TEB) (Binary Error Rate, BER), par le comptage du nombre d'erreurs qui se sont produites lors de la transmission d'un nombre donné de bits. Soient  $p$  la probabilité d'erreur binaire (inconnue),  $n$  le nombre total des bits transmis et  $N$  le nombre des erreurs constatés. Le BER est défini par

$$BER = \frac{N}{n}.$$

C'est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ .

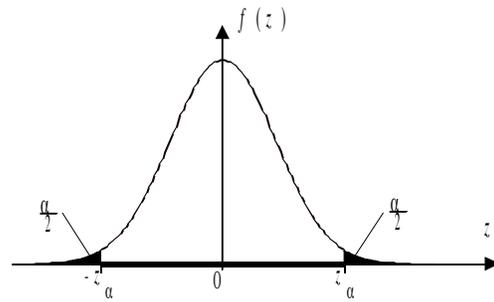
Le BER est donc un estimateur *non-biaisé* dont l'écart-type est d'autant plus faible que le nombre de bits émis  $n$  est élevé. On cherche la valeur de  $n$  correspondant à un certain **intervalle de confiance** pour un risque  $\alpha$  donné.

Pour  $n \geq 30$  et  $np \geq 5$ , on peut utiliser une loi normale réduite centrée en posant

$$z = (BER - p) \left( \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)^{-1} .$$

L'intervalle de confiance du BER est alors  $m_{BER} \pm z\sigma_{BER}$ . Valeurs courantes:

risque $\alpha$	$z_\alpha$
5 %	1,96
1 %	2,58
0.26 %	3



## Section 4

# Transmission en bande transposée

Dans cette partie du cours nous allons considérer la communication par les canaux gaussiens en bande transposée et allons déterminer son modèle équivalent en bande de base. Dans le premier cours nous avons présenté le modèle général du canal de transmission constituant du filtre du canal avec la réponse impulsionnelle  $h_c(t)$  et du module de l'addition du bruit additif. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le cas du canal *en bande de base*, la transmission ayant lieu dans la région des fréquences basses. A partir de ce cours, nous adopterons le cas de la transmission *en bande transposée*. Le modèle du canal en bande transposée contient le filtre du canal avec la caractéristique suivante:

$$\dot{h}_c(f) = \begin{cases} 1, & |f - f_0| \leq \frac{B}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existent plusieurs raisons à s'intéresser à la transmission en bande transposée, venant de la physique ainsi que des choix pratiques. Il est important de mentionner que le canal entre l'antenne à l'émission et l'antenne à la réception pour les communications sans fils est toujours un canal de bande transposée, puisque les composants des fréquences basses ne peuvent pas générer des ondes électromagnétiques, capables de se propager sur de grandes distances avec une petite atténuation. Les bandes passantes de ces canaux sont assez larges, mais elles doivent satisfaire des contraintes dictées pas les agréments internationaux, spécifiant quelle partie du spectre peut être utilisée et avec quel but.

Si  $f_0$  et  $B$  sont tels que  $(h_e * h_c)(t)$  vérifie les conditions de Nyquist, alors les résultats présentés lors des cours précédents restent valables. Donc, si  $h_e(t)$  est le filtre d'émission de la chaîne construite, alors  $h_r(t)$  est le filtre adapté correspondant. Néanmoins, il existe une autre approche, beaucoup

plus utilisé dans la pratique, indépendant de la fréquence porteuse  $f_0$  et de la bande passante  $B$ . Il consiste dans le suivant: on génère un symbole en bande de base et ensuite on décale le spectre du signal vers les fréquences plus hautes pour ensuite l'envoyer par le canal en bande transposée. Le récepteur procède de la manière inverse.

## 4.1 Quelques notions utiles sur la transformée de Fourier

Dans cette partie introductive nous rappelons quelques notions utiles sur la transformée de Fourier.

Si  $s(t)$  est un signal *réel*, alors sa transformée de Fourier  $\hat{s}(f)$  satisfait la condition de symétrie:

$$\hat{s}(f) = \hat{s}^*(-f),$$

où  $\hat{s}^*$  est la conjuguée complexe de  $\hat{s}$ . Si  $s(t)$  est un signal *purement imaginaire*, alors sa transformée de Fourier satisfait la condition d'antisymétrie:

$$\hat{s}(f) = -\hat{s}^*(-f).$$

Nous allons également utiliser la propriété de décalage fréquentiel de la transformée de Fourier:

$$s(t)e^{j2\pi f_0 t} \mapsto \hat{s}(f - f_0).$$

On déduit de la propriété de symétrie que le spectre d'un signal réel a une information redondante. Si nous connaissons  $\hat{s}(f)$  pour  $f \geq 0$ , nous pouvons reconstruire la densité spectrale pour tout  $f$  et, donc, retrouver  $s(t)$ . On en déduit également qu'un signal réel  $s(t)$  est lié directement avec un signal complexe  $s_C(t)$  occupant la moitié de la bande passante de  $s(t)$ , notamment le signal obtenu par suppression des composants de  $s(t)$  avec les fréquences négatives.

Si nous décalons  $\hat{s}_C(f)$  par  $f_0$ , nous obtenons un signal  $\hat{s}_0(f)$  avec le support centré aux alentours de  $f = 0$ . Sa représentation temporelle  $s_0(t)$  est un signal complexe en bande de base (puisque'il n'est pas nécessairement symétrique). Donc, il y a une correspondance entre l'ensemble des signaux complexes en bande de base ayant le support  $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$  dans le domaine fréquentiel et l'ensemble des signaux réels en bande transposée avec le support  $[-\frac{B}{2} - f_0, \frac{B}{2} - f_0] \cup [-\frac{B}{2} + f_0, \frac{B}{2} + f_0]$ . Maintenant nous développons cette relation.

Définissons le filtre avec la réponse impulsionnelle  $h_{>}(t)$  par sa transformée de Fourier  $\mathring{h}_{>}(f)$ :

$$\mathring{h}_{>}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0; \\ 1/2, & f = 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Ceci est un filtre qui supprime la partie négative du spectre. Si  $s(t)$  est un signal réel, on définit  $s_0(t)$  comme signal ayant la transformée de Fourier suivante:

$$\mathring{s}_0(f) = \sqrt{2}\mathring{s}(f)h_{>}(f).$$

En passant de  $s(t)$  à  $s_0(t)$ , nous avons supprimé la partie négative du spectre. Le facteur  $\sqrt{2}$  a été introduit pour que les deux signaux aient la même  $L_2$  norme (et donc la même puissance).

**Definition** *Le signal  $s_0(t)$ , ne contenant pas des fréquences négatives dans son spectre, s'appelle le signal analytique. Il est appelé aussi l'équivalent analytique de  $s(t)$ .*

Comme  $s(t)$  est réel, la partie positive de son spectre contient toute l'information nécessaire. Nous pouvons donc faire l'opération inverse et reconstruire  $s(t)$  de  $s_0(t)$ . Nous avons

$$s(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{s_0(t)\},$$

puisque

$$\sqrt{2}\text{Re}\{s_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_0(t) + s_0^*(t)),$$

dont la transformée de Fourier est

$$\mathring{s}(f)\mathring{h}_{>}(f) + \mathring{s}^*(-f)\mathring{h}_{>}^*(-f).$$

Pour les fréquences positives, le premier terme est égal à  $\mathring{s}(f)$  et le deuxième disparaît. Alors,  $\sqrt{2}\text{Re}\{s_0(t)\}$  et  $s(t)$  coïncident pour les fréquences positives. On prend aussi en compte que deux signaux réels avec les spectres égaux pour les fréquences positives, ont les spectres égaux pour tous  $f$ .

Pour conclure: soit  $s(t)$  un signal réel. En supprimant les fréquences négatives dans son spectre et en multipliant le spectre par  $\sqrt{2}$  pour compenser la perte d'énergie, on obtient son signal analytique  $s_0(t)$ . La partie réelle du signal est  $\frac{s(t)}{\sqrt{2}}$ . Passer de  $s_0(t)$  à  $s(t)$  est juste la question de décalage de fréquence.

## 4.2 Détection en absence du bruit: équivalent du signal en bande transposée dans la bande de base

Dans cette section nous allons voir que, pour chaque signal  $s(t)$  en bande transposée et pour chaque fréquence porteuse  $f_0$ , il existe un signal en bande de base  $x(t)$ , étant l'équivalent de  $s(t)$  en bande de base. L'importance de cette relation est dans le fait que, en pratique, il est beaucoup plus facile de former le signal  $x(t)$  et de le convertir à  $s(t)$ , plutôt que travailler avec  $s(t)$  directement. De coté réception, il est également plus facile de travailler avec l'équivalent en bande de base plutôt qu'avec le signal en bande transposée reçu.

Deux raisons principales pourquoi il est plus facile de travailler avec  $x(t)$ :

1.  $x(t)$  contient des fréquences basses. Pour les signaux des fréquences basses les fils sont comme les passes-partout, tandis que pour les signaux des hautes fréquences ils agissent comme des antennes, alors l'interférence entre symboles n'est plus nulle.
2. On peut construire les meilleurs circuits pour une bande passante fixe, et ceci est le cas de la bande passante de  $x(t)$ . La bande passante de  $s(t)$  change si on choisit de faire la transmission sur une autre fréquence porteuse.

Pour passer aux fréquences plus basses, nous décalons la fréquence centrale du signal analytique  $s_0(t)$  (regardez la section précédente) en utilisant la propriété de décalage de la TF: on le multiplie par  $e^{j2\pi f_\Delta t}$ , où  $f_\Delta$  est le décalage fréquentiel désiré (regardez Fig.4.1).

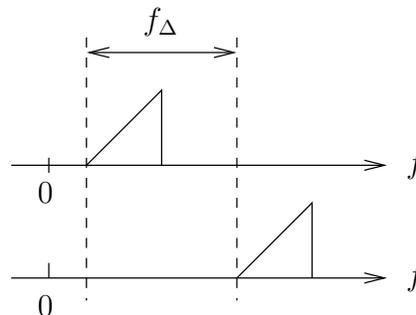


Figure 4.1: Décalage fréquentiel.

