Partie 2

Abaque de Smith

1. Introduction

Abaque de Smith est un outil graphique, développé en 1939 par P.Smith, pour visualiser le comportement des lignes de transmission et des circuits mico-ondes. Il permet d'effectuer graphiquement le passage entre le coefficient de réflexion à l'extrémité d'une ligne et l'impédance de charge. Ce graphe polaire consiste à superposer deux plans complexes, un constitué d'un ensemble de courbes qui représente l'impédance de charge et l'autre cartésien pour le coefficient de réflexion.

2 .Construction

L'Abaque de Smith est un outil graphique, normalisé par rapport à l'impédance caractéristique de la ligne.

Rappelons l'équation du coefficient de réflexion qui est donné par :

$$\overline{\Gamma}(x=l) = \frac{\overline{Z_l} - \overline{Z_c}}{\overline{Z_l} + \overline{Z_c}} \qquad (1)$$

avec Z_l est l'impédance de charge et Z_c et l'impédance caractéristique de la ligne.

Sur l'Abaque de Smith on travaille généralement avec l'impédance normalisée z_l , elle est donnée par la relation:

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\overline{Z_l}}{\overline{Z_c}} \qquad (2)$$

L'équation 1 devient : $$\overline{\Gamma}(x=l) = \frac{\overline{z_l} - 1}{\overline{z_l} + 1} = \left|\Gamma e^{j\theta}\right| \qquad (3)$$

On peut écrire l'impédance réduite en fonction du coefficient de réflexion par la relation suivante :

$$z_l = \frac{1+\left|\Gamma e^{j\theta}\right|}{1-\left|\Gamma e^{j\theta}\right|} = r_l + jx_l \qquad (4)$$

avec r_l est la partie réelle de l'impédance réduite et x_l est l'impédance imaginaire

Sachant que le coefficient de réflexion s'écrit :

$$\Gamma = \left|\Gamma e^{j\theta}\right| = \Gamma_r + j\Gamma_i \qquad (5)$$

D'après les deux équations 4 et 5 on peut écrire :

$$r_l + jx_l = \frac{(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1+\Gamma_r) - j\Gamma_i} \qquad (6)$$

Donc on obtient d'après l'équation 6 :

$$r_l = \frac{1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1+\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (7)$$

$$x_l = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (8)$$

On peut écrire les deux équations 7 et 8 sous une autre forme :

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_l}{1+r_l}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+rl}\right)^2 \qquad (9)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_l}\right)^2 = \left(\frac{1}{xl}\right)^2 \qquad (10)$$

Rappelons que l'équation d'un cercle s'écrit :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \qquad (11)$$

En comparant les deux équations 9 et 10 avec l'équation 11 on remarque que ces deux dernières sont des équations de cercles, le premier représente les cercles de résistance par contre le deuxième représente ceux de réactance.

Si on suppose que r_l=0 on obtient :

$$\Gamma_r^{\,2} + \Gamma_i^{\,2} = 1 \tag{12}$$

L'équation 12 est une équation d'un cercle de rayon R égal à 1 et de centre C de coordonné (0,0). Il est représenté en rouge sur la figure 1

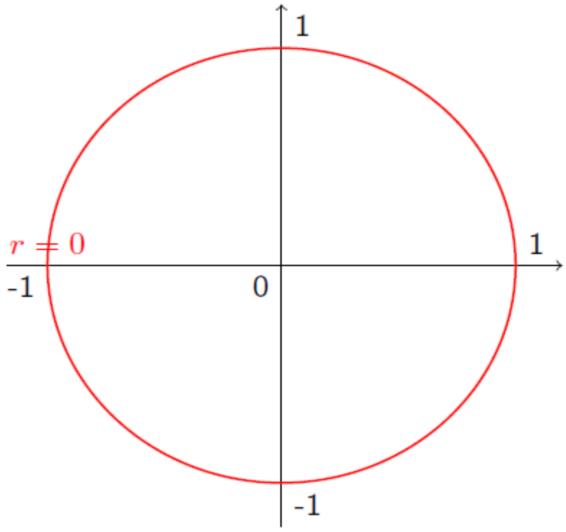

Figure 1 : Exemple d'un cercle de résistance pour r_l=0

La figure 2 montre que pour $0 < r_l < \infty$, plusieurs cercles de rayons différents seront obtenus.

