République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi
Faculté des sciences et de la technologies

Mathématiques 3

Chapitre 2 : Intégrales impropres

1.1 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné.

1.2 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités.

Par : Dr. Bourahli Amel
Pour : 2 éme année ST (GC, GP, GM, AUTO, ELECT)

2021 / 2022

Chapitre 02: Intégrales impropres

En chapitre 01, on a étudié l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Dans ce chapitre, on va étudier le cas d'une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sans être continue sur $[a,b]$

Définition : une fonction $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I, si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I

Définition. On dit que c est un point singulier pour la fonction f si elle n'est pas bornée en ce point i.e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$

1- Intégrales impropres de 1ère espèce

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est une intégrale impropre (ou généralisée) de 1ère espèce si au moins l'une des bornes de l'intervalle $]a,b[$ est infinie.

Si f est localement intégrable sur $]a,b[$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt, \quad \int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, Sinon on dit qu'elles divergent

Exemple 01. $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow e^{-t}$

Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-t}\Big]_0^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x})$.

$= 1$

donc l'intégrale généralisée de f sur $[0,+\infty[$ est convergente

Exemple 02 $g : [0,+\infty[\ ,\ t \longrightarrow \sin t$

$J = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sin t\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \sin t\,dt$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} [-\cos t]_0^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\cos x)$

$= 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 2n\pi \Rightarrow \cos x_n = \cos(2n\pi) = 1 \longrightarrow 1 \\ x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow \cos x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 0 \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{la limite n'existe pas}$$

donc l'intégrale généralisée J est divergente

Exemple 03. (Intégrale de Riemann)

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^b \frac{dt}{t^\alpha}$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln t\Big|_1^x & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \quad \text{converge} \\ \infty & \alpha \leq 1 \quad \text{diverge} \end{cases}$$

2. Intégrale impropres de second espèce.

Soit la fonction f localement intégrable sur $]a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite généralisées de 2^{nd} espèce si f possède au moins un point singulier dans l'intervalle $]a,b[$. Si a est un point singulier, par définition

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

Si b est un point singulier

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

Si le point singulier $c \in]a,b[$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to c^-} \int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x \to c^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

Si les limites ci dessus excitent et sont finies, on dit que les ~~limit~~ intégrales impropres qu'elles définissent convergent, sinon on dit qu'elles divergent

Exemple 01: $h :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$

0 est un point singulier pour la fonction h car $\lim_{t \to 0} h(t) = +\infty$. Donc $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale généralisée de 2nd espèce

$$I = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{t}\Big|_x^1$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (2 - 2\sqrt{x})$$

$$= 2$$

D'ou I converge

Exemple 02: Soit $I = \int_2^5 \frac{dt}{t-5}$

5 est un point singulier pour la fonction $f(t) = \frac{1}{t-5}$ car $\lim_{t \to 5^-} f(t) = +\infty$

Donc I est une intégrale généralisées de 2nd espèce

$$I = \lim_{x \to 5^-} \int_2^x \frac{dt}{t-5} = \lim_{x \to 5^-} \ln|t-5|\Big|_2^x$$

$$= \lim_{x \to 5^-} \ln|x-5| - \ln 3$$

$$= -\infty$$

D'ou I diverge

Exemple 3: (Intégrale de Riemann)

$I = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, 0 est un point singulier

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t} & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \left. \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_x^1 & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \left. \ln t \right|_x^1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} -\ln x & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 & \text{converge} \\ \infty & \alpha \geq 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

Remarque

- S'il existe au mois un point singulier $c \in]a,b[$ et l'une des bornes (ou les deux) est infinie, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est une intégrale impropre dite mixte. Dans ce cas l'intégrale s'écrit comme somme d'intégrales généralisées de 1ère espèce et d'intégrales généralisées de 2nd espèce, elle converge si toutes ces intégrales convergent et diverge si l'une au mois diverge
- Si f est à valeur complexes, l'intégrale généralisée $\int_I f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_I Re(f(t))\,dt$ et $\int_I Im(f(t))\,dt$ convergent
- Si $\int_I f(t)\,dt$ et $\int_I g(t)\,dt$ sont intégrales impropres, alors

$\int_I f(t)\,dt$ et $\int_I g(t)\,dt$ convergent $\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$ converge

- Si $\int_I f(t)dt$ converge et $\int_I g(t)dt$ divege $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^*$

$\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ divege

- Si $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ divergent, alors on ne peut rien conclure sur la nature de l'intégrale $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$

Critère de convergence pour les fonctions positives

Théorème : (Critère de comparaison)

Soient f et g deux fonctions positives localement intégrables sur $]a,b[$ avec $b=\infty$ ou $f(b)=\infty$ telles que $0 \leq f \leq g$ sur $]a,b[$, alors

$\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge

$\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple 1 : $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1} dt$

La fonction $f : t \longrightarrow \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$ pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a