Soit  $s(t)$  un signal réel en bande transposée. Alors nous avons que  $\hat{s}(|f| - f_0) = 0$  pour  $|f| - f_0 \geq B$ , en supposant que  $B$  est fixe. La TF (l'amplitude seulement) est présentée sur Fig.4.2 (figure du haut). Le signal analytique équivalent  $s_0(t)$  est présenté par la figure au milieu (le changement d'échelle par  $\sqrt{2}$  n'est pas montrée), et le signal en bande de base  $x(t)$  équivalent est donné par la

figure en bas. Notons que le signal équivalent est égal

$$x(t) = s_0(t)e^{-j2\pi f_0 t} \quad (\text{Equivalent complexe de } s(t) \text{ en bande de base})$$

avec la TF

$$\hat{x}(f) = s_0(f + f_0).$$

Le passage inverse est évident: à partir de  $x(t)$ , on obtient directement  $s(t)$  comme suit:

$$s(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{s_0(t)e^{j2\pi f_0 t}\}.$$

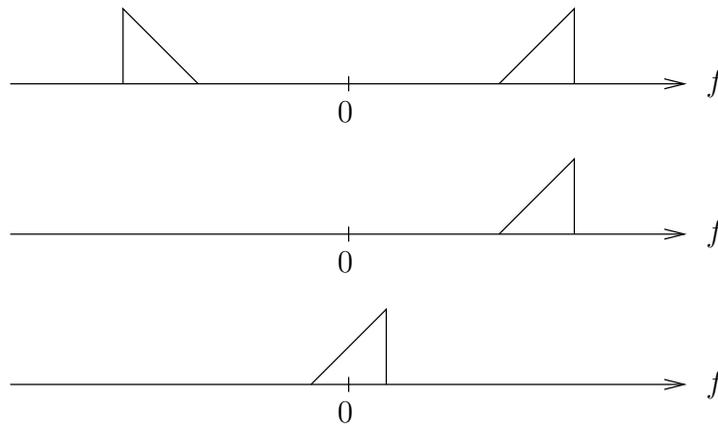


Figure 4.2: Transposition du signal.

### 4.3 Conversion bande de base/bande transposée

Introduisons la conversion du signal en bande de base au signal en bande transposée et inversement. Ses conversions sont effectués à l'émetteur et au recepateur comment c'est démontré sur Fig.4.3. Le signal en sortie du canal est  $w(t) = s(t)+n(t)$ . Son équivalent en bande de base est  $y(t) = x(t)+v(t)$  ( Nous allons voir dans la section suivante comment se caractérise  $v(t)$ ).  $y(t)$  est la sortie d'un canal équivalent en bande de base.

Le traitement du signal présenté sur Fig.4.3 est très répandu dans les systèmes pratiques. Il permet d'effectuer le plupart du traitement aux fréquences plus basses, avant de passer aux fréquences plus hautes, et il crée donc le minimum d'interférence entre symboles.

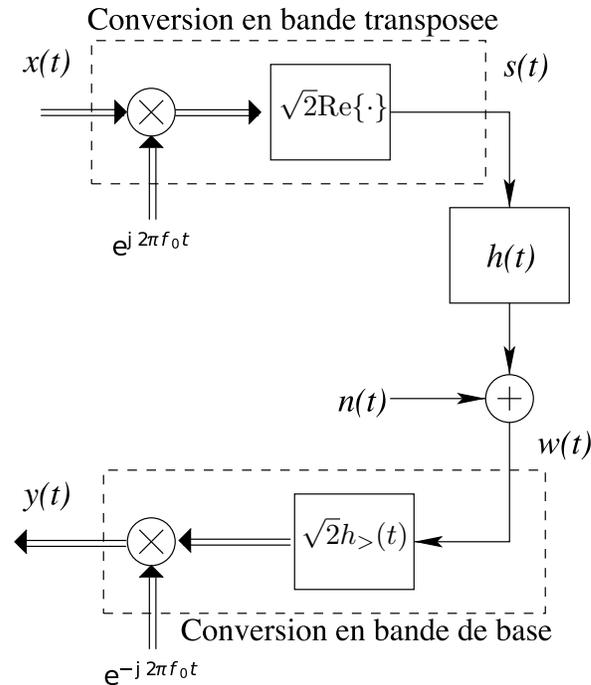


Figure 4.3: Conversion du signal.

Dans la partie des exercices nous verrons comment le signal  $s(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$  peut être représenté avec l'aide des sinus et cosinus. Ceci nous donne un autre schéma de passage vers la bande transposée, qui est équivalent.

#### 4.4 Bruit du canal équivalent en bande de base

Pour confirmer le modèle équivalent en bande de base, il nous faut encore trouver l'équivalent du bruit du canal, présent en bande transposée.

##### Réponse impulsionnelle équivalente en bande de base

Supposons qu'un canal en bande transposée a une réponse impulsionnelle réelle  $h_{c,bt}(t)$ , c'est-à-dire il possède la densité spectrale  $\hat{h}_{c,bt}(f)$  dans la bande  $||f| - f_0| \leq B$  et est zéro ailleurs.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la réponse impulsionnelle  $h_{c,bt}(t)$ . Nous voulons

retrouver un modèle en bande de base pour  $h_{c,bt}(t)$ , ne prenant pas en compte le bruit additif du canal. Notons que nous pouvons traiter le filtre de canal et le bruit additif séparément grâce à linéarité du modèle de canal. Donc, nous avons la sortie du canal

$$w(t) = (s * h_{c,bt})(t).$$

Prenons la TF de cette expressions. Nous obtenons que

$$\begin{aligned} \hat{w}(f) &= \hat{s}(f)\hat{h}_{c,bt}(f); \\ \hat{w}(f)h_{>}(f)\sqrt{2} &= \sqrt{2}\hat{s}(f)h_{>}(f)\hat{h}_{c,bt}(f)h_{>}(f); \\ \hat{w}_0(f) &= \hat{s}_0(f)\frac{\hat{h}_{c0}(f)}{\sqrt{2}}; \\ \hat{y}(f) &= \hat{x}(f)\frac{\hat{h}_c(f)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La dernière expression obtenu fait le lien entre les signaux  $x$  et  $y$ , définis en bande de base. Alors, quand on envoie le signal  $s(t)$  par un canal avec la réponse impulsionnelle  $h_{c,bt}(t)$ , c'est équivalent à transmettre le signal équivalent  $x(t)$  par le canal de réponse impulsionnelle  $\frac{h_c(t)}{\sqrt{2}}$ .

Le canal équivalent en bande de base est présenté sur Fig.4.4.

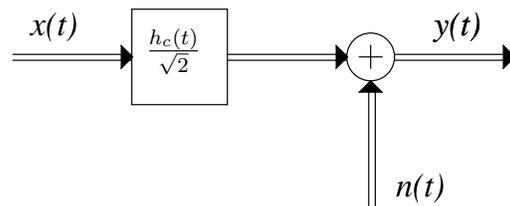


Figure 4.4: Canal équivalent en bande de base.

#### 4.4.1 Bruit additif équivalent en bande de base

Sur Fig.4.4, le bruit additif  $n(t)$  est le bruit équivalent en bande de base au bruit additif gaussien en bande transposée  $n_{bt}(t)$ . Pour la description complète du canal, il nous reste à déterminer  $n(t)$ . Tout d'abord,  $n(t)$  est clairement gaussien (en général complexe), avec la moyenne nulle (comme il a été obtenu par des opérations linéaires sur le bruit gaussien). On peut aussi démontrer que  $n(t)$  est *décorrélé* et que sa densité spectrale de puissance est égale à celle de  $n_{bt}(t)$ , transposée vers la bande de base par  $f_0$  et multipliée par 2. Le facteur 2 est dû au fait que la variance du bruit en

bande de base et en bande transposée est la même. Alors, pour trouver la variance de  $n_{bt}(t)$ , on l'intègre sur la bande de  $2B$  Hz, tandis que, en bande de base, nous avons la bande passante  $B$  Hz. Alors, la densité spectrale de puissance de  $n(t)$  doit être le double de  $n_{bt}(t)$ . Ensuite, il est possible à démontrer que les parties réelle et imaginaire de  $n(t)$  ont les mêmes fonctions d'autocorrélation et, donc, les mêmes densités spectrales de puissance. Si  $\hat{n}_{bt}(f)$  est symétrique aux alentours de  $f_0$ , alors les parties réelle et imaginaire de  $n(t)$  sont décorrélatées, et, comme elles sont gaussiennes, elles sont indépendentes. Donc, leur densités spectrales de puissance sont les moitiés de  $n(t)$ .

## 4.5 Exemple important

Considérons un canal gaussien en bande transposée avec la bande passante  $B$ . Son canal équivalent en bande de base est un canal gaussien complexe avec la bande passante  $B/2$ . Nous avons que

$$x(t) = \sum_{k \in Z} a_k h_e(t - kT_s),$$

où  $h_e(t)$  est *sinc* (où, plus généralement, un filtre répondant aux conditions de Nyquiste). Notons que  $a_k$  sont les symboles *complexes*.

Le signal  $s(t)$  s'écrit comme

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &= \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) \operatorname{Re}\{x(t)\} - \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t) \operatorname{Im}\{x(t)\} \\ &= \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) \sum_{k \in Z} \operatorname{Re}\{a_k\} h_e(t - kT_s) \\ &\quad - \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t) \sum_{k \in Z} \operatorname{Im}\{a_k\} h_e(t - kT_s). \end{aligned}$$

Ceci est une modulation *QAM* (quadrature amplitude modulation).

Fig.4.5 montre une partie de la chaîne de communication pour l'exemple donné. L'émetteur est présenté dans la forme utilisant les opérations en domaine réel tandis que la récepteur utilise la notation complexe.

**Remarque:** Sur Fig.4.5, le filtre  $h_{>}(t)$  n'est plus présent. Il est utile pour le calcul mais, en réalité, si le filtre de réception est un filtre adapté (toujours le cas), alors il mettra lui-même à zéro toutes les fréquences en dehors de la bande passante  $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$ .

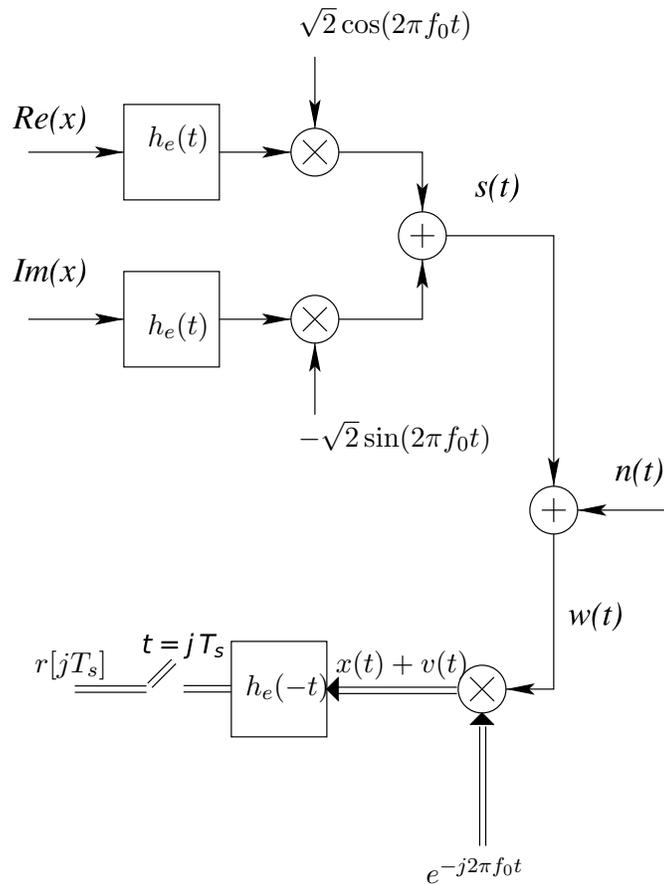


Figure 4.5: Exemple important: constellation du signal ou  $a_k$  peut prendre  $M$  valeurs. Ceci est  $M - QAM$ .