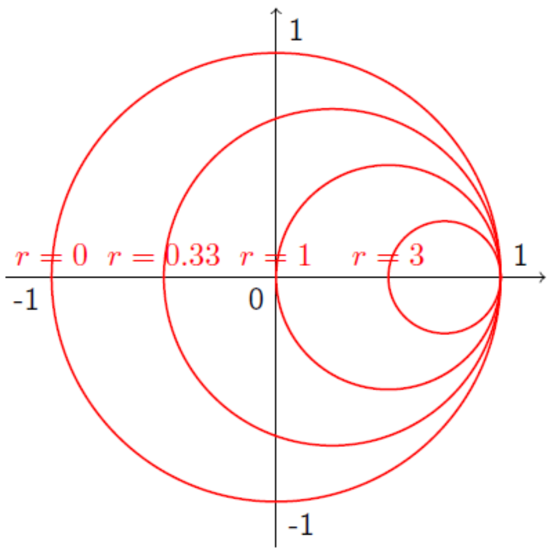

Figure 2 : Exemple de cercles de résistance pour $r_l \neq 0$

On peut faire le même calcul pour les réactances, les cercles situés dans la moitié inférieure de l'abaque sont représentés pour x_l <0 (charges capacitives) et ceux situés dans la moitié suppérieur sont représentés pour x_l >0 (charges inductives)

La figure 3 montre le tracé des cercles sur le plan complexe du coefficient de réflexion des cercles des parties réelles et imaginaires de l'impédance réduite z_l

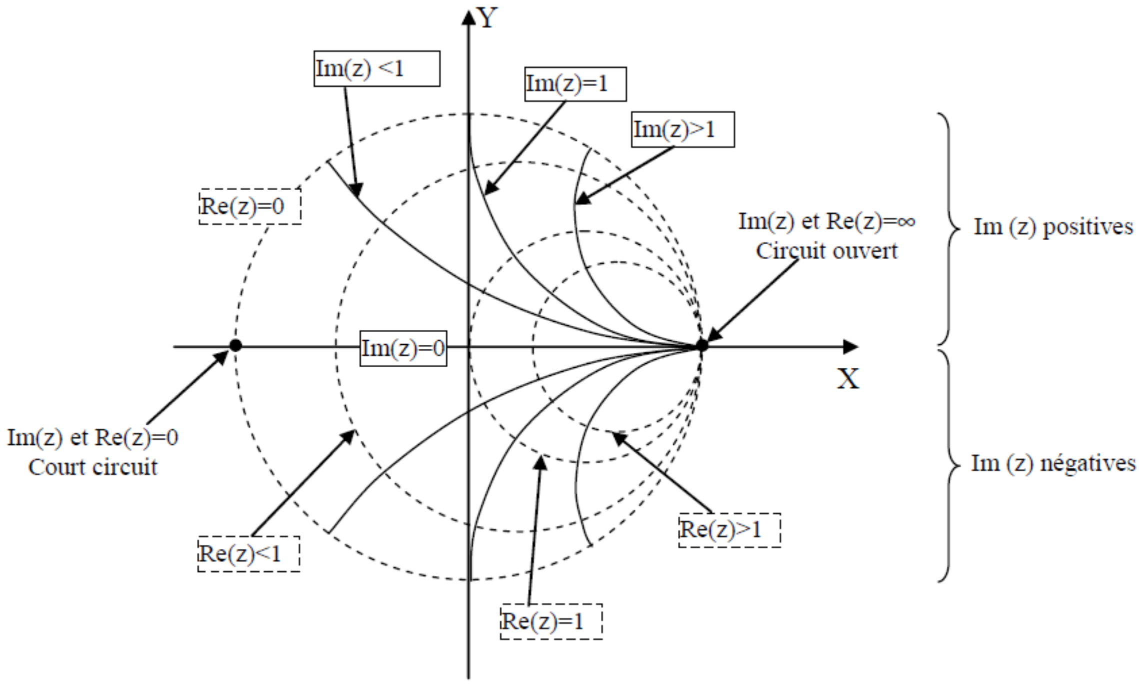

Figure 3 : Tracé des cercles de Re(z_l) et Im(z_l)

Les cercles de résistance et de réactance sont orthogonaux.

3. Utilisation de l'abaque de Smith

L'abaque de Smith permet de convertir le coefficient de réflexion à une impédance de charge et vice-versa.

Rappelons l'équation du coefficient de réflexion :

$$\overline{\Gamma_+}(x) = \frac{\overline{V}_- e^{\gamma x}}{\overline{V}_+ e^{-\gamma x}} = \frac{\overline{V}_-}{\overline{V}_+} e^{2\gamma x}$$

(13)

Si la ligne est sans pertes, $\gamma = jk$ l'équation 13 devient :

$$\overline{\Gamma_+}(x) = \frac{\overline{V_-}}{\overline{V_+}} e^{\,j2kx} \tag{14}$$

Ou k est le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, l'équation 14 devient :

$$\overline{\Gamma_+}(x) = \frac{\overline{V_-}}{\overline{V_+}} e^{\,j\frac{4\pi}{\lambda}x} \tag{15}$$

Un décalage de longueur x sur la ligne est représenté par un déphasage

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} x \tag{15}$$

Si $x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\Phi = 2\pi$ ce qui correspond à un tour complet de l'abaque

Si on veut connaitre l'impédance de charge vue à travers le générateur, il suffit de placer l'impédance réduite sur l'abaque de Smith et ensuite faire un décalage sur l'abaque dans le sens trigonométrique inverse.

Si on connait r_l et x_l on peut positionner z_l sur le diagramme. A partir de ce point on fait une rotation dans le sens trigonométrique.