$0 \leq \frac{1}{t^2+t+1} \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann qui converge, donc d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1} dt$ converge

Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt$ est convergente puisque la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0,1]$

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1} dt$ est convergente

Exemple 2:

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin t \leq t$

$$\frac{1}{\sin t} \geq \frac{1}{t} \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t} \geq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t}$$

$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t}$ diverge, donc $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$ diverge

Corollaire 1: Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $]a,b[$ avec $b=\infty$ ou $f(b)=\infty$ (b est une singularité) telles que $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, alors

- Si $k \neq 0$ et $k \neq +\infty$, $f(x) \sim k\, g(x)$ au $V(b)$ et les deux intégrales sont de même nature.
- Si $k=0$ $f(x) << g(x)$ alors $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge
- Si $k=+\infty$, $f(x) >> g(x)$ alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ diverge

Exemple

$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$, on a $f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ et $g(t) = \frac{1}{t}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ au voisinage de } 0$$

$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge donc $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge

Corollaire 2: Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable avec

$f(b) = \infty$

- Si $f(t) \sim \frac{k}{(b-t)^\alpha}$ ($k \neq 0$ et $k \neq +\infty$) alors $\int_a^b f(t)dt \begin{cases} \text{converge si } \alpha < 1 \\ \text{diverge si } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- Si $\lim_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$ alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\alpha < 1$
- Si $\lim_{x\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge si $\alpha \geq 1$

Règle pratiques pour le calcul de l'intégrale généralisée

① Utilisation d'un changement de variable

Théorème: Soit φ une bijection de classe C^1 de l'intervalle $]\alpha, \beta[$ sur l'intervalle $]a,b[$, alors:

$\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature, si elles convergent elles sont égales.

Exemple:

$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$, on pose $t = e^u \Rightarrow u = \ln t$

$dt = e^u du$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^u du}{e^u u} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$$

$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$ diverge (Intégrale de Riemann $\alpha = 1$). D'où I diverge

② Intégration par parties

Proposition: Soient f et g deux fonctions de class C^1 sur l'intervalle $[a,b[$ telles que la fonction fg admet une limite finie en b. Alors $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, on a $\int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

Exemple:

$$I = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$$

$f(t) = t$ $\qquad f'(t) = 1$

$g'(t) = e^{-t}$ $\qquad g(t) = -e^{-t}$

$$I = \lim_{x \to +\infty} \left.-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left.-te^{-t}\right]_0^x - \left.e^{-t}\right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$= 1$$

D'où I converge

Convergence absolue

Définition: Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. On dit que

l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument (ou absolument convergente)
si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge

Théorème : Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

En revanche, la réciproque est fausse

Exemple :

Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ qui est impropre de $1^{ère}$ espèce. On a $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ $\forall t \in [1, +\infty[$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), donc

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt$ converge. D'où I converge absolument donc converge

Définition : Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente
si $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge et $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple :

$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi convergente, en effet.

Par une intégration par parties, on obtient

$f(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad$ $f'(t) = \frac{-1}{t^2}$

$g'(t) = \sin t$ $\qquad$ $g(t) = -\cos t$

$$I = \lim_{x\to+\infty} \left.\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$= \cos 1 - \cancel{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}}^{\,0} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \quad (\text{converge } \alpha=2>1)$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge. D'ou I converge

Mais on sait que $\forall\, t \geq 1 \quad |\sin t| \geq |\sin t|^2 \Rightarrow \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t} + \int_1^{+\infty} \frac{-\cos(2t)}{2t}\,dt$$

Par une intégration par parties $\quad f(t) = \frac{1}{t} \qquad f'(t) = \frac{-1}{t^2}$

$$g'(t) = \cos(2t) \qquad g(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left.\frac{\sin(2t)}{4t}\right|_1^x + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{4t^2}\,dt$$

$$= \cancel{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x}}^{\,0} - \frac{\sin(2)}{4} + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{4t^2}\,dt$$

$$= \frac{-\sin(2)}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(2t)}{4t^2}\right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{4t^2} \quad (\text{converge car intégrale de Riemann } \alpha=2>1)$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$ converge ; mais $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge $(\alpha=1)$

D'ou $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge

Critère d'Abel.

Théorème Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables telles que

* f positive, décroissante sur $[a, b[$ et de limite nulle en b (b est singulier ou infinie)
* $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$ $\left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$.

Exemple:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,dt \qquad , \alpha > 0$$

$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \frac{1}{t^\alpha}$

$g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \cos t$

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0$ et décroissante $\left(f'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} < 0\right)$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \left|\int_a^x \cos t\,dt\right| = \left|[\sin t]_a^x\right|$$

$$= |\sin x - \sin a|$$

$$= |\sin x - \sin 1|$$

$$\leq |\sin x| + |\sin 1|$$

$$\leq 2$$

d'après le critère d'Abel I converge.