Soit les symboles  $a_k$  prennent 4 valeurs possibles:  $1 + j$ ,  $-1 + j$ ,  $-1 - j$  et  $1 - j$ . Autrement dit,  $a_k$  est formé à partir des vecteur de 2 bits, l'un desquels agit sur la partie réelle du symbole, et l'autre - sur la partie imaginaire. La bande passante nécessaire pour la transmission est égale à la bande passante quand  $a_k$  sont les symboles réels et prennent seulement deux valeurs,  $a_k = \{\pm 1\}$ . Ceci est le cas quand  $a_k$  sont formés à partir d'un seul bit. En plus, il est possible à montrer que la probabilité d'erreur par bit dans ces deux cas est la même, même si nous avons deux bits par symboles au lieu d'un. Donc, en utilisant cette modulation avec 4 points dans la constellation, nous pouvons augmenter l'efficacité spectrale.

**Definition** L'efficacité spectrale  $D_b/B$  est la quantité de l'information utile transmise dans le système de communication ayant la bande passante fixé  $B$ . Le plus souvent,  $D_b/B$  se mesure en

*bits/s/Hz.*

## Section 5

# Modulations numériques

### 5.1 Compromis entre l'efficacité spectrale, la puissance et le taux d'erreurs

Lors de construction d'un système des communications, trouver le meilleur compromis entre les divers paramètres de système est fondamental. Les objectifs du constructeur peuvent être les suivants:

- a) maximiser l'efficacité spectrale;
- b) minimiser le taux d'erreurs par bit;
- c) minimiser la puissance émise;
- d) minimiser la bande passante;
- e) améliorer la qualité de service, c'est-à-dire accepter le maximum utilisateurs avec le minimum d'interférences créées entre eux;
- f) minimiser la complexité du système, etc.

Dans cette partie du cours nous nous concentrons sur le compromis entre l'efficacité spectrale  $D_b/B$ , la probabilité d'erreurs par bit  $P_b$  et la puissance du signal émis. Très souvent,  $P_b$  est remplacé par le BER et la puissance du signal émis par le SNR; c'est équivalent. Le but est de maximiser  $D_b/B$  et de minimiser le BER et le SNR. Comme il est difficile d'optimiser ses trois paramètres au même temps, nous allons les considérer par paires, en fixant le troisième paramètre.

La question est jusqu'où l'optimisation est possible. La théorie de l'information est une matière qui étudie les limites théoriques des systèmes de communication. Voici deux exemples importants. Considérons la paire  $D_b/B$  - SNR, supposant la transmission sur le canal gaussien. La limite théorique dans ce cas est donnée par la théorème de Shannon:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left( 1 + \frac{E_b}{N_0} \left( \frac{C}{B} \right) \right),$$

ou  $\frac{E_b}{N_0}$  est le SNR, et  $C/B$  est l'efficacité spectrale maximale (quand le débit binaire  $D_b$  est égale à la capacité théorique  $C$ , étant la valeur maximale possible). Cette relation est présentée sur Fig.5.1. D'ailleurs, les systèmes des communications existants sont à peu près à 10 dB de cette limite (regardez Fig.5.4).

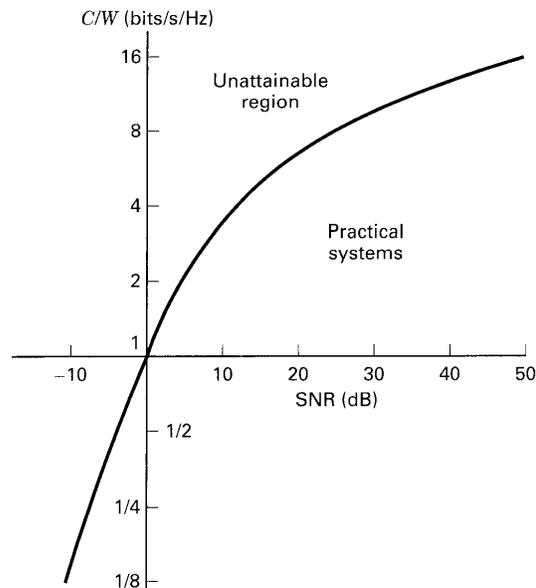


Figure 5.1: Capacité du canal en fonction du SNR. Ici  $W = B$ .

Pour simplifier, supposons dans la suite que la probabilité d'erreurs pas bit  $P_b$  est fixe. Alors, nous avons à trouver le compromis entre l'efficacité spectrale  $D_b/B$  et la puissance du signal émis (SNR pour  $P_b$  donné). Le choix du modulateur/démodulateur est dicté par ce compromis.

## 5.2 Modulation/démodulation dans la chaîne de communication

Les techniques de modulations sont utilisées pour adapter le signal à la bande transposée. Il existe trois méthodes possibles:

- modulation d'amplitude
- modulation de fréquence
- modulation de phase

Dans les communications numériques, on utilise la modulation d'amplitude et la modulation de phase. Ces deux modulations peuvent être utilisées séparément, mais dans ce cas elles sont difficiles à générer à l'émetteur et difficiles à détecter au récepteur. Donc, en pratique, nous utilisons ces deux modulations d'une manière qu'elles dépendent l'une de l'autre: le signal à émettre (qui est complexe) est séparé en deux composants,  $I$  ("In-phase") et  $Q$  ("quadrature"), qui correspondent aux parties réelle et imaginaire du signal.

**Definition:** La modulation s'appelle  $M$ -aire, si chaque symbole émis peut prendre  $M$  valeurs possibles. Dans la plupart des cas, le symbole est formé à partir d'un vecteur de  $k$  bits, ce qui conduit à  $M = 2^k$ .

**Definition:** La modulateur est un module de la chaîne de communication qui forme des symboles  $a_k$  (en général, complexes), en fonction des vecteurs de bits à son entrée. Le démodulateur est un module situé à la réception, qui estime les valeurs des bits correspondant au symboles  $a_k$ , en ayant une estimation des  $a_k$  à son entrée.

Lors du design du modulateur, deux choses principales sont à déterminer:

- type de modulation ou la *constellation* dans le plan complexe,
- étiquettes des points de la constellation (mapping).

Le type de modulation est défini par le fait si le système est plutôt limité en *puissance* ou en *bande passante*.

En ce qui concerne le démodulateur, il est placé derrière le module de prise de décision ou il le remplace. Pour démoduler, on définit les régions de décision sur le plan complexe et on accorde au vecteur des bits estimé la valeur correspondante.

### 5.3 Types des modulations

Nous allons maintenant présenter les types de modulation les plus répandues, en utilisant Fig.5.2 comme illustration.

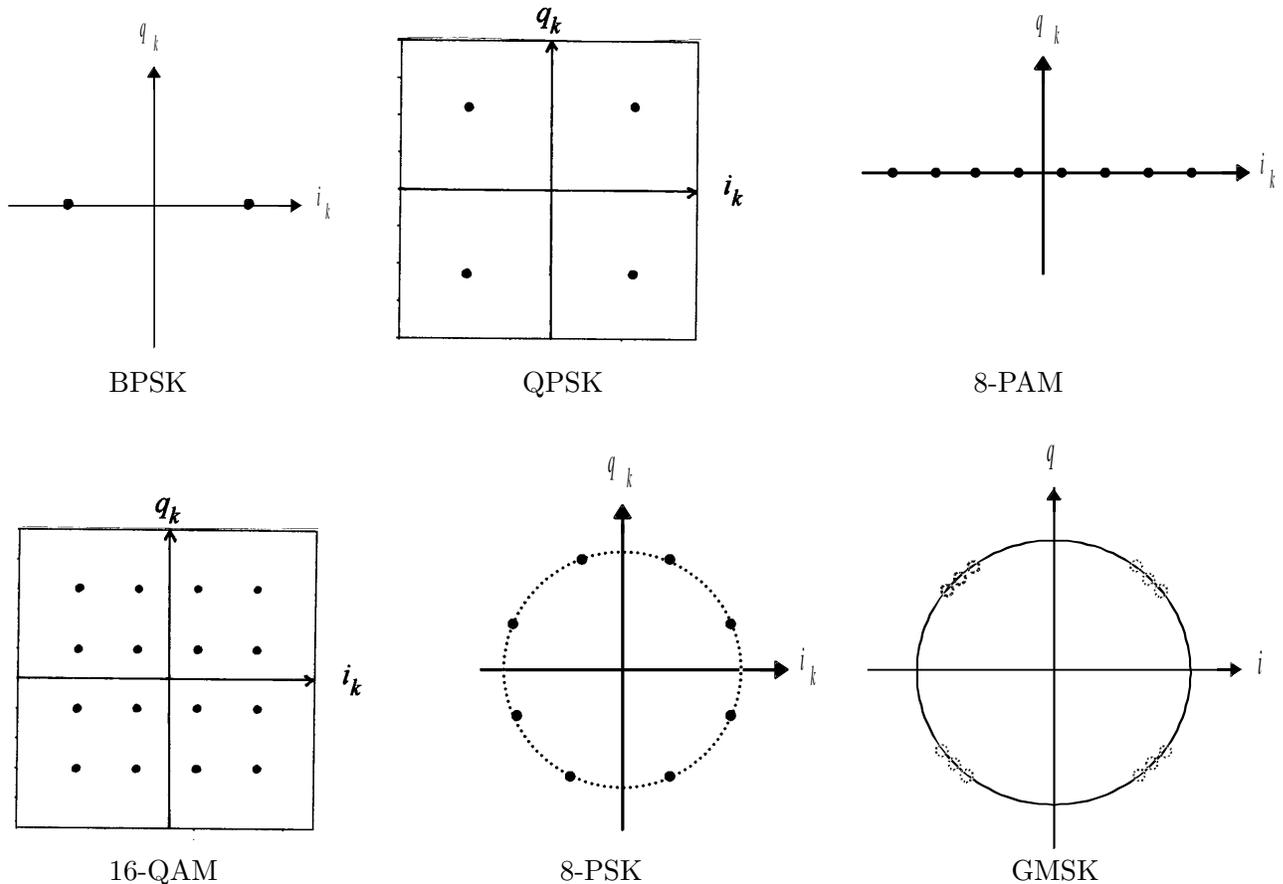


Figure 5.2: Exemples des modulations.