Remarque :

- Si on se déplace vers générateur le déplacement se fait dans le sens trigonométrique inverse.
- Si on se déplace vers la charge le déplacement se fait dans le trigonométrique direct.

Les exercices du prochain TD vont bien éclaircir les choses

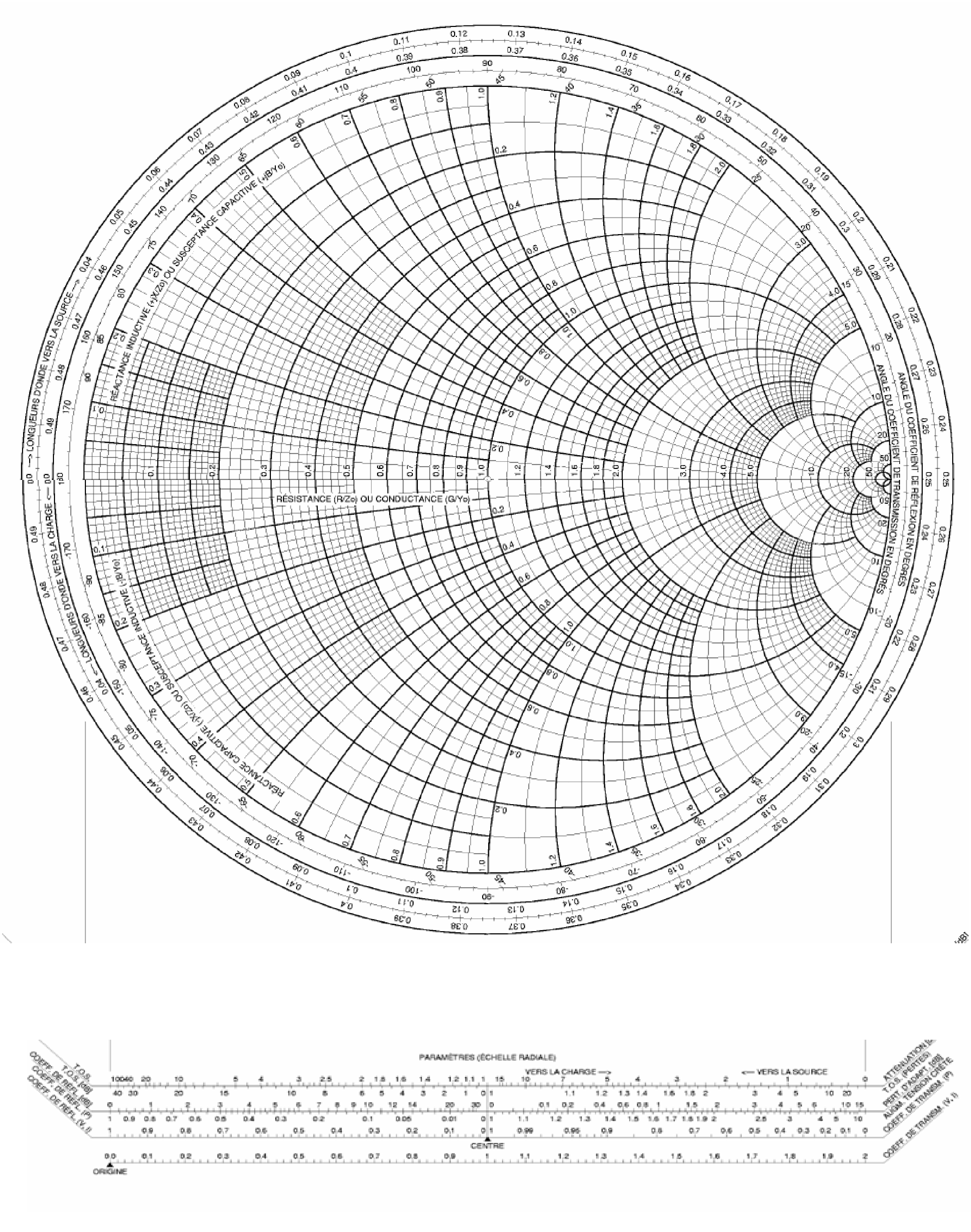

Figure 4 : Abaque de Smith

Références

- ✓ Philippe Ferrari, « phenomenes de propagation en radiofréquences Electronique rapide, » *Cours, Dt Génie Electrique et Informatique Industrielle 2, Physique : phénomènes de propagation en radiofréquences* Grenoble

- ✓ Paul François COMBES, *Micro-ondes 1. Lignes, guides et cavités, Cours et exercices*. Ecoles d'ingénieurs, Edition Dunod, 1996.

- ✓ *Gabriel Cormier, Ph.D., ing. Université de Moncton*. Automne 2010. *Gabriel Cormier* (UdeM).

http://www8.umoncton.ca/umcm-cormier_gabriel/Hyperfrequences/GELE5223_Notes1.pdf

- ✓ Thierry Ditchi, Cours lignes de transmission, Sorbonne Université, UPMC, France