- **BPSK** (Bipolar Phase Shift Keying) - la modulation la plus simple. Nous avons  $a_k = \{\pm 1\}$ . Chaque symbole est réel, et

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t).$$

- **QPSK** ou **4-QAM** (Quadruple Phase Shift Keying ou Quadrature Amplitude Modulation avec  $M = 4$ ). Les symboles  $a_k$  prennent les valeurs  $1 + j$ ,  $1 - j$ ,  $-1 + j$ ,  $-1 - j$ . Chaque

symbole est généré à partir d'un vecteur de 2 bits et

$$s(t) = \sum_{k \in Z} i_k g(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k \in Z} q_k g(t - kT_s) \sin(2\pi f_0 t),$$

avec  $i_k = \text{Re}\{a_k\}$  et  $q_k = \text{Im}\{a_k\}$ .

- **M-PAM** (Pulse Amplitude Modulation avec  $M$  symboles):  $a_k = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm M/2\}$ . Les symboles sont réels. Comme nous avons vu dans les cours précédents, cette modulation n'est pas très efficace quand  $M$  est grand, puisqu'elle prend beaucoup de puissance émise. Notons que *BPSK* est un cas particulier de *M-PAM*.
- **M-QAM** (Quadrature Amplitude Modulation avec  $M$  symboles):  $a_k = n + jm$ , ou  $n, m \in Z$ ,  $n, m \leq \sqrt{M}$ . Ceci est une modulation largement utilisé dans les systèmes avec des limitations en bande passante. Quand la constellation est grande ( $M$  grand), elle peut consommer beaucoup de puissance. QPSK est un cas particulier. D'habitude,  $M = 4, 16, 64, 256$ , parce que, pour les constellations carrées, les voies  $I$  et  $Q$  peuvent être indépendentes.
- **M-PSK** (Pulse Shift Keing modulation avec  $M$  symboles):  $a_k = n + jm$  ou l'amplitude de  $a_k$  est égale à 1,  $\|a_k\| = \sqrt{n^2 + m^2} = 1$ . Autrement dit, les points de la constellation sont situées sur un cercle unitaire autour du zéro. Ceci est une modulation bien adaptée aux systèmes avec des limitations en puissance émise (la puissance émise par symbole est constante et égale à 1). BPSK et QPSK sont des cas particuliers. On rencontre également 8-PSK, mais rarement plus, car avec le nombre des points la probabilité d'erreurs par symbole augmente.
- **GMSK** (Gaussian Message Shift Keying modulation): une modulation à phase continue et amplitude constante. Pour cette modulation,

$$s(t) = \cos\left(s\pi f_0 t + 2\pi \int_{-\infty}^t \Delta f(\theta) d\theta\right)$$

avec

$$\Delta f(t) = \frac{1}{T_s} \sum_k a_k h(t - kT_s),$$

sachant que le filtre  $h(t)$  est le filtre passe-bas gaussien:

$$h(t) = b \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} e^{-\frac{2\pi^2 b^2 t^2}{\ln 2}} \quad \text{ou} \quad \hat{h}(f) = e^{-\frac{f^2}{2b^2} \ln 2}.$$

$b$  est la fréquence de coupure à  $-3\text{dB}$  du filtre. La modulation *GMSK* est utilisée dans le système *GSM*.

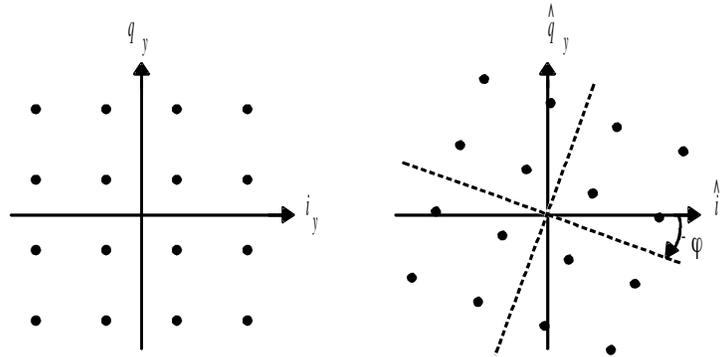


Figure 5.3: Rotation de constellation.

Considérons une rotation  $\phi$  de la constellation (Fig.5.3). Notons que, lors de la détection, une erreur de phase  $\phi$  non-nulle entraîne une rotation de l'angle Ceci conduit au mélange des composants  $I$  et  $Q$ . Idéalement, la reconstitution des symboles doit s'effectuer avec une erreur de phase nulle (*démodulation cohérente*).

Notons aussi que chaque constellation possède une certaine *ambiguïté de phase*, autrement dit, l'angle de rotation pour laquelle on ne peut plus distinguer entre la constellation initiale et la constellation tournée. Por éviter l'erreur d'estimation, on utilise le *codage différentiel*: les symboles  $a_k$  ne correspondent pas aux vecteurs des bits utiles, mais à la différence entre deux vecteurs voisins. Avec le filtre adapté à la réception, cette procedure est optimale vis à vis de la probabilité d'erreur.

## 5.4 Etiquettage des points de constellation

Lors de l'utilisation d'une modulation, la probabilité d'erreur par symbole est différente de la probabilité d'erreur par bit. Le rôle de l'étiquettage est de minimiser  $P_b$  pour  $P_s$  donné en choisissant les étiquettes des points de constellation d'une telle maniere qu'un erreur de démodulation d'un symbole introduit le minimum d'erreurs dans l'estimation des valeurs de bits.

### Exemple important

**Mapping de Grey pour QPSK:** Nous avons 4 points  $1 + j$ ,  $1 - j$ ,  $-1 - j$  et  $-1 + j$  de la constellation, ainsi que 4 vecteurs des étiquettes: 00, 01, 10 et 11. On distribue les étiquettes parmi les points de constellation de manière que chaque deux symboles voisins ont la différence d'un seul

bit dans leurs étiquettes. Comme la plupart d'événements d'erreurs consiste dans la détection des symboles voisins, alors, avec une grande probabilité, on se trompe dans l'estimation d'un seul bit quand un symbole est estimé éronnement. Par exemple, demandons que

$$\begin{aligned} 1 + j & - 00; \\ 1 - j & - 01; \\ -1 - j & - 11; \\ -1 + j & - 10. \end{aligned}$$

## 5.5 Comparaison des modulations diverses

Faisons la comparaison entre les modulations présentées, en comparant leurs probabilités d'erreur par bruit minimales (donc, avec l'étiquettage oprimal) et leurs efficacités spectrales.

Soit  $\alpha$  le coefficient d'arrondi du filtre du cosinus surélévé utilisé. Pour la BPSK nous avons:

$$\frac{D_b}{B} = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Pour la **M-PAM**, la puissance du signal reçu vaut

$$P = \frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{E_h}{T_s} = \frac{(M^2 - 1)E_h}{T_s}.$$

Sachant que  $E_b = PT_b$ , nous obtenons

$$P_{b,min} = 2 \frac{M - 1}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{M^2 - 1 N_0}}\right).$$

Le resultat en bande transposée est le même que celui pour la bande de base. La M-PAM ne rapport aucun gain particulier pour  $P_b$  en bande transposée. L'efficacité spectrale

$$\frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha}$$

est la moitié de celle obtenue en bande de base.

Pour la **M-QAM**, sous condition d'indépendance des voies  $I$  et  $Q$ ,

$$P_b = P_{b,I} = P_{b,Q}.$$

La puissance moyenne par symbole est

$$P = \frac{M - 1}{3} \frac{E_h}{T_s},$$

qui conduit à

$$P_{b,min} = 4 \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M - 1 N_0}} \right).$$

Comme le spectre de l'enveloppe constante occupe la même largeur de bande que les spectre des composants  $I$  et  $Q$ ,

$$\frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha}$$

Pour la  $M$ -**PSK**, nous avons

$$\frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha}$$

et

$$P_{b,min} = \frac{2}{\log_2 M} Q \left( \sqrt{2 \log_2 M \frac{E_b}{N_0} \sin \frac{\pi}{M}} \right)$$

Fig.5.4 demontre les performances des modulations différentes par rapport aux limites théoriques.

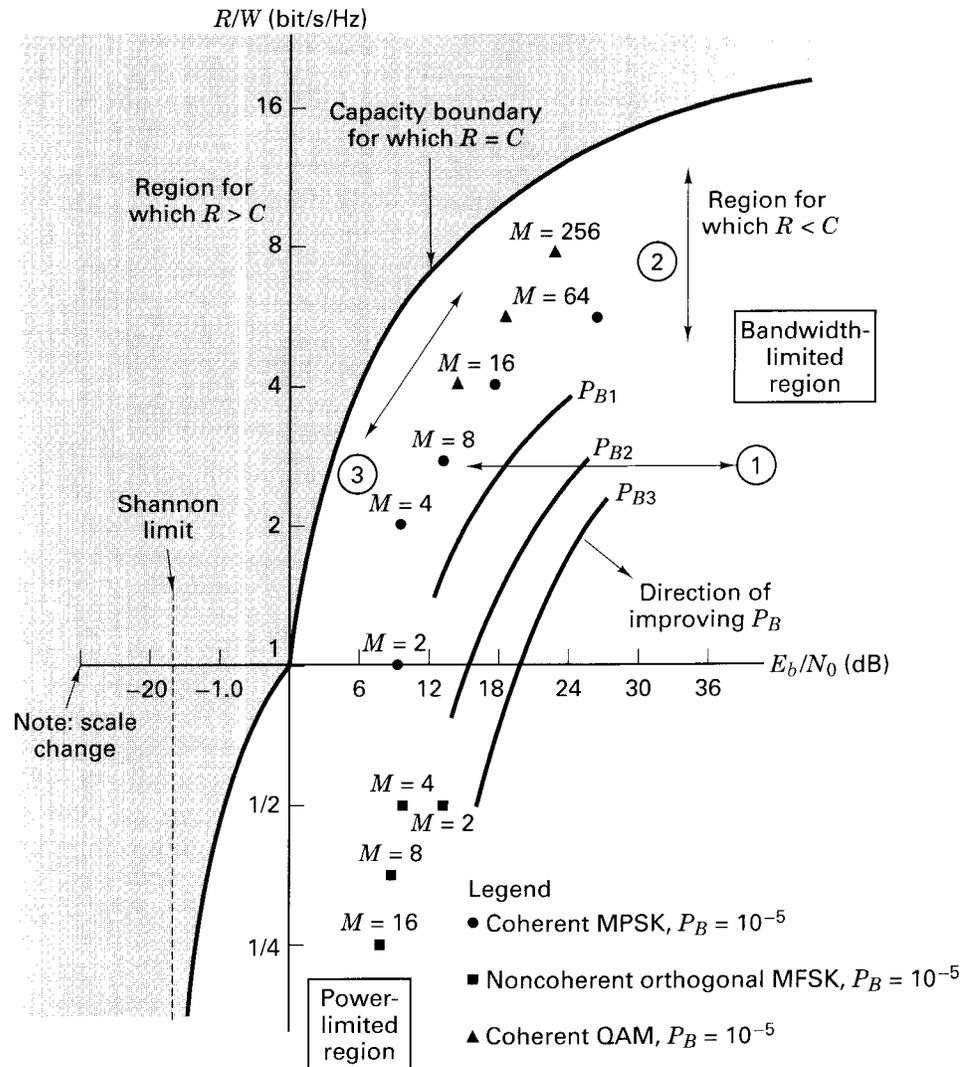


Figure 5.4: Exemple: modulations diverses.

## Section 6

# Détection vectorielle

**Dans cette partie du cours nous allons considérer la détection vectorielle dans le bruit gaussien.** Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas quand les symboles transmis correspondaient aux bits et se trouvaient sur une ligne (BPSK,  $a_i = \pm 1 \in \mathbb{R}$ ). Regardons maintenant comment change la probabilité d'erreur si  $a_i$  sont des  $m$ -uplets de bits, associé à des points dans l'espace  $n$ -dimensionnelle ( $a_i \in \mathbb{R}^m$ ). Ceci va nous être utile pour les modulations numériques  $M$ -aires.

Nous allons commencer par considérer 2 points dans l'espace  $\mathbb{R}$ . Ensuite, on généralisera le résultat sur le cas de plusieurs points.

### 6.1 Cas binaire sur le canal gaussien vectoriel

Supposons que les valeurs du bit transmis  $b$  ( $b \in \{0, 1\}$ ) sont associés avec les  $m$ -uplets  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$ :

$$a(b) = \begin{cases} \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^m, & b = 0; \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^m, & b = 1. \end{cases}$$

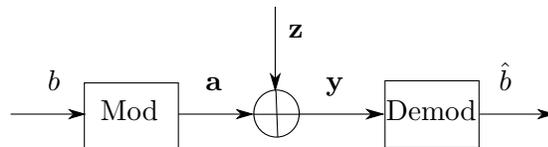


Figure 6.1: Canal gaussien vectoriel.

Considérons aussi le canal vectoriel gaussien avec  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)$ . Donc,

$$p_Z(z) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} e^{-\frac{\|z\|^2}{2\sigma^2}}.$$

Suivant Figure 6.1,

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{z};$$

alors

$$Y \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{a}_0, \sigma^2 I_m), & \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{a}_0; \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}_1, \sigma^2 I_m), & \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{a}_1. \end{cases}$$

Nous écrivons donc

$$p_{Y|b}(y|0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{a}_0\|^2}{2\sigma^2}};$$

$$p_{Y|b}(y|1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{a}_1\|^2}{2\sigma^2}};$$

et

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{p_{Y|b}(y|1)}{p_{Y|b}(y|0)} = \exp\left(\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}_0\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_1\|^2}{2\sigma^2}\right).$$

En prenant l'algorithme de deux cotés, nous avons

$$LLR(\mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}_0\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_1\|^2}{2\sigma^2}.$$

Si  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  denote le produit scalaire de vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ ,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i;$$

alors nous obtenons

$$LLR(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}, \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0}{\sigma} \rangle + \frac{\|\mathbf{a}_0\|^2 - \|\mathbf{a}_1\|^2}{2\sigma},$$

le seuil de décision est

$$\gamma = \sigma^2 \ln \frac{p_0}{p_1} + \frac{\|\mathbf{a}_0\|^2 - \|\mathbf{a}_1\|^2}{2\sigma}$$

et la règle de décision:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 \rangle \underset{\hat{b}=1}{\overset{\hat{b}=0}{\geq}} \gamma.$$

Ceci dit, les régions de décisions pour  $\hat{b} = 0$  et  $\hat{b} = 1$  sont séparées par un hyperplan

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 \rangle = \gamma\}.$$

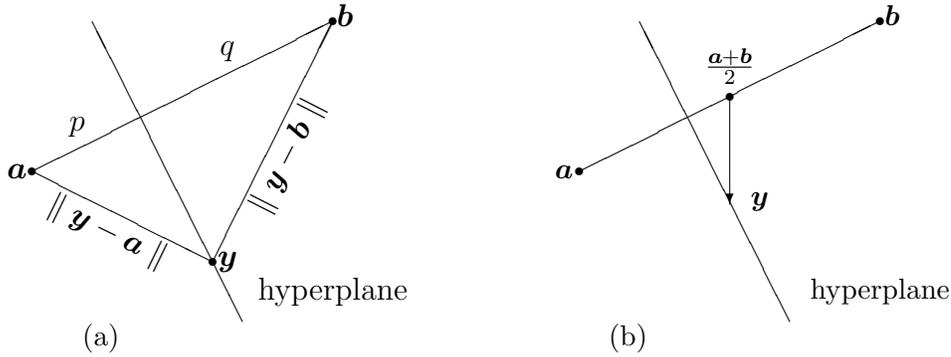


Figure 6.2: Hyperplan de décision (b) et projections (a).

Notez que la décision est basée sur la projection de  $\mathbf{y} - \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}$  sur l'espace linéaire spannée par  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$  (qui est un hyperplan, regardez Figure 6.2a). Notez aussi que  $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}_0\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_1\|^2 = p^2 - q^2$ , ou  $p$  et  $q$  sont les projections sur Figure 6.2b.

Etant donné  $d = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0\|$  et  $d = p + q$ , on déduit que

$$p = \frac{d}{2} + \frac{\sigma^2 \ln(p_0/p_1)}{d}$$

$$q = \frac{d}{2} - \frac{\sigma^2 \ln(p_0/p_1)}{d}$$

**Remarque** Dans le cas particulier quand  $p_0 = p_1 = 1/2$ , nous obtenons  $p = q$ , et le hyperplan séparant deux régions de décision se trouve de la même distance de  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$ . Alors la décision est prise en fonction vers quel point  $\mathbf{y}$  est plus proche.

Les observations suivantes peuvent être faites:

- Le hyperplan séparant deux régions de décision est plus proche de  $\mathbf{a}_1$  quand  $\frac{p_0}{p_1}$  augmente – la région de décision  $\hat{b} = 0$  devient plus grande puisque le cas de  $b = 0$  devient plus probable.
- Si  $\frac{p_0}{p_1} > 1$ , alors le hyperplan de de séparation devient plus proche de  $\mathbf{a}_1$  avec  $\sigma^2$  – plus le bruit est fort, moins on donne de l'importance à l'observation  $\mathbf{y}$  et plus - à la probabilité a priori  $p_0$ .
- Les expressions pour le cas scalaire sont un cas particulier de la détection vectorielle.

- De la manière similaire au cas scalaire, on trouve

$$P(err|b=0) = Q\left(\frac{d}{2\sigma} + \frac{\sigma \ln(p_0/p_1)}{d}\right);$$

$$P(err|b=1) = Q\left(\frac{d}{2\sigma} - \frac{\sigma \ln(p_0/p_1)}{d}\right).$$

Donc, la probabilité d'erreurs par symbole  $P_e$  est

$$P_e = p_0 P(err|b=0) + p_1 P(err|b=1),$$

et, si  $p_0 = p_1 = 1/2$ , on obtient

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right).$$

## 6.2 Cas $M$ -aire sur le canal gaussien vectoriel

Considérons maintenant le cas avec  $M$  points,  $M > 2$ . Dans ce cas, le module de décision à la réception doit décider lequel de  $M$  points a été transmis, en ayant observé  $\mathbf{y}$ . Donc, il faudra trouver une région de décision correspondant à chacun de  $M$  points, regardez pour exemple Figure 6.3.

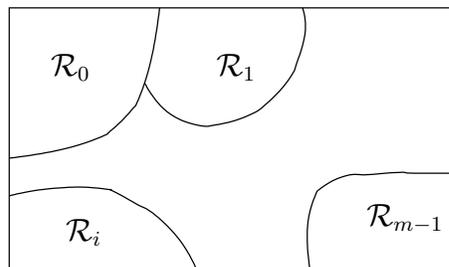


Figure 6.3: Régions de décision.

Si un symbole  $\mathbf{a}_i$  a été émis, la probabilité d'erreur est donc la probabilité que  $\mathbf{y}$  se trouve à l'extérieur de la région de décision correcte  $R_i$ ,

$$P(err|\mathbf{a}_i) = 1 - \int_{R_i} p_{Y|\mathbf{a}_i}(\mathbf{y}|\mathbf{a}_i) d\mathbf{y}.$$

**Remarque :** Considérons un canal vectoriel gaussien. Si  $p_i = \frac{1}{M}$  pour  $\forall i, 1 \leq i \leq M$ , alors la règle de décision optimale est de choisir le point  $\mathbf{a}_i$  le plus proche du symbole reçu  $\mathbf{y}$ . Donc, les régions de décision sont formées par des hyperplans séparateurs, se trouvant à distance égales des points  $\mathbf{a}_i$ .

**Definition :** Les régions de décision, formée avec la règle de la distance minimale, s'appellent les régions de Voronoi.

L'exemple des régions de Voronoi pour  $M = 3$  est donné sur Figure 6.4.

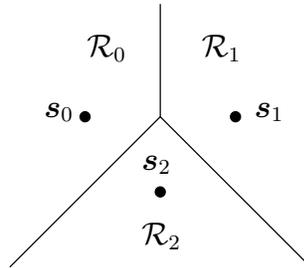


Figure 6.4: Régions de décision pour  $M = 3$  et  $\mathbb{R}^2$ .

### 6.2.1 Borne de l'union (des événements)

Quand le nombre de points  $M$  est très grand et/ou les régions de décision ont une forme assez compliqués, il peut être difficile de trouver l'expression exacte de  $P_e$ .

Il y a une borne simple et très utile, qui vient de l'observation que, pour deux événements  $A$  et  $B$ ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

Cette borne s'appelle la borne de l'union :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \leq \sum_{i=1}^N P(A_i).$$

Appliquée à l'expression  $P(\text{err}|\mathbf{a}_i)$ , cette borne donne

$$P(\text{err}|\mathbf{a}_i) \leq \sum_{j:i \neq j} P(\text{err}|\mathbf{a}_i, \{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\}),$$

ou la notation  $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\}$  montre qu'on considère le cas binaire avec les points  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{a}_j$ . Dans le cas du canal gaussien vectoriel, on peut développer encore et obtenir

$$P(err|\mathbf{a}_i) \leq \sum_{j:i \neq j} Q\left(\frac{\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|}{2\sigma}\right).$$

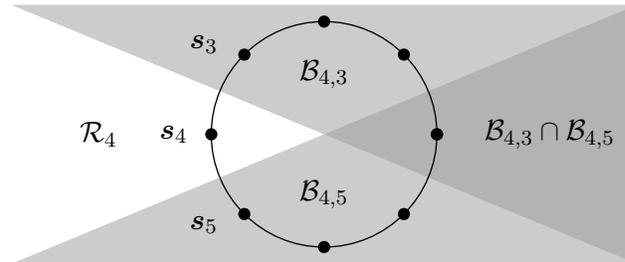


Figure 6.5: Exemple d'utilisation de la borne de l'union.

**Exemple :** Considérons un exemple d'une PSK (Figure 6.5). Considérons  $P(err|s_4)$  pour le point  $s_4$  et les régions de décision paire-par-paire pour ses voisins  $s_3$  et  $s_5$ . On peut voir que la région  $\mathcal{B}_{4,3} \cap \mathcal{B}_{4,5}$  sera comptée deux fois dans la borne de l'union tandis qu'elle devrait être comptée une seule fois dans l'expression exacte de  $P(err|s_4)$ . Ceci démontre très clairement que la borne de l'union est une borne supérieure.

## Section 7

# Codage de canal et de source

Dans cette partie du cours nous allons brièvement présenter quelques schémas de codage de source et de canal.

### 7.1 Codage de canal: quelques schémas de base

Nous avons vu aux cours précédents qu'il existe un compromis entre la puissance émise de signal et la probabilité d'erreur par bit du système: on souhaite émettre le signal à la puissance la plus petite possible (SNR le plus petit possible), mais la probabilité d'erreur par bit à la sortie de démodulateur augmente dans ce cas. Pour diminuer la probabilité d'erreur par bit, nous utilisons les *codes correcteurs d'erreurs* de canal.

Dans la chaîne de communication, le codeur de canal est situé avant le modulateur et le décodeur de canal est situé après le démodulateur. Le codeur de canal procède comme suit: il met en correspondance un vecteur de  $n$  bits à un vecteur de  $k$  bits à son entrée, où  $k < n$ . Alors, le vecteur en sortie du codeur (appelé le *mot de code*) contient une certaine redondance par rapport au vecteur à l'entrée (appelé le *mot d'information*).

**Définition** *Le rendement de code  $R$  est le rapport*

$$R = \frac{k}{n}.$$

L'objectif du codage de canal est de fiabiliser la transmission, c'est-à-dire minimiser la probabilité d'erreur. Le rendement maximal qu'on peut avoir est donné par le résultat suivant:

*Pour un canal discret sans mémoire de capacité  $C$  et pour  $\epsilon > 0$  (petit), il existe un code de longueur  $N$  ( $N$  grand) de rendement  $R < C$  et un algorithme de décodage tel que la probabilité d'erreur après le décodage est  $\epsilon$ . Si  $R > C$ , la transmission fiable n'est pas possible.*

Voici quelques schémas de codage les plus simples:

**Exemple 1 (code de parité):** à partir de  $k$  bits d'entrée, le codeur génère  $k + 1$  bits dont les  $k$  premiers sont égaux au mot d'information et le dernier est XOR du mot d'information.

**Exemple 2 (code à répétition):** à chaque bit d'entrée, le codeur met en correspondance  $n$  bits, dont chacun est la répétition du bit d'entrée.

Les performances du schéma de codage de canal sont données par les *capabilités de détection et/ou correction d'erreurs*, aussi que par le *gain de codage*.

**Définition** *La capacité de correction d'un code est le nombre d'erreurs maximal introduits par le canal qui peuvent être corrigés lors le processus de décodage. La capacité de détection d'un code est le nombre d'erreurs maximal introduits par le canal qui peuvent être détectés (mais pas forcément corrigés!).*

**Remarque :** Notons que la limite théorique asymptotique de correction pour un code de rendement  $R$  sur le canal blanc additif gaussien est  $\frac{1}{2} \log_2(1 + R \frac{E_b}{N})$ , où  $N = N_0 B$ , et les codes qui atteignent cette limite s'appellent les codes s'approchant à la capacité.

Notons aussi que, en codant l'information, nous avons de besoin de transmettre plus de bits, ce qui diminue notre débit binaire utile. Alors est-il utile de coder? Le gain de codage nous montre qu'est-ce qu'on gagne par rapport à une transmission non-codée des bits d'information:

**Définition** *Le gain de codage pour une probabilité d'erreur  $P_b$  fixe est la différence des SNR de la transmission non-codée et de la transmission codée utilisant le code sous considération,*

$$g_{dB}(P_e) = SNR_{sans\ codage,dB}(P_b) - SNR_{codé,dB}(P_b).$$

Notons que le SNR pour la transmission codée est calculé en prenant en compte la transmission des bits redondants, c'est-à-dire la puissance utilisé pour transmettre 1 bit d'information utile est égale à  $1/k$ -ème de la puissance totale de transmission du mot de code. Donc, si le gain de codage,

calculé de cette manière, est positif, alors le schéma codé rapporte un gain par rapport au schéma sans codage. Le gain de codage peut être négatif si ceci n'est pas le cas. Fig. 7.1 présente un exemple d'un gain de codage trouvé pour  $P_b = P_e = 10^{-6}$ .

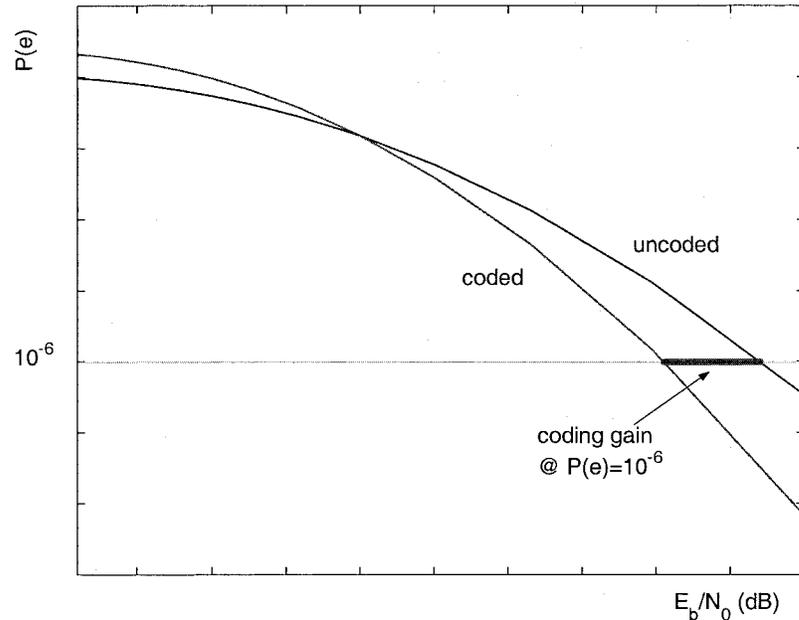


Figure 7.1: Gain de codage: exemple de [Biglieri].

La question est comment construire la paire codeur/décodeur le plus efficace possible, qui pourraient opérer très proche de la limite théorique et avoir une complexité (et, donc, le coût) faible.

### 7.1.1 Théorie de codage classique

Dans la théorie de codage classique, ou algébrique, on étudie quelles constructions algébriques des codes ont les meilleures capacités de correction. Ensuite, on cherche des algorithmes de décodage efficaces pour les codes proposés.

Dans la très grande plupart des cas, nous demandons au code d'être *linéaire*, c'est-à-dire représenter une transformation linéaire des mots d'information vers les mots de code. Ceci nous donne une description compacte du code, ainsi que un algorithme de décodage de moindre complexité.

Depuis des années 50, nous connaissons des constructions des codes optimaux des longueurs de quelques dizaines de bits (code de Hamming et codes de Golay par exemple). Cependant, pour les systèmes des communications sans fils nous avons d'habitude besoin des codes avec des longueurs

de quelques centaines à quelques milliers de bits. Les premiers codes répondant à ces critères ont été proposés aux années 60-70 et s'appellent les *codes convolutifs*. En plus, les codes convolutifs peuvent être encodés en temps linéaire (grâce au fait qu'ils sont basés sur les registres à décalage) et décodés en temps linéaire à la longueur, en utilisant l'*algorithme de Viterbi* ou l'*algorithme BCJR*.

En utilisant les codes convolutifs, il est devenu possible d'avoir 6 dB de gain de codage (et donc se retrouver de 6 dB de la limite théorique). Avec le but d'améliorer ce résultat, des longues codes convolutifs avec des structures compliquées ont été proposés. ceci a permis d'obtenir jusqu'à 7 dB de gain de codage...mais pas plus.

### 7.1.2 Théorie de codage moderne

Dans la théorie de codage moderne, on fixe d'abord l'algorithme de décodage de complexité faible, qui s'appelle le décodage de *propagation des croyances* ou décodage *itératif*, et ensuite on cherche des codes avec les bonnes capacités de correction, qui peuvent être décodés par cet algorithme.

Le décodage itératif a une très faible complexité de décodage. Il a été inventé par Claude Berrou en 1992 et par Robert Gallager en 1963. Les codes, qui peuvent être décodés par cet algorithme, comportent des familles qui peuvent atteindre la limite théorique pour les grandes longueurs. Les codes utilisés dans les communications sans fils opèrent à 1 dB au plus de la limite sur le canal gaussien. Les premières familles qui ont été proposées sont les *turbo codes* et les *codes à densité faible* (codes LDPC).

## 7.2 Codage de source

Exemple: code ASCII: 7 bits dans chaque octet utilisés.

Compression: sans pertes (programmes, données importantes) ou à pertes (images, films, vidéo).

L'objectif de la compression est de minimiser le nombre de bits transmis en préservant le message original.

Définissons d'abord l'**entropie binaire**. L'entropie est une mesure d'incertitude associée à une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de probabilité  $p_X(x)$ . Soit  $X$  peut prendre  $n$  valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Alors l'entropie  $H(X)$  est calculée comme

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_X(x) \log_2 p_X(x).$$

Notez que  $0 \leq H(X) \leq \log_2 N$ .

Le taux de compression maximal possible est donné comme suit:

*Un bloc de  $N$  symboles avec l'entropie  $H(X)$  peuvent être compressés dans  $NH(X)$  bits avec la perte de l'information négligeable quand  $N \rightarrow \infty$ . S'ils sont compressés dans moins que  $NH(X)$  bits, alors il y a une perte de l'information.*

### 7.2.1 Codes à longueur variable

Idée: remplacer chaque symbole  $x_i$  par une séquence de bits  $b_i$ ; si  $p(x_i) = p_i$  et  $p_1 < p_2$ , alors  $|b_1| > |b_2|$ , c'est-à-dire les symboles les plus probables sont encodés avec le nombre le plus petit des bits.

*Example:* Soit l'alphabet des données  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $p(a) = 1/2$ ,  $p(b) = 1/4$ ,  $p(c) = 1/8$  et  $p(d) = 1/8$ .

Notons que, si on utilisait approche directe (attribuer à chaque symbole une séquence de bits de même taille), alors, pour transmettre  $m$  symboles, on devrait transmettre  $2m$  bits. Regardons ce qu'on peut obtenir avec un code de taille variable de Huffman:

Symbole	Séquence de bits associée
a	0
b	10
c	110
d	111

Calculons le nombre de bits moyen, nécessaire pour transmission de  $m$  symboles:

$$1 \cdot \frac{m}{2} + 2 \cdot \frac{m}{4} + 3 \cdot \frac{m}{8} + 3 \cdot \frac{m}{8} = \frac{7m}{4} \text{ bits.}$$

Ceci est 12.5% moins que pour l'approche directe.

### 7.2.2 Code à longueur fixe

Idée: créer un "dictionnaire" des sous-séquences de messages; remplacer les sous-séquences par les séquences de bits à longueur fixe.

Ce type de codage marche bien s'il y a beaucoup des messages répétitifs.

*Exemple* : (très simplifié)

774	"cat"
775	"catastrophe"
...	...

## Section 8

# Canaux de transmission dans les systèmes des communications sans fils

### 8.1 Modèles des canaux de transmission sans fils

Le canal de transmission mobile sans fils se caractérise par les variations en temps et en fréquence. Les variations se divisent en deux grandes parties:

- évanouissement à grande échelle: dû à la perte d'amplitude du signal à cause de la distance et des grands obstacles;
- évanouissement à petite échelle: dû à l'interférence des multiples trajets entre l'émetteur et le récepteur.

L'évanouissement à grande échelle est à prendre en compte lors de la planification des réseaux mobiles. L'évanouissement à petite échelle est à prendre en compte lors de la construction de l'émetteur et du récepteur.

Les canaux sans fils opèrent par la radioation électromagnétique de l'émetteur au récepteur. Nous allons considérer quelques cas de la propagation de l'onde électromagnétique.

### 8.1.1 Espace libre, émetteur et récepteur fixes

Soit le signal  $x(t) = \cos 2\pi ft$  est émis. Alors le champ électrique au récepteur situé en  $\mathbf{u} = (r, \theta, \phi)$  au temps  $t$  est

$$E(f, t, \mathbf{u}) = \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f(t - r/c)}{r},$$

$c$  – vitesse de lumière,

$\alpha_s$  – pattern de radiation de l'antenne

$fr/c$  – variation de phase à cause du délai de propagation

$1/r$  – évanouissement d'amplitude avec la distance

### 8.1.2 Espace libre, récepteur mobile

Supposons que le récepteur bouge avec la vitesse  $v$  par rapport à l'émetteur.  $r = r_0 + vt$ , et

$$E(f, t, \mathbf{u}) = \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f(t - (r_0 + vt)/c)}{r_0 + vt}.$$

On observe le *décalage de Doppler* de  $-fv/c$  à cause du mouvement du récepteur. Notons aussi que l'atténuation dépend du temps  $t$ .

### 8.1.3 Emetteur et récepteur fixes, obstacle fixe

La distance entre l'émetteur et le récepteur étant égale à  $r$ , soit il y a un obstacle à réflexion parfaite à distance  $d$  de l'émetteur et à distance  $d - r$  du récepteur (le récepteur se trouve entre l'émetteur et l'obstacle). Alors on a

$$E(f, t, \mathbf{u}) = \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f(t - r/c)}{r} - \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f(t - (2d - r)/c)}{2d - r}.$$

Le signal reçu est la superposition de deux ondes, toutes les deux de fréquence  $f$ . la différence de phase entre elles

$$\Delta\theta = \left( \frac{2\pi f(2d - r)}{c} + \pi \right) - \frac{2\pi fr}{c} = \frac{2\pi f(d - r)}{c} + \pi.$$

Si  $\delta\theta$  est multiple de:

–  $2\pi$ ; alors le signal reçu est fort (pattern d'interférence constructif)

–  $k\pi$  avec  $k$  impair; alors le signal reçu est atténué (pattern destructif)

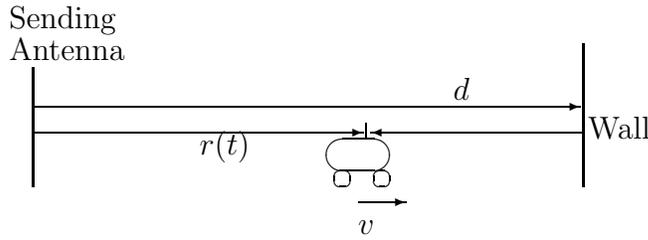


Figure 8.1: Récepteur mobile en présence d'obstacle.

Les patterns d'interférences dépendent aussi de  $f$ . Pour  $r$  fixe, si  $f$  change de

$$\frac{1}{2} \left( \frac{2d - r}{c} - \frac{r}{c} \right)^{-1},$$

alors les deux patterns s'échangent. La quantité

$$T_d = \frac{2d - r}{c} - \frac{r}{c}$$

est appelée l'étalement du délai ("delay spread") et représente la différence entre les délais de propagation de deux ondes. Les patterns d'interférence ne changent pas beaucoup si le changement en fréquence est beaucoup plus petit que  $1/T_d$ .  $1/T_d$  est donc appelé la bande passante cohérente.

#### 8.1.4 Récepteur mobile, obstacle fixe

On va voir que dans ce cas le récepteur bouge via les patterns d'interférences et que la force du signal augmente et diminue périodiquement. Ce phénomène est l'évanouissement à multi-trajets.

On a

$$E(f, t, \mathbf{u}) = \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f((1 - v/c)t - r_0/c)}{r_0 + vt} - \frac{\alpha_s(\theta, \phi, f) \cos 2\pi f((1 + v/c)t - (2d - r_0)/c)}{2d - r_0 - vt}.$$

Les décalages de Doppler de deux trajets sont:  $D_1 = -fv/c$  and  $D_2 = fv/c$ . L'étalement de fréquence est

$$D_s = D_2 - D_1 = 2f \frac{v}{c}.$$

## 8.2 Reflection du sol, effet de la distance et des grands obstacles

En présence du sol, le récepteur va recevoir des trajets refletés du sol et, quand  $r$  est grand, ceci va causer l'atténuation du signal. Donc l'amplitude du signal décroît non pas en  $1/r$  comme dans l'espace libre, mais en  $1/r^2$ .

En ce qui concerne les grands obstacles, la puissance du signal s'atténue encore plus (exponentiellement en  $r$ ) à cause de l'absorption de la puissance par les obstacles entre l'émetteur et le récepteur.

## 8.3 Modèle mathématique du canal sans fil

### 8.3.1 Canal sans fil comme un système linéaire variant en temps

Soit  $x(t)$  signal émis. Alors le signal reçu est

$$y(t) = \sum_i a_i(t)x(t - \tau_i(t)),$$

où  $a_i(t)$  est l'atténuation du trajet  $i$  et  $\tau_i(t)$  est le délai du trajet  $i$ .

Même si les  $a$  et les  $\tau$  individuels sont supposés d'être indépendants de  $f$ , la réponse totale du canal varie en  $f$ , dû au fait que les trajets différents ont des délais (et donc des différences de phase) différents.

Alors, nous avons la réponse impulsionnelle du canal à évanouissements multi-trajets:

$$h_{canal}(\tau, t) = \sum_i a_i(t)\delta(\tau - \tau_i(t)),$$

ou  $\delta(\cdot)$  est la fonction de Dirac. L'effet du décalage de Doppler n'est pas évident dans cette représentation, mais pour chaque trajet avec le délai  $v/c$ , le décalage de Doppler est de  $-fv/c$ .

D'une manière équivalente, on peut donner la représentation fréquentielle. La réponse fréquentielle du canal est obtenue par la transformée de Fourier et est

$$H_{canal}(f, t) = \sum_i a_i(t)e^{-j2\pi f\tau_i(t)}.$$

### 8.3.2 Modèle équivalent en bande de base

La transmission s'effectue dans la bande de fréquences  $[f_0 - W/2, f_0 + W/2]$ . Cette bande de fréquences s'appelle la bande transposée. La bande de fréquences aux alentours de la fréquence 0 (au lieu de  $f_0$  pour la bande transposée) est appelée la bande de base. D'habitude on transmet le signal de l'émetteur au récepteur dans la bande transposée, mais le récepteur translate le signal vers la bande de base pour effectuer le traitement de l'information. On peut démontrer que le signal reçu équivalent en bande de base  $y_B(t)$  peut s'écrire comme

$$y_B(t) = \sum_i a_{B,i}(t)x(t - \tau_i(t)),$$

ou  $a_{B,i}$  est l'amplitude équivalente en bande de base.

### 8.3.3 Modèle du canal après l'échantillonnage

Après avoir traduit le signal vers la bande de base, le récepteur effectue l'échantillonnage du signal reçu pour travailler avec les données discrétisées. On échantillonne avec la période  $T_S$ . Donc, le signal échantillonné  $y[nT_S]$  s'écrit comme

$$y[nT_S] = \sum_l h_l[n]x[n - l],$$

ou  $h[l]$  est l'échantillon du filtre du canal en temps  $lT_S$  (en général,  $h[l]$  est une valeur complexe).

### 8.3.4 Présence du bruit blanc additif gaussien

Nous devons prendre en compte le bruit dans notre modèle. On suppose que le bruit est blanc, gaussien avec la moyenne nulle et la variance  $N_0/2$ . Notons-le comme  $n(t)$ . Alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_i a_i(t)x(t - \tau_i(t)) + n(t); \\ y[nT_S] &= \sum_l h_l[n]x[n - l] + n[nT_S]. \end{aligned}$$

## 8.4 Performance sur le canal de Rayleigh

Prenons un exemple de la modulation BPSK. La distance entre 2 symboles est 2, alors

$$P_b = \mathbb{E}_r Q \left( \sqrt{2R^2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_b/N_0}{1 + E_b/N_0}} \right) \approx \frac{1}{4E_b/N_0}.$$

Donc, la probabilité d'erreur est inversement proportionnelle au SNR. La comparaison des performances de la BPSK sur le canal gaussien et sur le canal de rayleigh est montrée sur Fig.8.2. On peut voir la différence immense entre les performances sur ces deux canaux, de plus, elle augmente avec le SNR. Un codage doit être utilisé pour diminuer cette différence.

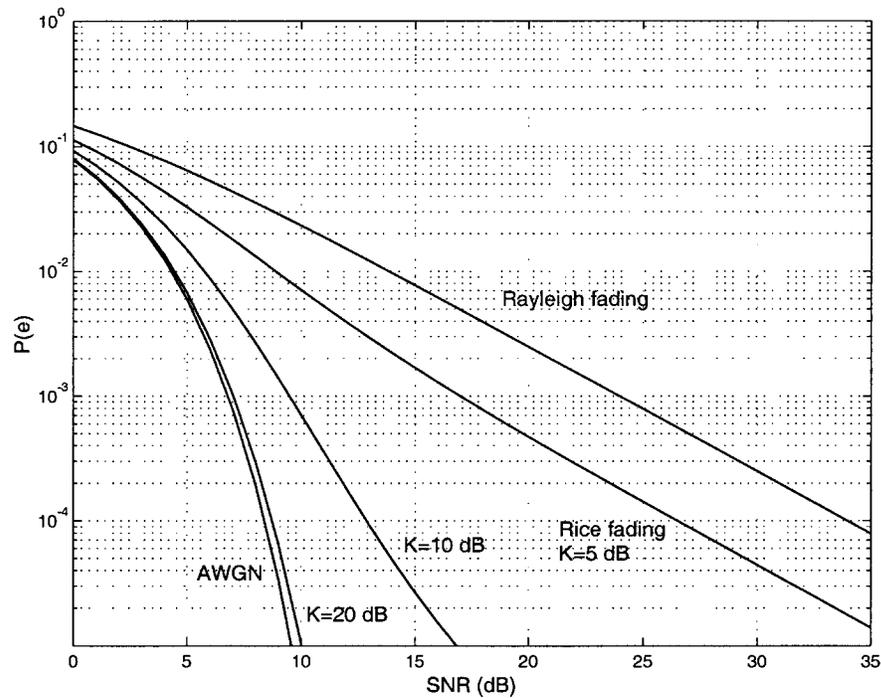


Figure 8.2: Comparaison des performances sur le canal gaussien et le canal de Rayleigh.

Peut-on utiliser une autre modulation pour améliorer les performances? Malheureusement, pour toute modulation, nous pouvons approximer les performances sur le canal gaussien comme

$$\frac{\alpha}{2} Q \left( \sqrt{2\gamma \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

et, donc, sur le canal de Rayleigh comme

$$\frac{\alpha}{4\gamma E_b/N_0}.$$

Ceci montre que sur le canal de Rayleigh tous les schémas de modulation ont des pauvres performances parce que leur probabilité d'erreur diminue lentement avec l'augmentation du SNR.

## Section 9

# Exercices

### 1. Téléphone numérique

Comparez les contraintes en largeur de bande d'un canal audio du téléphone analogique de 3 kHz et d'un canal numérique. Pour le canal numérique, la voix est formatée à une suite de bits, échantillonnés à 8000 échantillons/s, et chaque échantillon est quantifié de 256 niveaux. On demande que l'interférence entre symboles soit 0.

*Solution :* Un échantillon quantifié à 256 niveaux se représente par  $\log_2 256 = 8$  bits. Donc, la bande minimale nécessaire est de

$$W \geq \frac{1}{2}(8 \text{ bits/symbole})(8000 \text{ symboles/s}) = 32\text{kHz}.$$

### 2. Quiz Choisissez la réponse correcte.

1) Considérer le signal  $x(t) = \cos(2\pi t) \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2$ . Assumer qu'on effectue l'échantillonnage avec la période  $T$ . Quel est  $T$  maximal qui garantit la récupération du signal? a)  $T = 1/8$ ; b)  $T = 1/4$ ; c)  $T = 1/2$ .

*Solution:* 1/4.

2) On vous donne un signal  $p(t)$  avec la densité spectrale  $\hat{p}(f) = T(1 - |f|T)$ ,  $0 \leq |f| \leq 1/T$ . Quelle est la valeur de  $\int p(t)p(t-3T)dt$ ? (Astuce: réfléchissez avant de commencer le calcul!) a) 0; b)  $3T$ ; c)  $1/3T$ .

*Solution:*  $1/3T$ .

3. Proposer votre propre filtre vérifiant les conditions de Nyquist.

4. **Spectre des signaux**

Démontrer la formule de  $\hat{\gamma}_e(f)$ .

5. **Canal de sauvegarde sur VHS:** Le processus de sauvegarde et de récupération des données binaires sur une cassette (par exemple, VHS), peut être vu comme une transmission des symboles binaires (0 et 1) par un canal auditif blanc gaussien, pour lequel le bruit du canal  $z$  a la variance dépendante du symbole binaire  $a$  transmis (sauvegardé sur VHS). Le bruit du canal a la densité de probabilité suivante:

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & \text{si } a = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}, & \text{si } a = 1, \end{cases}$$

sachant que  $\sigma_1 > \sigma_0$ . Les bit 0 et 1 sont équiprobables,  $T_s = 0.001$  et  $E_h = 1$ .

- (a) Sur le même figure, dessinez deux densités de probabilité possibles. Indiquez les régions (qualitativement) de décision.
- (b) Déterminez le récepteur optimal en termes de  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ .
- (c) Ecrivez une expression pour la probabilité d'erreurs en fonction de  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ .
- (d) La récupération des données du VHS est considéré comme satisfaisante si la probabilité d'erreur ne dépasse pas 5%. A quelle variance maximale du canal  $\sigma_0^2$  cela correspond sachant que  $\sigma_1/\sigma_0 \approx 10$ ? (Astuce: utilisez une approximation de la fonction  $Q$ )

6. **Symboles 8-aires:** Les données binaires à 9600 bit/s sont transmises avec les symboles 8-aires en utilisant le filtre de cosinus surélevé avec le coefficient d'arrondi  $\alpha$ . La bande du filtre d'émission est 2.4 kHz.

- (a) Trouvez  $D_s$ .
- (b) Quel est le coefficient  $\alpha$  du filtre de cosinus surélevé?

7. **Décision pour les canaux binaires:**

- (a) Le *canal binaire symétrique* a les entrées et les sorties binaires (0 et 1). Il passe le bit sans erreur avec la probabilité  $1 - p$  et le change pour la valeur opposée avec la probabilité  $p$ . Les entrées 0 et 1 sont équiprobables. Déterminez la règle de décision quand  $p < 1/2$ . Comment changera la règle si  $p > 1/2$ ?
- (b) Le *canal binaire à effacements* a les entrées binaires. Néanmoins, il a 3 sorties possibles: - si l'entrée a été 0, alors la sortie est 0 avec la probabilité  $1 - p_0$  et effacement ? avec la probabilité  $p_0$ ; - si l'entrée a été 1, alors la sortie est 1 avec la probabilité  $1 - p_1$  et effacement ? avec la probabilité  $p_1$ . Les entrées 0 et 1 sont équiprobables. Déterminez la règle de décision quand  $p_0 < p_1 < 1$ . Comment changera la règle si  $p_1 < p_0 < 1$ ?
8. **Jeu avec sinus et cosinus:** Nous savons que  $s(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$ ,  $x(t)$  étant le signal équivalent en bande de base.
- Montrer que  $s(t)$  peut s'écrire comme  $s(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta(t))$  et écrire  $a(t)$  et  $\theta(t)$  en fonction de  $x(t)$ .
  - Montrer que  $s(t)$  peut s'écrire comme  $s(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$  et écrire  $x_I(t)$  et  $x_Q(t)$  en fonction de  $x(t)$ . (Cette exercice montre comment on peut obtenir  $s(t)$  sans faire les opérations dans le domaine complexe.)
9. **Labels** Pour la modulation 16-QAM, choisir un étiquetage minimisant  $P_b$ .
10. **Quelle modulation choisir?** Supposons que le débit binaire  $D_b$  est 144 Mbits/sec doit être transmis par un canal en bande transposée avec la bande passante 36MHz. Quelle modulation choisir? Si  $E_b/N_0$  est 20, quelle est  $P_b$ ?
11. \* **Deux codes simples**
- Quels sont les rendements pour le code de parité et le code à répétition? La longueur de code est  $n$ .
  - Combien d'erreurs peuvent être détectés/corrigés par le code de parité? Et par le code à répétition ?
12. **Filtres dans la chaîne de communication:** Le canal de transmission en bande transposée est modelé à l'aide du filtre du canal et du bruit blanc gaussien. Supposons que le canal est connu et sa réponse impulsionnelle est  $h(t)$ . Supposons la modulation QAM avec la durée symbole  $T_s$  a été développée sans connaissance du canal. Le filtre en bande de base  $h_e(t)$  a été développé pour satisfaire les conditions de Nyquist (donc  $\{h_e(t - kT_s)\}$  sont

orthonormaux). Le filtre adapté  $h_e(-t)$  est utilisé au récepteur, avant l'échantillonnage et détection. Connaissant le filtre du canal  $h(t)$ , on désire à changer le filtre en bande de base à l'émetteur ou le filtre en bande de base du récepteur pour éviter l'interférence entre les échantillons.

- Quel filtre est à changer?
  - Donner la réponse impulsionnelle du filtre changé (supposer la fréquence porteuse  $f_0$ ).
  - Dessiner les filtres variés en bande de base pour démontrer que votre solution est correcte. (Il vaut mieux de le faire avant de répondre aux deux premières questions)
13. **Rappel des cours des probabilités :** Calculer la densité de probabilité de l'amplitude  $|X|$  de la variable aléatoire  $X$ , qui est gaussienne complexe, circulaire, avec la variance  $\sigma^2$ .
14. \* **Constellations appropriées aux canaux à évanouissements** Considérez une constellation QPSK et une constellation QPSK, tournée à l'angle de 30 degrés.
- Laquelle est plus adaptée aux évanouissements? (Supposez que un bit d'étiquette a subi la transmission par le canal à grand évanouissement)
  - Quelle est l'angle optimale de rotation de la constellation? Quelle est l'angle qui minimise le gain de codage?
15. \* **Fréquence porteuse pour un système de communication mobile :** Supposons un canal de transmission avec le profil de densité de puissance ayant trois impulsions comme suit:  $-20$  dB à 0 mks,  $0$  dB à 2 mks,  $-10$  dB à 3 mks.
- Calculez l'étalement de délai en ne prenant pas en compte les trajets atténués plus de 15 dB.
  - Estimez la bande de cohérence.
  - Si le récepteur est situé dans l'avion ayant la vitesse 800 km/h et le temps de cohérence est 100 mks, calculez approximativement la fréquence porteuse  $f_0$ .
16.  **$D_s$  maximal:** Supposons un canal de transmission sans fils avec trois impulsions de distribution de puissance comme suit:  $0$  dB à 0 ns,  $-3$  dB à 100 ns,  $-3$  dB à 200 ns,  $-6$  dB à 300 ns. Ceci est un exemple d'un canal mobile à l'intérieur. Quelle est le débit symbole maximal que le système peut supporter sans utiliser l'égalisateur? Pour trouver la bande de cohérence, utilisez les impulsions fréquentiels atténués de 3 dB au plus.

17. \* **Quelques systèmes mobiles existants :**

- A la fin des années 80 au Japon, le système PHS (Portable Handyphone System) a été spécifié. Ses spécifications contiennent l'écartement des porteuses de 300 kHz. Est-ce que le standard subit la sélectivité en fréquence dans l'environnement avec l'étalement de délai de l'ordre de 300 ns?
- Un standard téléphonique DECT (Digital European Cordless Telephone) a été construit pour les hauts débits et les communications en intérieur aux petites distances. Sa spécification contient l'écartement des porteuses de 1.728 MHz. Supposez l'étalement de délai 150 ns. Décidez si le récepteur DECT doit contenir un égaliseur.

18. \* Un canal à évanouissements multi-trajets a l'étalement de délai de 10 mks et l'étalement de Doppler 1 Hz. Aussi,  $T_s = 1$  mks.

- Trouver la bande de cohérence.
- Trouver le temps de cohérence.
- Classifier le canal par rapport à sa sélectivité de fréquence et la rapidité d'évanouissement.
- Proposer un changement de  $T_s$  (ou de  $D_b$ ) pour éviter les effets d'évanouissement.